BULLETIN DE LA S. M. F.

MIRON NICOLESCO

Sur les fonctions de *n* variables, harmoniques d'ordre *p*

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 129-151

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__129_0>

SUR LES FONCTIONS DE n VARIABLES, HARMONIQUES D'ORDRE p;

PAR M. MIRON NICOLESCO.

Dans un Mémoire antérieur (¹), j'ai étendu aux fonctions harmoniques d'ordre p le théorème de Gauss ainsi que sa réciproque, ce qui m'a permis d'étendre immédiatement à ces fonctions des propriétés classiques des fonctions harmoniques ordinaires. J'ai considéré dans ce travail des fonctions de deux variables, et dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (²) j'ai annoncé que les résultats sont valables pour les fonctions à plus de deux variables. Cela est vrai, qualitativement, mais demande à être précisé, d'autant plus que les diverses formules établies dépendent, comme nous allons le voir, du nombre des variables indépendantes.

Dans ce second Mémoire, j'établis de nouveau pour l'espace à n dimensions les formules démontrées pour le plan, ce qui me permettra, non seulement de retrouver tous les résultats du premier Mémoire, mais encore d'en donner de nouveaux, comme l'extension du théorème de Liouville aux fonctions harmoniques d'ordre p. J'introduis ensuite la notion de fonctions *sousharmoniques d'ordre p* et j'établis pour ces fonctions un théorème généralisant celui de Littlewood pour les fonctions sousharmoniques ordinaires. Enfin, j'introduis la notion de fonctions doublement harmoniques d'ordre p, par rapport à deux groupes de variables (fonctions H_{mn}), en établissant pour ces fonctions des théorèmes de moyennes généralisant les théorèmes de Gauss, Volterra, Sbrana.

Une partie des résultats de ce Mémoire a été communiquée à l'Académie des Sciences (³).

(¹) MIRON NICOLESCO, *Sur les fonctions harmoniques d'ordre p* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. LIX, 1931, p. 75-87).

(²) *Comptes rendus,* t. 191, 1930, p. 515.

(³) *Comptes rendus,* t. 193, 1931, p. 1152.

I. — Formules préliminaires. Théorèmes fondamentaux.

1. Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(P)$ une fonction d'un point P, de l'espace à n dimensions, possédant des dérivées partielles continues, jusqu'à un certain ordre $2p$, inclusivement. Nous poserons, comme d'habitude,

$$\Delta^0 = 1, \qquad \Delta^1 = \Delta = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, \qquad \Delta^i = \Delta(\Delta^{i-1}) \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

Nous désignerons aussi, par $S_R(P)$ l'hypersphère de centre P et de rayon R, par $\sigma_n(R)$ la mesure de sa périphérie, par $v_n(R)$ la mesure de son volume, enfin par $d\sigma$ et dv des éléments de la périphérie et du volume. Si l'on désigne respectivement par $\mu_0(u; R)$ et $\mu_1(u; R)$ les moyennes périphérique et spatiale de $u(P)$ dans $S_n(R)$, on a, entre ces deux moyennes, la relation évidente

$$\mu_1(u; R) = \frac{n}{R^n} \int_0^R \rho^{n-1} \mu_0(u; \rho)\, d\rho.$$

Cela nous conduit à introduire, comme pour $n = 2$, la suite des *moyennes* de divers ordres

$$\mu_0(u; R), \quad \mu_1(u; R), \quad \mu_2(u; R), \quad \ldots, \quad \mu_s(u; R), \quad \ldots,$$

définie par la relation de récurrence

$$(1) \qquad \mu_s(u; R) = \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} \mu_{s-1}(u; r)\, dr \qquad (s = 2, 3, \ldots).$$

Nous introduisons aussi l'opérateur

$$(2) \qquad J_0\{\varphi(R)\} = \int_0^R \left(r - \frac{r^{n-1}}{R^{n-2}}\right) \varphi(r)\, dr,$$

et ses puissances $J_0^2, J_0^3, \ldots$, définies par la relation de récurrence

$$(3) \qquad J_0^1 = J_0, \qquad J_0^i\{\varphi(R)\} = J_0\{J_0^{i-1}\} \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

