BULLETIN DE LA S. M. F.

SZOLEM MANDELBROJT

Sur les séries de Dirichlet dont les exposants possèdent quelques propriétés arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 208-220
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__208_0>

SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET DONT LES EXPOSANTS POSSÈDENT QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES;

PAR M. S. MANDELBROJT.

1. Une suite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ est dite linéairement indépendante si aucune combinaison

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \lambda_i \qquad (\text{où les } A_i \text{ sont entiers})$$

n'est nulle, à moins que tous les A_i soient nuls.

Remarquons que si les λ_n sont linéairement indépendants et si les λ_n contiennent un nombre rationnel λ_{n_1} aucune combinaison

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \lambda_i \qquad (A_i \text{ entiers})$$

n'est un entier [à moins qu'elle soit de la forme $A_{n_1}\lambda_{n_1}$, soit que $A_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$].

Si, en effet,

$$\sum_{1}^{m} A_i \lambda_i = A \qquad (\text{entier} \neq A_{n_1}\lambda_{n_1} \text{ et } \neq 0),$$

on pourrait trouver deux entiers B_1, B_2 tels que $B_1 A + B_2 \lambda_{n_1} = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que les λ_n sont linéairement indépendants.

Une suite linéairement indépendante ne peut évidemment pas contenir deux nombres rationnels. Si donc une suite linéairement indépendante contient un nombre rationnel λ_{n_1} il suffit de l'enlever de la suite pour que la suite qui reste soit telle qu'aucune combinaison

$$\sum_{1}^{m} A_i \lambda_i$$

n'est un entier à moins que $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$.

En étudiant les séries de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ où les λ_n sont tels qu'aucune combinaison $\Sigma A_i \lambda_i$ n'est un entier (sauf lorsque $A_i = 0$) on étudie en même temps les séries $\Sigma b_n e^{-\lambda_n s}$ avec les λ_n linéairement indépendants et contenant un nombre rationnel.

On connaît les belles recherches de M. H. Bohr concernant les séries de Dirichlet avec les λ_n linéairement indépendants.

Dans ce travail nous étudions les séries de Dirichlet où aucune combinaison $\Sigma A_i \lambda_i$ n'est un entier [la suite $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, est donc linéairement indépendante]. Nos résultats ainsi que notre méthode différent essentiellement de ceux de M. H. Bohr.

Nous avons indiqué ces résultats dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

2. Nous commençons par la démonstration de quelques faits tout à fait élémentaires qui nous seront utiles par la suite.

Dans le plan de la variable $z = x + iy$ considérons un domaine $D(\lambda)$ défini par l'inégalité

$$x \geqq \lambda \sin^2\left(\frac{y - \left[\frac{y}{2\pi}\right]2\pi}{4}\right) \qquad \left(0 < \lambda < \frac{1}{2}\right),$$

où $[a]$ désigne l'entier le plus voisin de a.

Considérons aussi dans le plan de la variable $s = \sigma + it$, un domaine $\Delta(\alpha)$ défini de la manière suivante :

1° La frontière de $\Delta(\alpha)$ est défini par les segments

$$t = (2K + 1)\pi \qquad (K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$
$$-\alpha \leqq \sigma \leqq 0 \qquad (\alpha > 0)$$

et par la courbe

$$\sigma = -\alpha \sin^2 \frac{t}{2}. \tag{1}$$

2° $\Delta(\alpha)$ contient les points s réels positifs.

Considérons la transformation

$$z = s - \log(1 + e^{-s}) + \log 2 = \varphi(s), \tag{2}$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 1884-1887.

s variant dans $\Delta(\alpha)$, la détermination de $\log(1+e^{-s})$ étant choisie réelle pour s réel; z est alors parfaitement déterminé pour les points intérieurs de $\Delta(\alpha)$ par continuité. Démontrons que quel que soit $\lambda (0 < \lambda < \frac{1}{2})$, il existe un $\alpha > 0$ tel que lorsque s varie dans $\Delta(\alpha)$, z défini par (2) varie dans $D(\lambda)$.

Posons

$$x_1(t_1) = -\alpha \sin^2 \frac{t_1}{2} - \log\left|1 + e^{\alpha \sin^2 \frac{t_1}{2} - it_1}\right| + \log 2 = \mathcal{R}\varphi(s_1),$$

$s_1 = \sigma_1 + it_1$ variant sur la courbe (1).

