BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGE D. BIRKHOFF

Sur quelques courbes fermées remarquables

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR QUELQUES COURBES FERMÉES REMARQUABLES;

PAR M. GEORGE D. BIRKHOFF.

Introduction.

Selon Poincaré [1], toute transformation T biunivoque, directe et continue de la circonférence d'un cercle en lui-même

$$T; \qquad \theta_1 = f(\theta) \qquad (\theta, \text{ coordonnée angulaire}),$$

est caractérisée par un coefficient unique de rotation τ, tel que tout point θ du cercle est transformé en θ_n par T^n [2] où

$$n\tau - 2\pi < \theta_n - \theta < n\tau + 2\pi.$$

Donc τ peut être regardé comme l'accroissement moyen de la variable θ qui résulte de la transformation T; quand $\frac{\tau}{2\pi}$ est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, il existe toujours au moins un point du cercle dont la coordonnée angulaire s'accroît précisément de $2p\pi$ après q itérations de T. Évidemment la valeur de τ ne dépend pas de la variable angulaire particulière choisie.

Considérons maintenant dans le plan une courbe de Jordan J, fermée, sans point double. Supposons de plus qu'il existe une transformation T, biunivoque, directe et continue du voisinage

(1) *Sur les courbes définies par des équations différentielles* (*Jour. de Math.*, 4e série, 1885, p. 228).

(2) T^n désigne la $n^{\text{ième}}$ transformation itérée de T.

annulaire de J et que cette transformation laisse invariante la courbe J, c'est-à-dire que $T(J) \equiv J$. Naturellement T laisse invariante la région extérieure ouverte S_e, aussi bien que la région intérieure ouverte S_i. Mais, par définition même, J est l'image biunivoque, directe et continue de la circonférence d'un cercle. Par conséquent la transformation T donne lieu à un coefficient de rotation τ, qui indique l'accroissement moyen d'une variable angulaire quelconque sur la courbe de Jordan J, produit par la transformation T.

Passons maintenant à une courbe fermée C, du type suivant beaucoup plus général; l'ensemble fermé C divise le plan en deux régions ouvertes simplement connexes, S_e et S_i, dont S_e contient le « point à l'infini », de sorte que tout point de C appartient ou à la frontière de S_i, ou à celle de S_e, ou à toutes les deux. Supposons donc qu'il existe une transformation T, biunivoque, directe et continue du voisinage annulaire de C, dont C est une courbe invariante, c'est-à-dire $T(C) \equiv C$, et par conséquent S_i et S_e sont des régions invariantes. Que peut-on dire dans ce cas?

Pour éclaircir cette question, il convient de considérer séparément les points P extérieurement (intérieurement) accessibles, c'est-à-dire les points P qui sont les extrémités d'un arc de Jordan extérieur (intérieur). Il est tout à fait évident que de tels points accessibles restent accessibles du même côté après la transformation T, et que leur ordre cyclique n'est pas modifié par cette transformation. Le raisonnement de Poincaré nous montre alors qu'il existe un coefficient de rotation τ_e, associé avec les points accessibles extérieurs et, de même, un coefficient de rotation τ_i, associé avec les points accessibles intérieurs.

En effet [1], supposons que la région extérieure S_e soit transformée en la région extérieure à un cercle par une transformation conforme. Selon les résultats bien connus de Carathéodory [2], le voisinage de tout point (extérieurement) accessible

---

[1] Le raisonnement de ce paragraphe est au fond superflu, parce que le raisonnement de Poincaré s'applique sans modification à l'ensemble des points accessibles. Néanmoins il peut être utile de ramener la question à la forme considérée par Poincaré, comme nous le faisons ici.

[2] *Voir*, par exemple, Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionen Theorie*, t. 2, Chap. I.

sera alors transformé en le voisinage d'un point correspondant de la circonférence de façon que l'ordre cyclique des points accessibles et de leurs images soit le même [1], et ces images seront partout denses sur la circonférence. Il s'ensuit que la transformation T donne lieu à une transformation T^* biunivoque, directe et continue du cercle en lui-même, parce qu'on peut étendre la définition de T^* à tout le cercle par continuité.

Cette transformation T^* du cercle en lui-même possède donc un coefficient de rotation τ_e. De la même manière nous définissons un coefficient de rotation τ_i, par rapport à la région intérieure S_i.

Évidemment la propriété capitale de ces deux coefficients de rotation τ_e et τ_i est la suivante : Par la transformation T^n (n quelconque), tout point de C accessible d'un des deux côtés se trouve transformé en un point accessible du même côté, avec un nombre de rotations complètes compris entre

$$\frac{n\tau}{2\pi} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{n\tau}{2\pi} + 1$$

où τ indique τ_e ou τ_i, selon le côté considéré.

Cette propriété nous montre que les coefficients τ_e et τ_i sont intrinsèquement attachés à la courbe C et à la transformation associée T, et ne sont changés par aucune déformation biunivoque et continue du plan.

A première vue, on pourrait croire que les deux coefficients de rotation τ_e et τ_i doivent être égaux. *C'est notre but principal de montrer ici qu'il n'en est nullement ainsi, en construisant des courbes* C *avec des coefficients inégaux et de plus telles que tout point de* C *appartienne à la fois aux frontières des deux régions extérieure et intérieure.*

En admettant pour le moment ce résultat, nous pouvons en donner un autre énoncé peut-être plus frappant : *Il existe de telles courbes* C *et des transformations correspondantes* T, *telles que tous les points accessibles de l'extérieur sont avancés, par* T, *vers la gauche* (par exemple), *tandis que tous les points accessibles de l'intérieur sont avancés par* T *vers la droite.*

---

[1] Chaque point accessible doit être compté une fois pour chaque voisinage du point dans S_e.

C'est-à-dire que nous pouvons toujours trouver des entiers m et k, tels que

$$m\tau_e - 2k\pi > 0, \qquad m\tau_i - 2k\pi < 0.$$

En effet on peut toujours trouver un m suffisamment grand (positif si $\sigma_e > \sigma_i$ et négatif dans le cas contraire) pour que

$$m(\sigma_e - \sigma_i) > 2\pi,$$

et par conséquent un entier k tel que $2k\pi$ se trouve entre $m\sigma_i$ et $m\sigma_e$.

Considérons maintenant la transformation $\overline{T}$ définie de la manière suivante : $\overline{T}$ est le produit de la transformation itérée T^m et d'une transformation de rotation d'un angle $-2k\pi$ autour d'un point situé à l'intérieur de S_i. Évidemment cette transformation $\overline{T}$ est du même type général que T et, de plus, elle aura pour coefficients de rotation

$$\bar{\tau}_e = m\tau_e - 2k\pi > 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{\tau}_i = m\tau_i - 2k\pi < 0,$$

d'où la propriété désirée.

2. Définition de certaines transformations auxiliaires A. — Pour construire une telle courbe C nous devrons employer certaines transformations auxiliaires A, définies de la manière suivante : A est une transformation biunivoque, directe, analytique et conservative [1] d'une couronne en elle-même qui fait tourner toute direction radiale vers sa gauche, sauf peut-être sur les deux bords circulaires [2].

Un exemple très simple d'une telle transformation est le suivant :

$$(\mathrm{U}) \qquad r_1 = r, \qquad \theta_1 = \theta + \lambda - cr^2 \qquad (c > 0).$$

Ici r, θ sont des coordonnées polaires. La couronne peut être une région quelconque $0 \leqq a \leqq r \leqq b$. Par cette transformation, toute

---

[1] C'est-à-dire T conserve les aires.