Enfin, nous introduirons la suite

$$J_0^p\{\varphi(R)\}, \quad J_1^p\{\varphi(R)\}, \quad \ldots, \quad J_s^p\{\varphi(R)\}, \quad \ldots,$$

définie, comme les moyennes $\mu_s(u;\,R)$, par la relation

$$(4)\qquad J_s^p[\varphi(R)] = \frac{n}{R^n}\int_0^R r^{n-1} J_{s-1}^p[\varphi(r)]\,dr.$$

Nous aurons besoin, dans la suite, de la valeur de $J_s^p[1]$. En posant

$$(5)\qquad a_{n,i} = \frac{1}{2^i . i!\, n(n+2)\ldots(n+2i-2)},$$

on trouvera sans peine

$$(6)\qquad J_0^p[1] = (n-2)^p a_{n,p} R^{2p},$$

d'où, par (4),

$$(7)\qquad J_s^p[1] = a_{n,p}\frac{n^s(n-2)^p}{(n+2p)^s} R^{2p}.$$

Cela étant, je dis que l'on a, pour une moyenne quelconque $\mu_s(u;\,R)$, le développement suivant :

$$(8)\qquad \mu_s(u;\,R) = u(P) + \sum_{i=1}^{p-1} a_{n,i}\frac{n^s}{(n+2i)^s} R^{2i}(\Delta^i u)_P + \frac{1}{(n-2)^p} J_s^p[\mu_0(\Delta^p u;\,R)].$$

En effet, grâce aux formules (1) et (4), il est facile de voir que, si l'on suppose la formule vraie pour une valeur déterminée de s, elle est vraie pour la valeur $s+1$. Il suffit donc de la démontrer pour $s=0$.

Supposons alors la formule (8) vraie pour $s=0$ et pour toutes les valeurs de p jusqu'à la valeur $p=\nu$. Nous allons montrer qu'elle sera vraie pour $p=\nu+1$. Or, si la formule (8) est vraie pour une fonction u, elle est vraie pour toutes les fonctions, car les coefficients sont indépendants de u. Donc, en l'appliquant à $\Delta^\nu u$, avec $s=0$, $p=1$, on obtient

$$\mu_0(\Delta^\nu u;\,R) = (\Delta^\nu u)_P + \frac{1}{n-2} J_0[\mu_0(\Delta^{\nu+1} u;\,R)].$$

En introduisant ceci dans la formule (8), où l'on aura préalablement fait $s=0$, $p=\nu$, on obtient, en utilisant la formule (6), la même formule (8), écrite pour $s=0$ et $p=\nu+1$. Il suffit donc, en dernière analyse, d'établir la formule suivante :

$$\mu_0(u; R) = u(P) + \frac{1}{n-2} J_0[\mu_0(\Delta u; R)].$$

Pour cela, nous partirons de la formule de Green ([1]) dans l'espace à n dimensions, appliquée à l'hypersphère $S_R(P)$,

$$(n-2)\sigma_n u(P) = \int \left[u \frac{d\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)}{dn} - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{du}{dn} \right] d\sigma - \int \frac{\Delta u}{r^{n-2}} dv,$$

où $\frac{d}{dn}$ signifie la dérivée suivant la normale intérieure, et $\sigma_n = \sigma_n(1)$. On peut encore écrire cette formule

$$u(P) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int u\, d\sigma - \frac{1}{(n-2)\sigma_n R^{n-2}} \int \frac{du}{dn} d\sigma$$
$$- \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int \frac{\Delta u}{r^{n-2}} dv.$$

Mais on a

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma = -\int \Delta u\, dv,$$

$$\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int u\, d\sigma = \mu_0(u; R);$$

donc la formule précédente devient

$$\mu_0(u; R) = u(P) + \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \Delta u\, dv.$$

Or, en désignant par $d\omega$ un élément angulaire solide de l'espace à n dimensions (c'est-à-dire un élément superficiel de l'hypersphère-unité), on a $dv = r^{n-1}.dr\, d\omega$, donc la formule précédente s'écrit finalement

$$\mu_0(u; R) = u(P) + \frac{1}{n-2} J_0[\mu_0(\Delta u; R)].$$

C. Q. F. D.

La formule (8) se trouve ainsi établie dans toute sa généralité.