Quel que soit λ' tel que $\lambda \leqq \lambda' < \frac{1}{2}$ on peut évidemment trouver un α assez petit ($\alpha > 0$) tel que

$$\left|1 + e^{\alpha \sin^2 \frac{t_1}{2} - it_1}\right| \leqq 4\left(1 - 2\lambda' \sin^2 \frac{t_1}{2}\right),$$

d'où il vient

$$\log\left|1 + e^{\alpha \sin^2 \frac{t_1}{2} - it_1}\right| \leqq \log 2 - \lambda' \sin^2 \frac{t_1}{2}.$$

Il suffit donc que $\alpha(> 0)$ soit assez petit pour que

$$(3) \qquad x_1(t_1) \geqq \lambda \sin^2 \frac{t_1}{2}.$$

Comme d'autre part

$$\left|\operatorname{Arg}\left(1 + e^{\alpha \sin^2 \frac{t_1}{2} - it_1}\right)\right| \leqq \left|t_1 - \left[\frac{t_1}{2\pi}\right] 2\pi\right|,$$

on a, en posant $y_1 = y_1(t_1) = \mathcal{J}\varphi(s_1)$,

$$\left|y_1 - \left[\frac{y_1}{2\pi}\right] 2\pi\right| \leqq 2\left|t_1 - \left[\frac{t_1}{2\pi}\right] 2\pi\right|$$

et

$$\sin^2 \frac{t_1}{2} = \sin^2\left(\frac{t - \left[\frac{t}{2\pi}\right] 2\pi}{2}\right) \geqq \sin^2\left(\frac{y_1 - \left[\frac{y_1}{2\pi}\right] 2\pi}{4}\right).$$

D'après (3) on a

$$x_1 \geqq \lambda \sin^2\left(\frac{y_1 - \left[\frac{y_1}{2\pi}\right] 2\pi}{4}\right).$$

Le point x_1, y_1 est donc dans $D(\lambda)$ fermé, si $\alpha(> 0)$ est assez petit. On se rend alors facilement compte que **tous** les points de $\Delta(\alpha)$ sont tels que les points z correspondants sont dans $\mathbf{D}(\lambda)$.

Faisons maintenant la remarque suivante :

Posons

$$\mathrm{T}_n^m = \frac{\lambda_n(\lambda_n - 1)\ldots(\lambda_n - m + 1)}{m!},$$

où

$$\lambda_n > \lambda_{n-1} > 0, \qquad \lim \lambda_n = \infty$$

on a, d'une part,

$$(4) \qquad |\mathrm{T}_n^m| < \mathrm{T}_n^{\mathrm{E}\frac{\lambda_n - 1}{2}} < \mathrm{C}_{\mathrm{E}\lambda_n + 1}^{\mathrm{E}\frac{\lambda_n + 1}{2}}$$

($\mathrm{E}x$ étant le plus grand entier inférieur à x) et, d'autre part, pour n donné

$$(5) \qquad \mathbf{Max}\,|\mathrm{T}_n^m| > \mathrm{C}_{\lambda_n}^{\mathrm{E}\frac{\mathrm{E}\lambda_n + 1}{2}},$$

donc d'après la formule de Stirling

$$(6) \qquad \mathbf{Max}\,|\mathrm{T}_n^m| > \mathrm{C}\frac{2^{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad (\mathrm{C} > 0).$$

Dans les formules précédentes C_k^r est le $(r + 1)^{\text{ième}}$ coefficient de $(1 + x)^k$. On vérifie ces inégalités en remarquant que pour n fixe T_n^m croît lorsque $m < \frac{\lambda_n + 1}{2}$ et décroît à partir de $m > \mathrm{E}\frac{\lambda_n + 1}{2}$.

3. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Soit

$$f(z) = \Sigma\, a_n\, e^{-\lambda_n z} \qquad (\lambda_n > \lambda_{n-1} > 0,\ \lambda_n \to \infty)$$

une série de Dirichlet possédant un axe de convergence absolue et telle qu'aucune différence

$$\lambda_n - \lambda_m \qquad (n \neq m)$$

n'est un entier. Supposons en plus qu'il existe un $\lambda\,(0 < \lambda < \frac{1}{2})$ *tel que dans* $\mathrm{D}(\lambda)$ *ouvert* $f(z)$ *est holomorphe et*

$$|f(z)| < \mathrm{M} < +\infty.$$

Dans ces conditions les $|a_n|$ *sont bornés.*

Démonstration. — Considérons dans $\Delta(\alpha)$ (ouvert), où α est choisi conformément au n° 1, la fonction

$$F(s) = f[s - \log(1 + e^{-s}) + \log 2) = \Sigma\, a_n\, e^{-\lambda_n (s - \log(1 + e^{-s}) + \log 2)}.$$

Comme la détermination de $\log(1 + e^{-s})$ est la même que dans (2) on a

$$F(s) = \sum \alpha_n\, e^{-\lambda_n s} \left(\frac{1 + e^{-s}}{2}\right)^{\lambda n},$$

où

$$\left(\frac{1 + e^{-s}}{2}\right)^{\lambda_n} = \frac{1}{2^{\lambda_n}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} T_n^m\, e^{-ms}\right).$$

On a

$$F(s) = \Sigma\, b_r\, e^{-\mu_r s}, \tag{7}$$

où

$$\mu_r = \lambda_n + m, \qquad \mu_{r+1} > \mu_r, \tag{8}$$

$$b_r = \frac{a_n}{2^{\lambda_n}} T_n^m. \tag{8^b}$$

Il est en effet évident que deux μ_r (correspondant à deux couples différents n, m) sont différents : si l'on avait

$$\lambda_{n_1} + m_1 = \lambda_{n_2} + m_2 \qquad (n_1 \neq n_2),$$

on aurait

$$\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2} = m - m_1,$$

ce qui est impossible d'après nos hypothèses. On peut donc ranger les μ_r dans l'ordre croissant.

On a d'après (4) pou σ assez grand :

$$\sum |b_r|\, e^{-\mu_r \sigma} < \left(\sum_1^{\infty} \frac{|a_n|}{2^{\lambda_n}} e^{-\lambda_n \sigma}\, C_{E\lambda_n + 1}^{E\frac{\lambda_n + 1}{2}}\right)$$
$$\times \left(\sum_0^{\infty} e^{-m\sigma}\right) < \frac{D}{1 - e^{-\sigma}} \sum e^{-\lambda_n \sigma} \frac{|a_n|}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

La série $\Sigma b_r e^{-\mu_r s}$ possède donc un axe de convergence absolue.

Évaluons maintenant les b_r. D'après les hypothèses du théorème et d'après ce que nous avons dit dans le n° 2 on voit que dans $\Delta(\alpha)$ on a

$$|F(s)| < M, \tag{9}$$

la fonction $F(s)$ étant holomorphe dans $\Delta(\alpha)$.

En désignant par σ_A l'axe de convergence absolue de $F(s)$, on sait que

$$b_r = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} F(s)\, e^{\mu_r s}\, ds \qquad (\sigma = \sigma_1 + it,\ \sigma_1 > \sigma_A).$$

Désignons, alors, par C_n la courbe obtenue, en ajoutant à la courbe

$$\sigma = -\alpha \sin^2 \frac{t}{2} + \frac{1}{\mu_n}$$

les segments

$$t = k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots;),\ 0 \geqq \sigma \geqq -\alpha + \frac{1}{\mu_n}$$

parcourus dans les deux sens.

En appliquant le théorème de Cauchy on voit immédiatement que

$$b_r = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int F(s)\, e^{\mu_r s}\, ds,$$

s restant sur la partie de C_n correspondant aux valeurs de t variant entre t_0 et T.

Il résulte donc de (7) que

$$\begin{aligned} |b_r| &< M_1 \int_0^{\pi} e^{-\alpha \mu_r \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt + N \int_{-\alpha}^{0} e^{\mu_r \sigma}\, d\sigma \\ &= M_1 \int_0^{\pi} e^{-\alpha \mu_r \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt + N \left(\frac{1 - e^{-\mu_r \alpha}}{\mu_r} \right), \end{aligned}$$

où M_1 et N sont des constantes.