[2] Plus précisément, l'angle entre la direction transformée et la direction radiale au point transformé peut être regardé comme une fonction analytique positive ψ avec $0 \leqq \psi < \frac{\pi}{2}$ sur les deux bords circulaires.

ligne radiale $\theta = \alpha$ est transformée en la courbe $\theta = \alpha + \lambda + cr^2$ dont la direction de la tangente est à gauche de la direction radiale. En effet l'angle ψ entre la direction radiale et la direction de la courbe est arc tang $2cr^2$.

Remarquons aussi qu'on peut obtenir sans difficulté d'autres transformations du même type. Par exemple, soit B une transformation biunivoque, directe, analytique et conservative de la couronne en elle-même, mais ne satisfaisant à aucune autre condition. La transformation BU, pour $c > 0$ suffisamment grand, appartiendra encore à la classe de transformations auxiliaires A.

3. **Les courbes invariantes de** A. — Dans ce qui suit, nous aurons besoin de quelques propriétés des courbes invariantes d'une telle transformation auxiliaire A, courbes qui divisent la couronne en deux autres. J'ai étudié autrefois ces courbes qui sont d'une haute importance pour la Dynamique théorique (1), et je répéterais ici la suite des idées jusqu'au point nécessaire (2).

Soit Γ une courbe invariante quelconque de cette espèce qui ne coïncide pas avec un des deux bords circulaires de la couronne. Je dis qu'*une telle courbe invariante* Γ *sera rencontrée une fois seulement par tout rayon, de façon que son équation puisse s'écrire*

$$r = f(\theta),$$

où f est continue et périodique de période 2π en θ.

Évidemment Γ est une courbe fermée de Jordan de type simple (3).

Remarquons en premier lieu que la forme explicite de l'équation résulte immédiatement de la propriété géométrique énoncée. En effet la fonction $f(\theta)$ qui intervient est bien définie et périodique, de période 2π, en raison de cette propriété. De plus cette

---

(1) *Surface Transformations and Their Dynamical Applications* (*Acta math.*, t. 43, 1922, section 44).

(2) Le présent article joint à un autre, *Sur l'existence de régions annulaires d'instabilité dans la Dynamique,* qui vient de paraître dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré,* ont été écrits de façon à les rendre indépendants de mon long Mémoire des *Acta.*

(3) En suivant un peu plus loin la suite d'idées, on démontre que Γ est même rectifiable. *Voir* mon article des *Acta.*

fonction doit être continue pour toute valeur θ_0 de θ; autrement nous pourrions trouver une suite $\theta_1, \theta_2, \ldots$, avec $\lim \theta_n = \theta_0$ telle que

$$\lim_{n=\infty} f(\theta_n) = g \neq f(\theta_0).$$

Mais alors le point (θ_0, g) appartiendrait à Γ qui est un ensemble fermé de points. Cette conclusion contredirait notre hypothèse que la propriété géométrique est vérifiée, parce que la ligne radiale $\theta = \theta_0$ rencontrerait Γ au moins deux fois.

Faisons une autre remarque préliminaire. Définissons Γ_i comme le côté intérieur de Γ, c'est-à-dire l'ensemble des points limites de la région intérieure. Selon notre définition cet ensemble est lui-même une courbe fermée; sa région intérieure coïncide avec S_i tandis que sa région extérieure contient non seulement les points de la région extérieure S_e, de Γ, mais aussi les points de Γ qui n'appartiennent pas à Γ_i. Nous définissons le côté extérieur Γ_e de Γ d'une manière analogue. Si l'on pouvait démontrer la propriété géométrique pour les courbes Γ_i et Γ_e, on voit tout de suite que ces deux courbes devraient coïncider et que $\Gamma = \Gamma_i = \Gamma_e$ posséderait la même propriété géométrique. Il suffit donc de démontrer la propriété géométrique pour les courbes Γ_i et Γ_e.

Dans notre démonstration, il nous convient de regarder θ et r comme les coordonnées rectangulaires du plan, avec l'axe des θ dirigé vers la gauche. La couronne $a \leqq r \leqq b$ sera ainsi représentée par la bande horizontale entre $r = a$ et $r = b$, et la courbe Γ_i sera représentée par une courbe périodique ouverte qui s'étend indéfiniment à droite et à gauche dans cette bande.

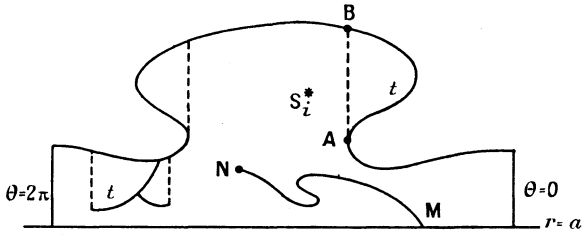
Faisons maintenant l'hypothèse que la propriété géométrique n'est pas vraie pour la courbe Γ_i dans un cas quelconque. Considérons la région des points accessibles de $r = a$ le long d'une ligne verticale $\theta = \text{const.}$ du plan r, θ sans rencontrer la courbe invariante Γ_i (*voir* la figure 1). Cette région ouverte S_i^* ou bien coïncide avec S_i ou n'est qu'une partie de S_i. La frontière de S_i^* est une courbe fermée qui est composée des points de Γ_i et des segments ouverts des lignes $\theta = \text{const.}$ situés à l'intérieur de S_i.

Supposons en premier lieu que S_i^* et S_i coïncident. Dans ce cas, l'ordre cyclique des points de Γ_i est évidemment celui dans lequel la coordonnée θ croît ou au moins ne diminue pas, et l'angle que

toute corde AB de la courbe (entre deux points accessibles A, B, $A \neq B$, A précédant B) fait avec l'axe des θ peut être considéré comme compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

D'après notre hypothèse il existe alors au moins une ligne $\theta = \theta_0$ qui rencontre Γ_i en deux points (α, θ_0), (β, θ_0), $(\alpha < \beta)$. Mais, par définition de $S_i^* = S_i$, si le point (ρ, θ_0) appartient à S_i^*, tout point $(\bar{\rho}, \theta)$ avec $\bar{\rho} < \rho$ lui appartient aussi. De plus, tous les points

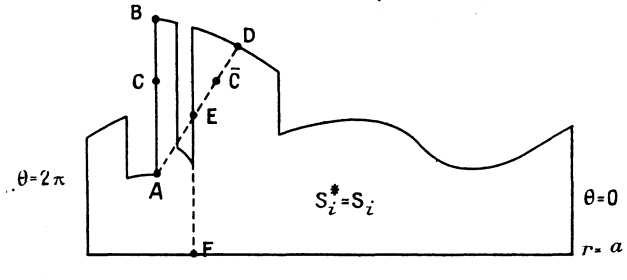
Fig. 1.



sur le segment qui joint (α, θ_0) à (β, θ_0) appartiennent ou à $S_i^* = S_i$ ou à son bord. Évidemment un tel point ne peut pas appartenir à S_i^*. Par conséquent la ligne $\theta = \theta_0$ rencontre Γ_i en un seul segment AB.

Soient C un point à l'intérieur de AB, et $\bar{C}$ un point dans le voisinage immédiat de C, qui appartient à $S_i^* = S_i$. En supposant pour le moment qu'un tel point $\bar{C}$ se trouve à la droite de AB, on voit

Fig. 2.