([1]) La démonstration que nous donnons de cette dernière partie est calquée sur celle que M. P. Pizzetti a utilisée pour donner le développement de $\mu_0(u; R)$ dans l'espace à trois dimensions. *Voir* sa Note : *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera* (*Rendiconti dei Lincei*, 5e série, vol. XVIII, 1er semestre 1909, p. 182-185).

On peut lui donner une autre forme, en faisant disparaître l'opérateur J_s^p. En effet, on a, par la formule de la moyenne,

$$J_s^p[\mu_0(\Delta^p u;\, R)] = \mu_0(\Delta^p u;\, \theta_s^p R)\, J_s^p[1] \qquad (0 < \theta_s^p < 1).$$

La valeur de $J_s^p[1]$ est donnée par (7); d'autre part, en vertu de la continuité de $\Delta^p u$, la moyenne de cette fonction dans l'hypersphère de centre P et de rayon $\theta_s^p R < R$ est égale à la valeur de $\Delta^p u$ en un point P_s^p sur la périphérie de cette hypersphère, c'est-à-dire intérieur à $S_R(P)$. On aura donc finalement les formules fondamentales [1]

$$(9) \qquad \mu_s(u;\, R) = u(P) + \sum_{i=1}^{p-1} a_{n,i} \frac{n^s}{(n+2i)^s} R^{2i} (\Delta^i u)_P + a_{n,p} \frac{n^s}{(n+2p)^s} R^{2p} (\Delta^p u)_{P_s^p}$$
$$(s = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Remarque. — J'ai donné, dans le Mémoire cité, sans démonstration, les formules analogues pour $n = 2$. Il est manifeste qu'on pourrait les obtenir en suivant la même voie qu'ici, à cela près que la fonction $\frac{1}{r^{n-2}}$ serait remplacée par $\log r$. Cela changerait aussi l'opérateur $J_0[\varphi(R)]$, qui serait donné dans le plan, par la formule

$$J_0[\varphi(R)] = \int_0^R \log\left(\frac{R}{r}\right) \varphi(r)\, dr.$$

2. Les formules (9) nous permettent d'énoncer les théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème I (extension du théorème de Gauss). — *Soit* $u(P)$ *une fonction définie dans un domaine fermé* D, *de l'espace à* n *dimensions. Si cette fonction est harmonique d'ordre* p *dans* D, *on aura, pour tout point* P *de* D, *et pour toute hyper-*

---

[1] M. N. Cioranesco a donné (*Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences*, t. 31, 1929, p. 175), le développement de $\mu_0(u;\, R)$ et $\mu_1(u;\, R)$ pour $n > 3$, sous forme de *série*. Mais la voie qu'il suit ne permet pas d'obtenir ces développements sous la forme finie (9), plus utile dans les applications, et plus générale, car elle ne suppose pas l'analyticité de $u(P)$.