Considérons une suite η_r définie de la manière suivante :

$$(10) \qquad \frac{1}{\mu_r} < \alpha \sin^2 \frac{\eta_r}{2} < \frac{2}{\mu_r}$$

et écrivons

$$\int_0^{\pi} e^{-\alpha \mu_r \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{\eta_r} e^{-\alpha \mu_r \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt + \int_{\eta_r}^{\pi} e^{-\alpha \mu_r \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = A_r + B_r.$$

On a

$$A_r < \eta_r,$$

$$B_r = \int_{\eta_r}^{\pi} \frac{1}{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} e^{-\mu_r \alpha \sin^2 \frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\, dt < \frac{2}{\alpha \mu_r \sin \eta_r} e^{-\alpha \mu_r \sin^2 \frac{\eta_r}{2}}$$

et d'après (10)

$$B_r < \frac{1}{\sqrt{\mu_r}}.$$

Il résulte de la même formule (10) que

$$\eta_r < \frac{P}{\sqrt{\mu_r}},$$

où P est une constante. On voit donc que

$$(11) \qquad |b_r| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_r}}\right).$$

Posons maintenant

$$\mu_{r_n} = \lambda_n + E\,\frac{\lambda_n - 1}{2}.$$

On a, d'après (6) et (8^b),

$$|b_{r_n}| > K\,\frac{|a_n|}{\sqrt{\mu_{r_n}}}.$$

On a en définitive, d'après (11),

$$|a_n| = O(1).$$

Notre théorème est ainsi démontré.

4. Si aux conditions du théorème précédent on ajoute la suivante :

Il existe une constante c telle que

$$|f(z) - c| < \delta(\varepsilon),$$

lorsque

$$|z - 2k\pi i| < \varepsilon \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

avec

$$\lim \delta(\varepsilon) = \lim \varepsilon = 0,$$

alors on peut affirmer que $a_n \to 0$.

Démonstration. — Considérons un domaine $D(\lambda')$ avec $\frac{1}{2} > \lambda' > \lambda$ et *un* $\Delta(\alpha')$ correspondant. Dans $\Delta(\alpha')$ la fonction $F(s)$ jouit de la propriété suivante : cette fonction est holomorphe et bornée dans $\Delta(\alpha')$ *fermé* sauf aux points $s = 2k\pi i$ où la propriété suivante a lieu :

Lorsque, s variant dans $\Delta(\alpha')$ fermé, on a

$$|s - 2k\pi i| < \varepsilon,$$

alors

$$|F(s) - c| < \delta_1(\varepsilon),$$

avec

$$\lim \delta_1(\varepsilon) = \lim \varepsilon = 0.$$

Pour évaluer les b_r intégrons maintenant sur le contour même de $\Delta(\alpha')$.

Soit γ_n une suite positive telle que :

$$\gamma_n \to \infty, \qquad \frac{\gamma_n}{\mu_n} \to 0$$

et posons

$$\delta_1\left(4\sqrt{\frac{\gamma_n}{\alpha'\mu_n}}\right) = M'_n.$$

Posons alors

$$0 < \rho_n < \min\left(\frac{M'^{\tau}_n}{M'_n}, \gamma_n\right) \qquad (0 < \tau < 1),$$

$$\rho_n \to \infty,$$

on a évidemment

$$M'_n \sqrt{\rho_n} \to 0$$

et en posant

$$M_n = \delta_1\left(4\sqrt{\frac{\rho_n}{\alpha'\mu_n}}\right),$$

on a, à plus forte raison,

$$M_n \sqrt{\rho_n} \to 0.$$

Soit $\rho'_n < \rho_n$, $\lim \rho'_n = \infty$ et considérons la suite π_n telle que

$$\frac{\rho'_n}{\mu_n} < \alpha' \sin^2 \frac{\pi_n}{2} < \frac{\rho_n}{\mu_n}.$$

On a pour n assez grand

$$\frac{2}{\sin \pi_n} < 2\sqrt{\frac{\alpha'\mu_n}{\rho'_n}},$$

$$\pi_n < 4\sqrt{\frac{\rho_n}{\alpha'\mu_n}}.$$

C'_n étant la partie de la frontière de $\Delta(\alpha')$ correspondant à t variant en t_0 et T on a

$$b_r = \lim \frac{1}{T}\int_{C'_n} F(s)\, e^{\mu_r s}\, ds.$$

Comme dans le théorème précédent on est amené à l'inégalité suivante :