(*fig.* 2) que la corde DE intérieure à Γ_i, obtenue en prolongeant la ligne $A\bar{C}$ de $\bar{C}$ jusqu'aux premiers points D, E de Γ_i, aura une tangente presque parallèle à l'axe négatif des r. En ce cas la transformation T transformera ce segment en une courbe D_1E_1 où E_1

suit D_1 sur Γ_i, dont la direction de tangente fait partout avec l'axe des θ un angle qui est *plus grand* que $\frac{3\pi}{2}$; nous nous souvenons du fait que T doit faire tourner toute direction verticale vers sa gauche dans le plan des coordonnées rectangulaires r, θ.

Mais cette situation n'est pas possible. En effet, la ligne brisée FED, composée du segment vertical FE avec F sur $r = a$ et ED, sera transformée par T en $F_1E_1D_1$ où F_1E_1 et E_1D_1 sont des courbes analytiques dont les tangentes font des angles partout plus grands que $\frac{\pi}{2}$ (*voir* la figure 2). Il saute donc aux yeux que, dans ces circonstances, E_1 ne peut pas suivre D_1 sur Γ_i.

Remarquons que le raisonnement ci-dessus suppose que toute ligne DE presque verticale doit être déviée par T à droite de la direction verticale. L'uniformité ainsi supposée s'obtient évidemment si toutes les directions verticales sont déviées dans le même sens par T (et donc par T^{-1}). Mais, d'après les conditions imposées, cela ne doit pas être vrai pour les directions verticales sur les bords $r = a$ et $r = b$. Pour éviter cette difficulté, il suffit d'employer en un tel cas des courbes convenables avec des directions verticales sur $r = a$ et $r = b$ au lieu d'une ligne droite telle que $A\overline{C}$.

De la même manière, en employant T^{-1} au lieu de T, on déduit qu'un tel point $\overline{C}$ ne peut pas exister dans le voisinage immédiat de C à gauche de AB.

Par conséquent, le point C ne peut pas être un point limite de la région intérieure ouverte S_i, ce qui serait absurde.

Nous devons donc supposer que S_i^* forme seulement une partie de S_i. Il doit alors exister des segments AB de la frontière S_i^* avec des points intérieurs C qui sont des points intérieurs de S_i (*voir* la figure 1).

Considérons maintenant la partie $\bar{S}_i$ de S_i accessible de $r = 0$ le long d'une courbe régulière simple (telle que MN dans la figure 1) dont l'angle de la tangente avec l'axe des θ est toujours au moins $\frac{\pi}{2}$. Cette partie de S_i inclut évidemment S_1^*, mais ne peut coïncider avec S_i^* que s'il n'existe pas de segments de la frontière de S_i^* du type AB avec une partie comprise entre AB et la courbe à droite de AB (*voir* les régions t de la figure 1).

Par la transformation T qui fait croître l'angle de toute tangente égal à $\frac{\pi}{2}$ et ne ramène à $\frac{\pi}{2}$ aucun angle plus grand que $\frac{\pi}{2}$, les points de $\overline{S}_i$ sont transformés en point de $\overline{S}_i$ qui sont accessibles de la même manière. En effet, l'image d'une courbe auxiliaire MN qui rend accessible le point N est elle-même une courbe auxiliaire admissible $M_1 N_1$ qui rend N_1 accessible. Donc, l'image de $\overline{S}_i$ par T doit coïncider avec $\overline{S}_i$; elle ne peut pas en être seulement une partie parce que T est conservative (1). Mais les points inaccessibles de cette manière qui sont un peu à droite d'un tel segment AB (s'il existe) doivent aussi être transformés en des points accessibles. Il en résulte qu'un tel segment n'existe pas.

De la même façon, en employant la transformation inverse T^{-1}, on conclut qu'il n'existe pas non plus un segment AB avec une partie de S_i à sa gauche.

Par conséquent, il n'existe aucun segment AB. Nous arrivons en conclusion au résultat énoncé.

4. Les coefficients de rotation. — Nous allons maintenant considérer les relations mutuelles des courbes Γ qui sont invariantes par une telle transformation T. Parmi ces courbes, se trouvent toujours les deux bords $r = a$ et $r = b$ de la couronne. Évidemment, chaque courbe invariante Γ possède un coefficient de rotation τ. Selon une propriété fondamentale des coefficients de rotation citée plus haut, toute courbe avec le coefficient de rotation de la forme $\frac{2p\pi}{q}$ (p, q entiers) contient au moins un point dont l'angle est augmenté de $2p\pi$ par la transformation T^q; un tel point est donc géométriquement invariant par T^q.

Si deux courbes Γ_1 et Γ_2 ont des points communs, leurs coefficients de rotation sont égaux et de forme $\frac{2p\pi}{q}$, de plus leurs points communs sont invariants par T_q (2).

Si Γ_1 et Γ_2 ont des points communs, il y a une ou plusieurs régions ouvertes simplement connexes entre Γ_1 et Γ_2. Par la transformation T, une telle région est transformée en une autre de la

(1) Nous faisons abstraction ici de l'ensemble de mesure o des points de S_i qui n'appartiennent pas à $T(S_i)$.

(2) *Voir* section 46 de mon article des *Acta* pour des résultats analogues.

même espèce. Mais ces régions obtenues en partant de l'une d'elles par l'itération indéfinie de T ne peuvent pas être toutes différentes, parce que l'aire totale est finie et la transformation T conservative. Donc, après q itérations, la région donnée se trouve encore dans la même position géométrique, et les deux arcs de Γ_1 et Γ_2 qui forment sa frontière sont transformés en eux-mêmes. Les extrémités de ces deux arcs sont donc géométriquement invariantes, d'où le résultat énoncé.

Si deux courbes Γ_1 et Γ_2 n'ont aucun point commun le coefficient de rotation de la courbe extérieure est plus grand que celui de la courbe intérieure.

Rappelons que la transformation T transforme une ligne $\theta =$ const. en une courbe dont l'angle de la tangente est partout plus grand que $\frac{\pi}{2}$ dans le plan des coordonnées rectangulaires r, θ. Donc, il est évident que la coordonnée θ_1 du point transformé sur la courbe extérieure Γ_1 sera supérieure d'au moins ε à la coordonnée du point transformé sur Γ_2, si l'on part de deux points sur le même rayon.

Ce fait nous montre que le coefficient de rotation de la courbe extérieure Γ_1 doit être au moins aussi grand que celui de Γ_2. En effet, deux points correspondants sont transformés successivement en des points tels que ceux de Γ_1 sont toujours plus avancés que ceux de Γ_2 d'au moins ε.

Il ne reste donc plus qu'à exclure l'égalité des deux coefficients de rotation.

Considérons en premier lieu le cas où ce coefficient est de la forme $\frac{2p\pi}{q}$.

Imaginons maintenant que nous faisons suivre T^q d'une rotation d'angle $-2p\pi$. Nous obtenons ainsi une transformation T^* de même type, dont Γ_1 et Γ_2 sont des courbes invariantes avec un coefficient de rotation nul. Il existe donc un point A_1 de Γ_1 et un point A_2 de Γ_2 qui sont invariants par T^*, et ces deux points ne peuvent pas avoir la même coordonnée θ en raison de la propriété géométrique de T^*.