sphère de centre P *et intérieure à* D,

$$(10)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dfrac{n}{n+2} & \dfrac{n}{n+4} & \dots & \dfrac{n}{n+2p-2} \\ 1 & \dfrac{n^2}{(n+2)^2} & \dfrac{n^2}{(n+4)^2} & \dots & \dfrac{n^2}{(n+2p-2)^2} \\ \cdot & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 1 & \dfrac{n^{p-1}}{(n+2)^{p-1}} & \dfrac{n^{p-1}}{(n+4)^{p-1}} & \dots & \dfrac{n^{p-1}}{(n+2p-2)^{p-1}} \end{vmatrix} u(P)$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \dfrac{n}{n+2} & \dfrac{n}{n+4} & \dots & \dfrac{n}{n+2p-2} \\ \mu_2 & \dfrac{n^2}{(n+2)^2} & \dfrac{n^2}{(n+4)^2} & \dots & \dfrac{n^2}{(n+2p-2)^2} \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \mu_{p-1} & \dfrac{n^{p-1}}{(n+2)^{p-1}} & \dfrac{n^{p-1}}{(n+4)^{p-1}} & \dots & \dfrac{n^{p-1}}{(n+2p-2)^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Théorème II (extension du théorème de M. E.-E. Levi. — *Soit* $u(P)$ *une fonction sommable dans* D. ***Si la relation précédente*** *est satisfaite, quel que soit* P *dans* D, *et* ***l'hypersphère*** *de centre* P, *intérieure à* D, *la fonction* $u(P)$ *est* ***harmonique*** *d'ordre* p *dans le domaine considéré* (¹).

La démonstration du premier théorème se fait en écrivant les formules (9) pour $s = 0, 1, 2, \dots, p$, et en éliminant Δu, $\Delta^2 u$, ..., $\Delta^{p-1} u$ entre les $(p+1)$ formules écrites. Le second théorème peut se démontrer en suivant la même voie que pour $n = 2$ (²). Mais il résultera aussi des considérations développées plus loin (*voir* n° 6).

II. — Limitation des dérivées partielles. Extension des théorèmes de Liouville et de M. Montel.

3. La formule (10) peut s'écrire

$$u(P) = A^0_{n,p}\mu_0 + A^1_{n,p}\mu_1 + \dots + A^{p-1}_{n,p}\mu_{p-1},$$

(¹) Tout récemment, M. Ghermanesco a utilisé nos moyennes μ_s pour étendre les théorèmes I et II aux fonctions méta-harmoniques d'ordre p. Voir *Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 197.

(²) Mémoire cité.

les A étant des coefficients numériques; ou encore

$$u(\mathrm{P}) = \mathrm{A}^0_{n,p}\mu_1 + \mathrm{A}^1_{n,p}\mu_2 + \ldots + \mathrm{A}^{p-1}_{n,p}\mu_p.$$

L'expression de l'une quelconque des moyennes, par exemple $\mu_s(u;\mathrm{R})$, est

$$\mu_s(u;\mathrm{R}) = \frac{n^{s-1}}{v_n \mathrm{R}^n}\int_0^{\mathrm{R}} \frac{d\rho_1}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\frac{d\rho_2}{\rho_2}\cdots\int_0^{\rho_{s-2}}\frac{d\rho_{s-1}}{\rho_{s-1}}\int_{\mathrm{S}_{\rho_{s-1}}(\mathrm{P})} u\,dv,$$

où $v_n = v_n(1)$. On en déduira

$$\frac{\partial\mu_s(u;\mathrm{R})}{\partial x_i} = \frac{n^{s-1}}{v_n \mathrm{R}^n}\int_0^{\mathrm{R}} \frac{d\rho_1}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\frac{d\rho_2}{\rho_2}\cdots\int_0^{\rho_{s-2}} d\rho_{s-1}\int_{\mathrm{S}_1(\mathrm{P})} u\,\alpha_i\,d\omega,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant les cosinus directeurs du rayon de l'hypersphère-unité $\mathrm{S}_1(\mathrm{P})$, aboutissant à l'élément $d\omega$. Si alors, $\mathrm{M_D}$ désigne la borne supérieure de $|u|$ dans le domaine D, on aura

$$\left|\frac{\partial\mu_s(u;\mathrm{R})}{\partial x_i}\right| < \frac{n^{s-1}\sigma_n}{v_n \mathrm{R}^{n-1}}\mathrm{M_D} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Le second membre de cette inégalité est indépendant de i. En posant alors

$$\mathrm{K}^p_n = \frac{\sigma_n}{v_n}(|\mathrm{A}^0_{n,p}| + n|\mathrm{A}^1_{n,p}| + \ldots + n^{p-1}|\mathrm{A}^{p-1}_{n,p}|),$$

on aura, quel que soit i,

$$\left|\frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial x_i}\right| < \frac{1}{\mathrm{R}^{n-1}}\mathrm{K}^p_n\,\mathrm{M_D}. \tag{11}$$