$$|b_r| < A'_r + B'_r,$$

où

$$A'_r < C_1 M'_r \int_0^{\pi_n} e^{-\alpha\mu_r \sin^2 \frac{t}{2}} dt,$$

$$B'_r < \frac{C_2}{\mu_r \sin \pi_r},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, et où M'_r est le maximum de $|F(s)|$ lorsque s varie sur les parties de la frontière de $\Delta(\alpha')$ correspondant aux points s tels que

$$|s - 2k\pi i| < \sqrt{\frac{\rho_n}{\alpha' \mu_r}}.$$

D'après ce qui précède on voit donc que

$$A'_r < \pi_r \delta_1 \left(4\sqrt{\frac{\rho_r}{\alpha' \mu_r}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_r}}\right),$$

$$B'_r < \frac{C_3}{\rho'_r \sqrt{\mu_r}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_r}}\right),$$

la suite du raisonnement est la même que pour le théorème précédent.

5. Nous pouvons maintenant passer aux séries de Dirichlet $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ où les λ_n possèdent la propriété précisée au n° 1.

Nous démontrons le théorème suivant :

Soit $f(z) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$ *une série de Dirichlet, telle que* $\lambda_{n+1} > \lambda_n > 0$, $\lim \lambda_n = \infty$, *possédant un axe de convergence absolue, et telle qu'aucune combinaison*

$$A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + \ldots + A_m \lambda_m,$$

où les A_i *sont entiers, non tous nuls, n'est un nombre entier.*

Si $f(z)$ *est holomorphe dans* $D(\lambda)$ $(0 < \lambda < \frac{1}{2})$ *et s'il existe deux quantités : a (complexe) et* $\delta > 0$ *telles qu'on a dans* $D(\lambda)$

$$|f(z) - a| > \delta > 0 \qquad (0 < \delta < |a| < +\infty),$$

alors

$$|a_n| < |a| - \delta.$$

Démonstration. — Posons

$$\varphi(z) = \frac{1}{a - f(z)} = \frac{1}{a - \Sigma a_n e^{-\lambda_n z}}.$$

(La dernière partie de l'inégalité a lieu pour $Rz > x_c =$ axe de convergence de $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$.)

La fonction $\varphi(z)$ est holomorphe et bornée dans $D(\lambda)$.

Comme $\lambda_1 > 0$, on a pour $x = R(z)$ assez grand

$$\Sigma \mid a_n \mid e^{-\lambda_n x} < \mid a \mid.$$

On peut donc affirmer que la série

$$\sum_m \left(\frac{\sum_n \mid a_n \mid e^{-\lambda_n x}}{\mid a \mid} \right)^m$$

converge pour x assez grand.

On a, d'autre part :

$$(\Sigma a_n e^{-\lambda_n z})^m = \Sigma c_k e^{-l_k z},$$

avec

$$l_k = k_1 \lambda_1 + \ldots + k_p \lambda_p \qquad (k_i > 0 \text{ entier}),$$

$$\sum_1^p k_i = m,$$

$$c_k = a_1^{k_1} \ldots a_p^{k_p}.$$

On voit de même que la différence entre deux l_k n'est pas un entier. Ceci résulte de l'hypothèse sur les λ_n.

En rangeant tous les l_k (correspondant à tous les m) dans l'ordre de croissance, et en désignant par $L_\mu (\mu = 1, 2 \ldots)$ la suite ainsi obtenue, on voit d'après ce qui précède que pour x assez grand $\varphi(z)$ peut être mise sous la forme suivante :

$$\varphi(z) = \frac{1}{a - \Sigma a_n e^{-\lambda_n z}} = \frac{1}{a} \sum_m \left(\frac{\sum_n a_n e^{-\lambda_n z}}{a} \right)^m = \sum_\mu d_\mu e^{-L_\mu z},$$

où les L_μ sont tels que

$$L_{\mu+1} > L_\mu > 0, \qquad \lim L_\mu = \infty \qquad (L_n - L_m \neq \text{entier}, \ n \neq m).$$

La série

$$\varphi(z) = \Sigma\, d_\mu\, e^{-L_\mu z}$$

possède un axe de convergence absolue et, dans $D(\lambda)$, $\varphi(z)$ est bornée.