Construisons un quadrilatère curviligne de la manière suivante : Deux des côtés sont les deux segments verticaux compris entre Γ_1

et Γ_2 qui contiennent respectivement A_1 et A_2; les deux autres côtés sont les arcs de Γ_1 et Γ_2 entre ces deux côtés verticaux. Considérons l'image de ce quadrilatère par T^*. Les sommets A_1 et A_2 sont invariants, mais les deux côtés $\theta =$ cont. sont transformés en deux courbes, dont l'angle des tangentes est partout plus grand que $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, les images de ces deux côtés se trouvent, l'une à droite de A_1, l'autre à gauche de A_2. Mais en ce cas, l'image du quadrilatère enfermerait à son intérieur ce quadrilatère lui-même ou bien serait incluse dans celui-ci, selon que A_2 est situé à droite ou à gauche de A_1. Puisque T^* est conservative, cela n'est pas possible.

Il reste donc à considérer le cas où le coefficient de rotation τ n'est pas de cette forme spéciale. Dans ce cas, nous pouvons trouver un entier q pour lequel

$$2p\pi - \frac{\varepsilon}{2} < q\tau < 2p\pi,$$

où p est entier et $\varepsilon > 0$ est la quantité ε signalée ci-dessus [1].

Tout point de Γ_2 doit alors être avancé par T^q d'un angle inférieur à $2p\pi$. En effet, il y a des points de Γ_2 qui sont avancés de moins de $2p\pi$ par T^q, puisque le coefficient de rotation de T^q est $q\tau < 2p\pi$. Donc, si un point était avancé de plus de $2p\pi$, on trouverait des points avancés exactement de $2p\pi$, ce qui est impossible pour $\tau \neq \frac{q}{2p\pi}$,

D'autre part, il y a des points de Γ_2 qui sont avancés d'au moins $2p\pi - \frac{\varepsilon}{2}$ par T^q, puisque le coefficient de rotation de T^q est $q\tau > 2p\pi - \frac{\varepsilon}{2}$. Les points correspondants de Γ_1 seront donc avancés d'au moins $2p\pi + \frac{\varepsilon}{2}$. Mais le raisonnement fait ci-dessus pour Γ_2 montre que tout point de Γ_1 doit être avancé de moins de $2\pi p$. De cette façon, nous obtenons encore dans ce deuxième cas une contradiction.

---

(1) Nous supposons ici que τ est positif, dans le cas contraire nous pourrions considérer $T^{(-1)}$ au lieu de T. En développant $\frac{\tau}{2\pi}$ en fraction continue, on trouvera évidemment des fractions $\frac{p}{q}$ avec la propriété indiquée.

Nous allons maintenant compléter notre résultat relatif aux courbes Γ pour lesquelles τ est de la forme $\frac{2p\pi}{q}$ de la manière suivante :

Toutes les courbes Γ *qui appartiennent au même coefficient* $\tau = \frac{2p\pi}{q}$ *possèdent au moins un point invariant par* T^q *en commun. Dans cet ensemble, il y a une courbe* Γ_1 *extérieure et une courbe* Γ_2 *intérieure.*

S'il n'y a qu'un nombre fini de courbes, ces faits sont évidents. En effet, le bord extérieur de ces courbes constitue une courbe Γ_1, et le bord intérieur une courbe Γ_2. Ces deux bords auront des points communs d'après ce qui précède, et ces points communs se trouveront nécessairement sur toutes les autres courbes Γ en question.

S'il y a un nombre infini de courbes Γ, considérons la région ouverte simplement connexe, extérieure à toutes ces courbes. Sa frontière est évidemment une courbe invariante Γ_e^*. Comme tout point d'une courbe Γ au voisinage immédiat de Γ_e^* est avancé, par T^m, d'un angle compris entre

$$\frac{2mp\pi}{q} - 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{2mp\pi}{q} + 2\pi,$$

on voit que le coefficient de rotation de Γ_e^* est aussi $\frac{2p\pi}{q}$. Donc, la courbe Γ_e^*, ainsi que la courbe analogue Γ_i^*, appartiennent à l'ensemble Γ. Ces deux courbes auront au moins un point invariant par T^q en commun, et ces points communs devront être situés sur toutes les courbes Γ.

On démontre immédiatement :

Toute suite infinie épanouissante (ou décroissante) de courbes Γ *tend uniformément vers une courbe* Γ.

En effet, une telle suite définit une région ouverte intérieure, invariante par T, dont la frontière est une courbe Γ que les régions de la suite approchent uniformément.

5. **Le lemme fondamental.** — Considérons maintenant un rayon

quelconque $\theta = \theta_0$ et marquons sur ce rayon les points de rencontre avec chaque courbe. Cet ensemble de points est fermé. A vrai dire, si les points de rencontre de $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ tendent vers un point P de $\theta = \theta_0$ avec r croissant, ces courbes

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$$

forment une suite épanouissante dont la courbe limite Γ rencontre $\theta = \theta_0$ au point limite P. On peut opérer de la même façon si les points de rencontre tendent vers un point P avec r décroissant.

Marquons plus généralement sur $\theta = \theta_0$ tous les points compris entre la courbe Γ extérieure et la courbe Γ intérieure des courbes qui possèdent un même coefficient de rotation $\tau = \frac{2p\pi}{q}$.

L'ensemble des points et intervalles ainsi marqués est également fermé, et chaque point ou intervalle correspond à un coefficient unique de rotation qui croît avec r.

L'ensemble des points et intervalles marqués remplit la ligne entre $r = a$ et $r = b$ ou ne la remplit pas.

Dans le premier cas, l'entrelacement des courbes et des régions simplement connexes entre elles remplissent toute la couronne; par exemple, cette possibilité se trouve réalisée par la transformation de rotation variable U mentionnée plus haut. Dans le cas général, chaque branche asymptotique, issue d'un point invariant instable par T^q, coïncide avec une autre branche de la même espèce.

Dans le second cas, on trouve un segment PQ sur la ligne $\theta = \theta_0$ qui ne contient pas de points « marqués » intérieurs, quoique P et Q soient marqués. En d'autres termes, il y a une région annulaire de la couronne dont les deux bords sont des courbes invariantes successives qui coupent $\theta = \theta_0$ en P et Q respectivement. Une telle région sera appelée « région annulaire d'instabilité » (ring of instability).

Dans ce qui suit, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme. — *Il existe des transformations auxiliaires* A, *du type* T, *dont la couronne contient au moins une région annulaire d'instabilité.*

Dans un article récent [1], j'ai démontré ce fait, qui, au point

[1] *Sur l'existence de régions annulaires d'instabilite* (*Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1931).

de vue analytique, semble d'avance presque certain. Comme j'emploie dans cet article une couronne comprise entre $r = 0$ et $r = 1$, la région annulaire d'instabilité pourrait s'étendre jusqu'à $r = 0$.

6. Une propriété des régions annulaires d'instabilité. — Soit donc R une telle région annulaire d'instabilité entre les courbes invariantes successives Γ_1 et Γ_2 d'équations

$$r = f_1(\theta), \qquad r = f_2(\theta) \qquad [f_1(\theta) > f_2(\theta)]$$

où f_1 et f_2 sont continues et périodiques de période 2π.

Dans le voisinage immédiat de tout point de $\Gamma_1(\Gamma_2)$ *il existe des points dont quelques-unes des images par* T, T^2, ... *se trouvent dans le voisinage immédiat d'un point donné de* $\Gamma_2(\Gamma_1)$.