Dans ces inégalités, R représente le rayon de l'hypersphère $\mathrm{S_R}(\mathrm{P})$, supposée *intérieure* au domaine D. Si alors, on désigne par $\delta(\mathrm{P})$ la distance du point P à la frontière de D, et si l'on remarque que les premiers membres des inégalités (11) sont indépendants de R, on obtient les inégalités fondamentales suivantes :

$$\boxed{\left|\frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial x_i}\right| < \frac{1}{[\delta(\mathrm{P})]^{n-1}}\mathrm{K}^p_n\,\mathrm{M_D}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{12}$$

On en déduit les conséquences suivantes :

Théorème III (extension d'un théorème de M. Montel) [1]. — *Si des fonctions harmoniques d'ordre p sont bornées dans* D, *ces fonctions sont également continues dans l'intérieur de* D, *et les dérivées partielles d'un même ordre sont aussi également continues.*

Théorème IV (*Idem*). — *Soit*

$$u_1(P), \quad u_2(P), \quad \ldots, \quad u_\nu(P), \quad \ldots$$

une suite de fonctions harmoniques d'ordre p bornées dans D *dans leur ensemble. Si cette suite est convergente dans* D, *elle convergera uniformément dans l'intérieur de* D *vers une fonction* $u(P)$, *harmonique d'ordre p. De plus, toute dérivée partielle de* $u_\nu(P)$ *convergera uniformément vers la dérivée du même ordre de* $u(P)$.

Ces deux théorèmes se démontrent de la même manière que dans le cas du plan [2].

Théorème V (extension du théorème de Liouville). — *Une fonction harmonique d'ordre p, bornée dans tout l'espace, est une constante.*

Supposons, en effet, que le domaine D augmente indéfiniment, en tendant à remplir tout l'espace. Par hypothèse, M_D reste borné, tandis que $\delta(P)$ augmente indéfiniment. Les formules (12) donneront

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

quel que soit P; c'est-à-dire que $u(P)$ est une constante.

III. — Fonctions sousharmoniques d'ordre p.

4. Désignons par $V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)$, le déterminant de Vandermonde des quantités écrites entre parenthèses. Si l'on

---

[1] Paul Montel, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Thèse* et *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXIV, 1907).

[2] Mémoire cité, p. 85-86.

convient de considérer les indices des quantités μ_s comme des puissances symboliques, le déterminant du second membre de (10) pourra aussi s'écrire symboliquement $V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)$. La relation (10) pourra encore s'écrire

$$(10') \qquad u(P) = \frac{V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}.$$

Appelons fonction *sousharmonique d'ordre p* dans un domaine D toute fonction $u(P)$ pour laquelle on a, en tout point du domaine,

$$(13) \qquad u(P) \leqq \frac{V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right)},$$

pour R suffisamment petit. Si l'inégalité contraire est vérifiée, la fonction sera *surharmonique d'ordre p*.

Théorème VI. — *Si la fonction* $u(P)$, *sousharmonique d'ordre p dans le domaine* D, *possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre* $2p$ *inclusivement on aura, dans ce domaine,*

$$(-1)^p \Delta^p u < 0.$$

Réciproquement, si la relation précédente est vérifiée dans D, *la fonction* $u(P)$ *est sousharmonique d'ordre p dans ce domaine.*

Tout d'abord, vu la continuité des dérivées partielles d'ordre $2p$, on peut poser

$$(\Delta^p u)_{P_s^p} = \Delta^p u(P) + \varepsilon_s^p(R),$$

$\varepsilon_s^p(R)$ tendant vers zéro avec R. Alors, en éliminant les quantités Δu, $\Delta^2 u$, ..., Δ^{p-1} entre les $p+1$ premières relations (9), on obtient

$$\begin{aligned} V\left(1, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right) & u(P) \\ - V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right) & + a_{n,p} R^{2p} \\ \times V\left(\frac{n}{n+2p}, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2p-2}\right) & \Delta^p u + R^{2p} \varepsilon(R) H = 0, \end{aligned}$$