Il résulte donc, d'après le théorème du n° 3, que

$$|d_n| < P < +\infty.$$

Or les d_m sont tous de la forme

$$d_n = \frac{c_k}{a^{m+1}} = \frac{a_1^{k_1}\ldots a_p^{k_p}}{a^{m+1}}, \qquad \sum_1^p k_i = m.$$

On a donc

$$\left|a_1^{k_1}\ldots a_p^{k_p}\right| < |a|^{m+1}\,P.$$

En particulier,

$$|a_i|^m < P\,|a|\,|a|^m.$$

Donc

$$|a_i| < (P\,|a|)^{\frac{1}{m}}\,|a|$$

et ceci quels que soient i et m.

Il en résulte immédiatement

$$|a_i| \leqq |a|.$$

D'après les hypothèses du théorème on a aussi

$$|f(z) - (|a| - \beta\delta)\,e^{i\varphi}| < (1-\beta)\delta,$$

où $0 < \beta < 1$ et où $a = |a|\,e^{i\varphi}$.

Le raisonnement précédent fournit donc

$$|a_i| < |a| - \beta\delta,$$

d'où, en définitive,

$$|a_i| \leqq |a| - \delta.$$

Il résulte du théorème précédent le fait suivant :

Si $f(z) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$ représente une fonction holomorphe dans $D(\lambda)$ *et si aucune combinaison*

$$A_1\,\lambda_1 + \ldots + A_p\,\lambda_p$$

n'est un entier, l'ensemble des valeurs $Z = f(z)$ que prend $f(z)$ lorsque z varie dans $D(\lambda)$ est partout dense dans le cercle de *rayon*

$$R = \text{borne sup. des} \mid a_n \mid \qquad (n = 1, 2 \ldots,)$$

autour de l'origine.

Si les $| a_n |$ *ne sont pas bornés on posera* $R = +\infty$.

6. On peut aussi démontrer le théorème suivant (en partant des considérations du n° 4). Si en plus des propriétés précisées dans le numéro précédent on sait qu'il existe une constante c telle que dans $D(\lambda)$ on ait

$$|f(z) - c| > A > 0 \qquad (|c| > 0),$$

$f(z)$ étant holomorphe dans $D(\lambda)$ fermé sauf au plus aux points $2k\pi i$, où la propriété suivante a lieu :

$$|f(z)| > M(\varepsilon).$$

lorsque $|z - 2k\pi i| < \varepsilon$

$$\lim \frac{1}{M(\varepsilon)} = \lim \varepsilon = 0,$$

alors :

$$\lim \frac{\Pi a_i^{k_i}}{c^{\Sigma k_i}},$$

lorsque

$$\Sigma k_i \to \infty.$$

7. Dans une Note récente [1] j'ai énoncé entre autre les théorèmes suivants :

Si $f(z) = \Sigma a_n z^{\lambda_n}$ *est une série de Taylor de rayon de convergence égal à un et telle que*

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \lambda > 1,$$

alors du fait que

(A) $$|f(z)| < M,$$

lorsque

$$|z - 1| < \delta, \qquad |z| < 1,$$

résulte que

$$|a_n| < M.$$

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 824-827.

Si, en plus

$$(\mathrm{B}) \qquad |f(z)| < \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{2+\gamma}},$$

dans

$$|z-1| < \delta, \qquad |z| < 1.$$

alors

$$\Sigma\, |a_n| < \infty.$$

Or M. Zygmund [1] a fait remarquer que déjà de l'hypothèse (A) résulte la convergence de $\Sigma\, |a_n|$. Ce résultat résulte effectivement de ses recherches sur les séries trigonométriques [2].

Remarquons pourtant que nos résultats sont bien plus précis que ceux que j'ai mis en italique dans la Note citée.

Les démonstrations dont j'ai donné les grandes lignes dans la Note supposent seulement que les propriétés (A) et (B) (ainsi que les autres correspondant aux autres théorèmes de ma Note) ont lieu dans un domaine dont la frontière est *tangente* à $|z| = 1$ au point $z = 1$ et qui se trouve à l'intérieur de $|z| = 1$. Il suffit, par exemple, que les propriétés précédentes aient lieu dans le domaine

$$|z-1| < \delta, \qquad |z-\gamma| < 1-\gamma,$$

avec γ positif assez petit.

---

(1) *Zentralblatt f. Math.*, Band 4, Heft 2, p. 59.
(2) *Studia Math.*, t. III, p. 78.