En effet considérons une petite région ouverte σ autour du point donné de Γ_2. La suite des régions σ, $T(\sigma)$, $T_2(\sigma)$ .... jointe à la région $r = f_2(\theta)$ également ouverte et connexe, constitue une région ouverte et connexe, G, telle que tout point de la région transformée $T(G)$ appartient évidemment à G. Puisque T est conservative, on en conclut que G est une région invariante par T. De plus, la région ouverte simplement connexe H extérieure à G est invariante. Donc la frontière de H doit être une courbe fermée invariante d'après notre définition, et doit par conséquent coïncider avec Γ_1, d'où le résultat énoncé.

7. La transformation définitive T_ε. — Choisissons donc une transformation conservative A qui admette une telle région annulaire d'instabilité

$$f_2(\theta) \leqq r \leqq f_1(\theta)$$

et désignons les coefficients de rotation correspondant aux deux bords Γ_1 et Γ_2 par τ_1 et $\tau_2 (\tau_1 > \tau_2)$. Choisissons aussi à l'intérieur une courbe fermée K, de la forme

$$r = f(\theta)$$

où f est analytique en θ et périodique de période 2π, de telle sorte que K divise l'aire de la région annulaire en deux parties égales.

Soit V_ε la transformation suivante :

$$V_\varepsilon; \qquad \theta_1 = \theta. \qquad r_1^2 = (1-\varepsilon)\, r^2 \quad \varepsilon f^2(\theta),$$

où $0 < \varepsilon < 1$ est une quantité que nous allons choisir suffisamment petite plus tard.

La transformation définitive qui nous conduit à notre conclusion principale est la transformation composée $T_\varepsilon = AV_\varepsilon$.

La transformation purement radiale V_ε est analytique partout sauf à l'origine $r = 0$ et diminue toute aire dans le rapport $\frac{(1-\varepsilon)}{1}$ parce que l'on a

$$d(r_1^2)\, d\theta_1 = (1-\varepsilon)\, d(r^2)\, d\theta.$$

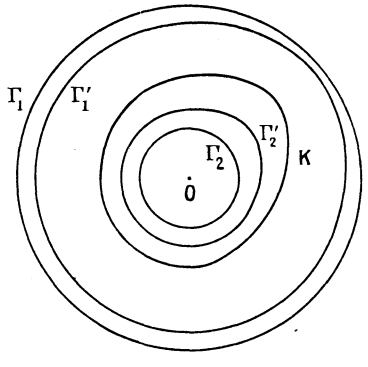
Par conséquent T_ε jouit des mêmes propriétés.

De plus, la transformation V_ε laisse invariante la courbe K, tandis que tout point à une distance radiale d de K est transformé vers K radialement en un point à une moindre distance radiale de K. Donc $T_\varepsilon = AV_\varepsilon$ transforme la région annulaire en une partie d'elle-même,

$$f_2^2 - \varepsilon\,[f^2 - f_2^2] \leqq r^2 \leqq f_1^2 - \varepsilon\,[f_1^2 - f^2]$$

(*voir* la figure ci-dessous), dont les frontières sont les images respec-

Fig. 3.



tives Γ'_1 et Γ'_2 de Γ_1 et Γ_2. La transformation inverse $T_\varepsilon^{(-1)} = V_\varepsilon^{(-1)} A^{(-1)}$ est analytique au moins à l'intérieur de la région annulaire $\Gamma'_1 \Gamma'_2$, et augmente toute aire dans le rapport $\frac{1}{(1-\varepsilon)}$.

Il est évident que l'aire incluse entre Γ_1 et Γ'_1 est la même que celle incluse entre Γ_2 et Γ'_2.

De plus il est évident que la transformation $T_\varepsilon(T_\varepsilon^{-1})$ dévie la direction radiale vers sa gauche (droite). Cette propriété est fondamentale pour ce qui suit.

8. La courbe invariante correspondante C_{ci}. — En répétant encore une fois la transformation on voit que la région annulaire $\Gamma'_1\Gamma'_2$ se trouve transformée en une autre $\Gamma_1^2\,\Gamma_2^2$ qui lui est intérieure où $\Gamma_1^2 = T_\varepsilon^2(\Gamma_1)$ et $\Gamma_2^2 = T_\varepsilon^2(\Gamma_2)$. Continuant indéfiniment de cette manière, on obtient évidemment une suite infinie des régions annulaires $\Gamma_1^1\,\Gamma_2^1$, $\Gamma_1^2\,\Gamma_2^2$, ..., chacune à l'intérieur des régions précédentes, où, en général,

$$\Gamma_1^n = T_\varepsilon^n(\Gamma_1), \qquad \Gamma_2^n = T_\varepsilon^n(\Gamma_2).$$

De plus l'aire de la $n^{\text{ième}}$ région annulaire $\Gamma_1^n\,\Gamma_2^n$ est précisément l'aire de $\Gamma_1\Gamma_2$ diminuée dans le rapport $\frac{(1-\varepsilon)^n}{1}$, et doit donc tendre vers zéro quand n croît indéfiniment. De plus, à chaque étape les aires des régions annulaires $\Gamma_1\Gamma_1^n$ et $\Gamma_2\Gamma_2^n$ restent égales.

Par conséquent, l'ensemble de points intérieurs à toutes ces régions annulaires est une courbe fermée, C, qui divise la région annulaire initiale en deux parties égales. On voit immédiatement que cette courbe est invariante par T_ε aussi bien que ses deux côtés, les courbes C_e et C_i. On voit aussi que l'ensemble C_{ci} commun à C_e et C_i est encore une courbe invariante par T ; les deux côtés de C_{ci} sont identiques, et il n'existe pas d'autre courbe de cette espèce.

Il existe donc une courbe C_{ci} parcourant la région annulaire d'instabilité $\Gamma_1\Gamma_2$, frontière commune des régions ouvertes simplement connexes, extérieure, et intérieure qui est invariante par la transformation T_ε et qui divise $\Gamma_1\Gamma_2$ en deux parties égales.

C'est cette courbe C_{ci} que nous allons étudier de plus près.

Disons qu'une courbe est *roulée vers la gauche par rapport à l'intérieur* s'il existe des courbes régulières intérieures, OP, sans points doubles, dont la direction tangentielle n'est jamais à droite de la direction radiale qui joignent l'origine O à un point intérieur arbitraire P. D'une manière analogue disons qu'une courbe est

roulée vers la gauche par rapport au point à l'infini s'il existe des courbes régulières O'P, sans point double, dont la direction tangentielle n'est jamais à droite de la direction radiale dirigée *vers* O, qui joignent le point O' appartenant à un cercle concentrique extérieur à un point extérieur arbitraire P.

La courbe C_{ei} *est roulée vers la gauche par rapport à l'intérieur et à l'extérieur.*

S'il n'en est pas ainsi, supposons par exemple qu'il existe des points P intérieurs à C_{ei} qui ne sont pas accessibles de la gauche de O, le long d'une telle courbe OP.

Revenons maintenant au plan des coordonnées rectangulaires r, θ.

En premier lieu le point P, qui n'est pas un point de C_{ei} doit néanmoins appartenir à C_i. Autrement P serait l'image d'un point Q entre Γ_2 et $\Gamma_2^{(n)}$ par une puissance convenable, T_ε^n de T_ε, comme le montre la construction ci-dessous. Joignons Γ_2 à Q par une ligne verticale $\overline{O}_1 Q$. L'image $\overline{O}^{(1)} Q^{(1)}$ de cette ligne se trouve entre $\Gamma_1^{(1)}$ et $\Gamma_1^{(2)}$, et joint l'image $\overline{O}_1^{(1)}$ de $\overline{O}_1$ sur $\Gamma_2^{(1)}$ à l'image $Q^{(1)}$ de $\overline{Q}$. La direction tangentielle de $\overline{O}^{(1)} Q^{(1)}$ est partout déviée vers la gauche de la direction verticale sauf peut-être au point $\overline{O}'_1$. Soit donc O_2 le point de Γ_2 sur la même ligne verticale que $\overline{O}_1^{(1)}$. Considérons la courbe $\overline{O}_2 \overline{O}_1^{(1)} Q^{(1)}$ formée par la ligne droite $\overline{O}_2 \overline{O}_1^{(1)}$ et la courbe $\overline{O}_1^{(1)} Q^{(1)}$. Cette courbe est sans point double, et sa direction tangentielle n'est jamais à droite de la direction verticale. Son image $\overline{O}_2^{(1)} \overline{O}_1^{(2)} Q^{(2)}$ aura aussi une direction tangentielle à gauche de la direction verticale sauf peut-être au point $\overline{O}_2^{(1)}$. En continuant ainsi on obtient à la $n^{\text{ième}}$ étape la courbe

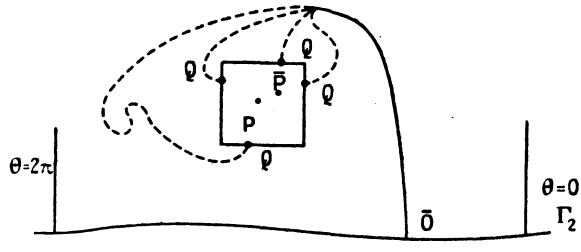
$$\overline{O}_{n+1} \overline{O}_1^{(n)} \ldots \overline{O}_n^{(1)} P$$

du type demandé qui joint $\overline{O}_{n+1}$ de Γ_2 à $P = Q^n$.

Nous voyons donc que tout point P à l'intérieur de C_{ei} qui n'appartient pas à C_i doit être accessible de Γ_2 par la gauche. De plus la méthode de construction de notre courbe auxiliaire nous montre que la direction tangentielle de cette courbe sera plus déviée à gauche que la direction verticale d'un angle $d > 0$ entre $\Gamma_2^{(2)}$ et C_{ei}, et cela indépendamment du point P considéré.

Il reste à considérer les points intérieurs P qui appartiennent à C_i. Supposons qu'un tel point ne soit pas accessible de Γ_2 par la gauche. Choisissons un carré autour de ce point assez petit pour ne contenir aucun point de C_{ei}. Ce carré doit contenir des points $\bar{P}$ accessibles de la gauche parce que les régions extérieure et intérieure à C_{ei} ont une aire totale égale à celle de la région annulaire d'instabilité. Construisons une courbe auxiliaire $\bar{O}\bar{P}$ (*voir* la figure ci-dessous). Si cette courbe entre dans le carré pour

Fig. 4.



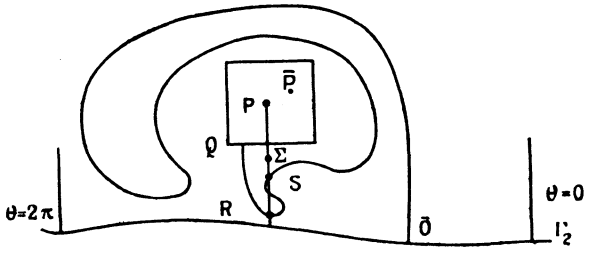
la première fois au point Q par le côté supérieur ou par le côté de droite, la courbe $\bar{O}QP$, où QP est une ligne droite, rend P accessible de la gauche. En effet l'angle tangentiel est au moins π sur le côté supérieur et reste plus grand que $\frac{5\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$ à l'intérieur du carré ; sur le côté de droite l'angle d'entrée peut être $\frac{\pi}{2}$ mais à l'intérieur cet angle excédera $\frac{\pi}{2}$. De la même manière, si la courbe $\bar{O}\bar{P}$ entre dans le carré par le côté inférieur ou par le côté de gauche avec un angle tangentiel plus grand que $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire d'en dessus, on pourra employer la courbe auxiliaire $\bar{O}\bar{Q}P$ de la même manière qu'auparavant. Évidemment la courbe $\bar{O}\bar{P}$ ne peut pas entrer dans le carré d'en dessous, par le côté de gauche.

Il vient donc que la courbe $\bar{O}\bar{P}$ doit entrer dans le carré d'en dessous, par le côté inférieur, et en un point $\bar{Q}$ à gauche de P avec un angle compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. En tout autre cas on pourrait obtenir une courbe auxiliaire en ajoutant le segment rectiligne QP à $\bar{O}Q$.

On voit ainsi que $\bar{O}Q$ doit couper pour la dernière fois la ligne

verticale qui contient P en un point R au-dessous du carré avec un angle tangentiel compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Supposons que S soit le premier point où $\overline{OR}$ rencontre cette ligne verticale au-dessous de P, comme le montre la figure ci-dessous; un tel point S ou bien coïncide avec R ou est situé au-dessus de R. Il doit exister un point Σ de C_{ei} sur le segment SP (mais naturellement en dehors du carré) : autrement on pourrait obtenir une courbe auxiliaire en ajoutant le segment vertical SP à $\overline{O}S$. Nous choisissons

Fig. 5.



pour Σ le point de C_{ei} le plus rapproché de P sur cette ligne verticale; pour cela remarquons que C_{ei} est un ensemble fermé qui ne contient pas P.

L'arc RQ se trouve donc entièrement entre les lignes verticales qui contiennent respectivement P et Q, parce que l'arc RQ est dévié vers la gauche de la direction verticale ou suivant cette direction. De plus R doit être au-dessous de Σ.

Faisons maintenant diminuer indéfiniment le carré autour de P. Nous obtenons une suite d'arcs RQ qui s'étendent d'un point R au-dessous de Σ jusqu'à un point Q près de P, et qui sont situés entre les deux lignes verticales voisines l'une de l'autre passant par R et Q. On voit donc qu'un tel arc diffère peu du segment vertical ΣP.

Pour montrer la contradiction nous nous souvenons maintenant du fait qu'une courbe auxiliaire $\overline{O}\overline{P}$ peut être choisie de façon que l'angle tangentiel excède $\frac{\pi}{2}$ de $d > 0$, uniformément entre $\Gamma_2^{(2)}$ et C_i, et par conséquent dans un voisinage fixe de P qui appartient à C_i. Il saute aux yeux que les arcs QR ne peuvent avoir cette propriété sans sortir de la bande verticale étroite entre Q et R, d'où la contradiction annoncée.

Un raisonnement tout à fait analogue montre que C_{ei} est aussi roulée vers la gauche sur le côté extérieur.

Il semble probable que, d'une façon pareille, tous les points de C_{ei} elle-même qui sont accessibles le long d'un arc extérieur ou intérieur de Jordan, sont accessibles le long d'une courbe régulière déviée vers la gauche (l'extrémité sur C_{ei} étant exceptée).

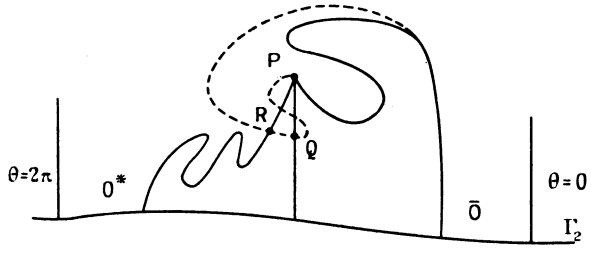
9. **Les points radialement accessibles de C_{ei}.** — Sur chaque ligne radiale issue de O il existe un point de C_{ei} et un seul qui est radialement accessible. La totalité de ces points se trouve rangée en ordre cyclique sur C_{ei} selon l'ordre croissant des valeurs de θ correspondantes.

Tout point radialement accessible (¹) *de* C_{ei} *se trouve rans-formé en un point de la même espèce par la transformation inverse* T_{ε}^{-1}.

Pour le démontrer commençons par démontrer qu'un point P intérieur à C_{ei} qui est accessible de la droite est aussi radialement accessible.

Soit O^*P une courbe auxiliaire déviée vers la droite. Si O^*P se

Fig. 6.



trouve entièrement à gauche de P (*voir* la figure ci-dessus), nous raisonnons de la manière suivante.

Le point P est aussi accessible de la gauche comme nous l'avons démontré. Une ligne auxiliaire correspondante $\bar{O}P$ ne peut pas couper la ligne verticale qui contient P en un point Q au-dessous de P sans avoir déjà coupé O^*P par en dessus, en un point R qui

(¹) Soit du côté intérieur, soit du côté extérieur. Évidemment il suffit de considérer seulement le premier cas.

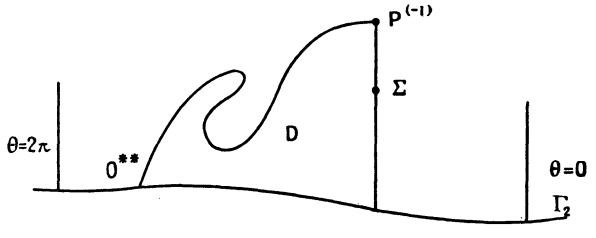
précède Q. Un tel point R ne peut pas exister. En effet dans le cas contraire la courbe $O^*R\bar{O}$ ne contient aucun point de C_{ei}, et C_{ei} doit être intérieure à la région comprise entre Γ_2 et $O^*R\bar{O}$, ce qui n'est pas possible. Par conséquent la courbe $\bar{O}P$ ne coupe ni la portion de la verticale qui contient P, située au-dessous de P, ni la courbe O^*P, et le point P doit être radialement accessible parce qu'il n'y a pas de point de C_{ei} à l'intérieur de O^*PO.

Mais supposons que la courbe O^*P ne soit pas entièrement à gauche du point P. Soit P^* le premier point où O^*P rencontre la ligne verticale qui passe par P. Évidemment P^* doit être au-dessus de P, en raison de la propriété caractéristique de la direction tangentielle. Donc si nous pouvions démontrer que P^* est radialement accessible, le point P le serait aussi.

En considérant maintenant le point P^* au lieu de P dans le raisonnement précédent et en employant la courbe auxiliaire O^*P^*, qui est déviée vers la droite et se trouve à gauche de P^*, nous démontrons par la même méthode que P^* doit être radialement accessible, ce qui complète la démonstration.

Supposons maintenant que P soit un point de C_{ei} radialement accessible, et considérons son image $P^{(-1)} = T_\varepsilon^{-1}(P)$ par $T_\varepsilon^{(-1)}$.

Fig. 7.



L'image de la ligne radiale O^*P nous donne une courbe $O^{**}P^{(-1}$ où O^{**} est l'image du point où O^*P rencontre $\Gamma_2^{(1)}$ (*voir* la figure ci-dessus) et cette courbe est déviée vers la droite.

Chaque point Q intérieur à $O^{**}P^{(-1)}$ est donc radialement accessible d'après la démonstration ci-dessus, ce qui nous montre que $P^{(-1)}$ doit être plus à droite que tout autre point de $O^{**}P^{(-1)}$. On voit aussi que, pour la même raison, la région D au-dessous de la courbe $O^{**}P^{(-1)}$ ne contient aucun point de C_{ei} à gauche de $P^{(-1)}$.

D'autre part le résultat indiqué subsiste évidemment s'il n'existe aucun point de C_{ei} au-dessous de $P^{(-1)}$; nous prenons pour Σ le point de cette espèce le plus près de l'axe des θ. La même figure nous montre que le point radialement accessible Σ précède le point $P^{(-1)}$ dans l'ordre cyclique sur C_{ei}. Les points accessibles de C_{ei} entre Σ et $P^{(-1)}$ sont évidemment accessibles de la région au-dessous de $O^{**}P^{(-1)}$ comprise entre Σ et $P^{(-1)}$. Mais s'il existait une partie de l'intérieur de C_{ei} ainsi accessible et à droite de ΣP^{-1}, on voit que les points de cette partie ne seraient pas accessibles le long d'une courbe déviée vers la gauche. Par conséquent nous devons conclure que le segment $\Sigma P^{(-1)}$ est lui-même la partie de C_{ei} entre Σ et $P^{(-1)}$.

Mais cette possibilité doit être aussi exclue. En effet il existe au-dessous de $O^{**}P^{(-1)}$, près de $P^{(-1)}$, des points $\overline{P}$ qui n'appartiennent pas à C_i. Comme nous l'avons déjà remarqué, un point P de cette espèce est accessible de la gauche le long d'une courbe $\overline{O}\overline{P}$ déviée vers la gauche de la direction verticale d'au moins un angle $d > 0$ et au-dessus de $\Gamma_2^{(2)}$. Il est tout à fait évident que de telles courbes $\overline{O}P$ n'existent pas pour $\overline{P}$ suffisamment près du point $P^{(-1)}$ de C_{ei}.

Du résultat ainsi démontré, nous déduisons le suivant comme corollaire immédiat :

Soient P *un point de* C_{ei} *radialement accessible, et* $P^{(-k)}$ *son image par* $T_\varepsilon^{(-k)}$, *également radialement accessible. Si la différence entre les deux valeurs correspondantes* θ *et* θ_{-k} *de* θ *est de la forme*

$$2l\pi \leqq \theta_{-k} - \theta < 2(l+1)\pi$$

la transformation $T_\varepsilon^{(-k)}$ *avance chaque point de* C_{ei} *de plus de* $l-1$ *et de moins de* $l+2$ *rotations complètes. Si le signe d'égalité a lieu, le point* P *est avancé de précisément* l *rotations complètes.*

10. **Sur les deux coefficients de rotation de** C_{ei}. — Supposons maintenant que le coefficient de rotation intérieure de la courbe C_{ei} soit τ_i^*. D'après la propriété fondamentale de ce coefficient nous aurons donc un nombre de rotations compris entre

$$\frac{-k\tau_i^* - 2\pi}{2\pi} \quad \text{et} \quad \frac{-k\tau_i^* + 2\pi}{2\pi}$$

après la transformation $T_\varepsilon^{(-k)}$, d'où

$$\frac{-2(l+2)\pi}{k} < \tau_i^* < \frac{-2(l-2)\pi}{k}$$

selon ce qui précède.

Faisons l'hypothèse que quand ε tend vers θ, les moindres distances de C_{ei} à Γ_1 et à Γ_2 tendent uniformément vers θ. Tout point P à cette moindre distance de Γ_2 est certainement radialement accessible, et ses images par $T_\varepsilon^{(-1)}$, $T_\varepsilon^{(-2)}$, ... le sont aussi, comme nous l'avons démontré plus haut. D'autre part pour ε petit, $T_\varepsilon^{(-1)}$ diffère peu de $A^{(-1)}$. Par conséquent les distances de $P^{(-1)}$, $P^{(-2)}$, ... à la courbe Γ_2 (invariante par A) restent petites jusqu'à une grande valeur de k, et ces points seront situés près de $Q^{(-1)}$, $Q^{(-2)}$, ..., où $Q^{(-1)}$, $Q^{(-2)}$, ... sont les images successives par $A^{(-1)}$ d'un point Q de Γ_2 voisin de P. Le point $P^{(-k)}$ sera donc avancé d'un angle qui diffère de $k\tau_i$ (τ_i indique le coefficient de rotation de Γ_2 par A), de moins de 4π. Donc

$$-k\tau_i - 4\pi \leqq \theta_{-k-} - \theta \leqq -k\tau_i + 4\pi,$$

d'où, d'après l'inégalité de la section 8,

$$\frac{-2(l+3)\pi}{k} \leqq \tau_i \leqq \frac{-2(l-2)\pi}{k}.$$

La comparaison de cette inégalité et de l'inégalité analogue ci-dessus, relative à τ_i^* nous montre que

$$\frac{-10\pi}{k} < \tau_i - \tau_i^* < \frac{10\pi}{k}.$$

Puisque k devient arbitrairement grand quand ε tend vers θ, nous voyons que τ_i^* tend vers τ_i.

De la même manière on démontre que τ_e^* tend vers τ_e quand ε tend vers θ.

Mais τ_i est inférieur à τ_e comme nous l'avons vu. Par conséquent pour ε assez petit on aura $\tau_i^* < \tau_e^*$; c'est-à-dire que le coefficient de rotation de C_{ei} par rapport à la région extérieure doit dépasser le coefficient de rotation par rapport à l'intérieur.

Tout cela suppose que l'hypothèse faite plus haut est valable quand ε est suffisamment petit.

Il reste maintenant à démontrer cette hypothèse.

Supposons qu'elle ne soit pas satisfaite, par exemple supposons que la moindre distance de C_{ei} à Γ_2 ne tende pas uniformément vers θ quand ε tend vers θ. Nous pourrions alors trouver une constante k et une suite infinie de valeurs de ε, ε_1, ε_2, ..., avec $\lim \varepsilon_n = \theta$, telles que toute courbe $C_{ei}^{(n)}$ correspondante ne possède aucun point à une distance de Γ_2 inférieure à k.

Considérons maintenant les images $B^{(n)}$ par $A^{(n)}$ de la bande

$$f_2(\theta) \leqq r < f_2(\theta) + k,$$

au-dessus de Γ^2, remarquons que cette bande, *par hypothèse*, est au-dessous de C_{ei} pour les valeurs ε_1, ε_2, ... de ε. Envisageons la région ouverte connexe formée par ces images

$$C = \ldots + B^{(-2)} + B^{(-1)} + B + B^{(1)} + B^{(2)} + \ldots;$$

elle est évidemment invariante par A et A^{-1}.

Nous pouvons écrire d'une manière symbolique

$$C = \lim C_n,$$

où

$$C_n = B^{(-n)} + \ldots + B + \ldots + B^{(n)}.$$

Les régions ouvertes connexes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ s'épanouissent vers C quand n tend vers l'infini.

Ajoutons maintenant à C_n tous les ensembles fermés contenus dans son intérieur. Nous obtenons ainsi une région ouverte *simplement connexe* D_n. *Je dis que l'aire de* D_n *ne peut pas dépasser la moitié de l'aire de la région annulaire*. Pour le démontrer considérons

$$C_n^* = T_\varepsilon^{-n}(B) + \ldots + B + \ldots + T_\varepsilon^{(n)}(B),$$

où n est arbitrairement grand et ε une valeur de la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Comme C_n^* et, par conséquent, l'aire D_n^* totale incluse par C_n^* restent entièrement au-dessous de la courbe invariante C_{ei} correspondante, (qui divise en deux parties égales l'aire de la région annulaire Γ_1, Γ_2), on voit que la région D_n^* incluse dans C_n^* aura une aire qui ne dépasse pas la moitié de celle de Γ_1, Γ_2. Dautre part quand ε_k devient petit, T_ε tend vers A, on voit donc que D_n^* tend vers D_n, d'où la conclusion en italique.

Par conséquent la suite des régions ouvertes, simplement connexes et épanouissantes $D_1, D_2, \ldots$ tendra vers une région ouverte

simplement connexe D dont l'aire totale ne peut pas dépasser la moitié de l'aire annulaire. Il en résulte que la courbe fermée de frontière est une courbe invariante par A qui ne peut coïncider ni avec Γ_2 ni avec Γ_1. Selon la propriété fondamentale de la région annulaire d'instabilité une telle courbe n'existe pas.

Nous concluons donc :

Pour ε suffisament petit la courbe fermée invariante C_{ei} possède deux coefficients inégaux de rotation τ_i et τ_e respectivement par rapport à l'intérieur et l'extérieur; ces coefficients satisfont à $\tau_i < \tau_e$.

11. Sur une autre propriété de C_{ei}. — Notons aussi la propriété suivante :

La courbe C_{ei} ne peut avoir aucun point accessible à la fois de l'extérieur et de l'intérieur.

En effet si un tel point P doublement accessible existait, toutes ses images $P^{(k)}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) par T_ε^k seraient du même type et devraient avoir le même ordre cyclique relatif sur les deux côtés. Mais cet ordre détermine les coefficients de rotation, qui seraient alors égaux.

Cette propriété nous montre la nature assez compliquée de la courbe C_{ei}.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude des propriétés de C_{ei}.

12. Une remarque historique. — J'ai observé en 1916 que les transformations conservatives associées aux systèmes dynamiques à deux degrés de liberté dévient les directions vers la gauche ou vers la droite de la direction radiale dans le voisinage d'un point invariant de type stable. Je me suis alors demandé ce que l'on pourrait dire pour une transformation conservative T d'une couronne en elle-même possédant cette propriété, et j'avais imaginé pendant quelque temps qu'au lieu des deux points invariants qui existent d'après le dernier théorème de géométrie de Poincaré, on pourrait dans ce cas obtenir toute une courbe invariante. Pour essayer de démontrer cette conjecture en m'appuyant sur l'existence, presque certaine, de régions annulaires d'instabilité, j'ai étudié la transfor-

mation auxiliaire. T_ε employée plus haut.. J'avais même cru avoir prouvé cette hypothèse par la méthode de *reductio ad absurdum* en obtenant comme autre possibilité une courbe invariante C_{ei} avec deux coefficients inégaux de rotation. C'est seulement un peu plus tard que je me suis aperçu qu'une telle courbe invariante pourrait bien exister.

Plus récemment j'ai démontré l'existence des régions annulaires d'instabilité (*voir* mon article dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*), et cela m'a permis, en suivant le même ordre d'idées, de démontrer l'existence de cette catégorie remarquable de courbes fermées.