$\varepsilon(R)$ tendant vers zéro avec R, et H restant fini pour $R = 0$. Or, on a, tout d'abord,

$$V\left(\frac{n}{n+2p}, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)$$
$$= (-1)^{p-1} V\left(\frac{n}{n+2}, \frac{n}{n+4}, \ldots, \frac{n}{n+2p}\right);$$

d'autre part, les deux expressions

$$V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right) \quad \text{et} \quad V\left(\frac{n}{n+2}, \frac{n}{n+4}, \ldots, \frac{n}{n+2p}\right)$$

ont le même signe, celui de $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$. La relation précédente peut donc s'écrire

$$(14) \qquad u(P) - \frac{V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)} = (-1)^p C_{n,p} R^{2p} \Delta^p u + R^{2p} \varepsilon L,$$

avec

$$(15) \qquad C_{n,p} = a_{n,p} \frac{V\left(\frac{n}{n+2}, \frac{n}{n+4}, \ldots, \frac{n}{n+2p}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)},$$

c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de dire, $C_{n,p} > 0$. Cette relation démontre le théorème. En effet, on peut prendre R suffisamment petit pour que le terme $R^{2p}\varepsilon L$ soit négligeable vis-à-vis des autres, et alors, pour que la relation (14) puisse avoir lieu pour ces valeurs de R, il faut et il suffit que l'on ait

$$(16) \qquad (-1)^p \left[u(P) - \frac{V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)} \right] \Delta^p u > 0.$$

C. Q. F. D.

Pour $p = 1$, on obtient une proposition connue de M. Littlewood.

5. Posons, pour abréger,

$$\nabla^p(u, R) = u(P) - \frac{V\left(\mu, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p-2}\right)}{V\left(1, \frac{n}{n+2}, \ldots, \frac{n}{n+2p+2}\right)}.$$

La formule (14) montre que l'on a

$$\Delta^p u = \frac{(-1)^p}{C_{n,p}} \lim_{R \to 0} \frac{\nabla^p(u, R)}{R^{2p}}. \tag{17}$$

Cette propriété nous conduit à la définition d'un laplacien généralisé d'ordre p, dans le cas où la fonction $u(P)$ est simplement supposée sommable dans D. En effet, dans ce cas, on peut former l'expression

$$\frac{(-1)^p}{C_{n,p}} \frac{\nabla^p(u; R)}{R^{2p}}.$$

Si cette expression a une limite pour $R = 0$, cette limite sera appelée laplacien généralisé d'ordre p de la fonction $u(P)$. Cette définition rappelle la définition directe de la dérivée d'ordre p d'une fonction d'une seule variable, et la quantité $\nabla^p(u; R)$ joue précisément ici le rôle de la $p^{\text{ième}}$ différence pour les fonctions d'une variable.

6. Les formules (14) ou (17) peuvent servir à donner une nouvelle démonstration du théorème II. Supposons, en effet, que la fonction $u(P)$, sommable dans D, satisfasse, dans ce domaine, à la relation

$$\nabla^p(u; R) = 0,$$

quel que soit R, et l'hypersphère $S_R(P)$ intérieure à D.

On montrera, comme dans notre premier Mémoire, que $u(P)$ possède, dans D, des dérivées partielles de tous les ordres; donc, en particulier, $\Delta^p u$ existe. Après quoi, la formule (17) donnera tout de suite

$$\Delta^p u = 0.$$

7. Donnons une dernière application de la formule (14).

Théorème VII. — *A tout entier positif* p, *on peut faire correspondre un nombre positif* R_p, *tel que la différence*

$$\nabla^p(u; r) - \nabla^{p+q}(u; r)$$

ait, pour $r < R_p$, *le signe de* $\nabla^p(u; r)$ *quel que soit* q.

Il suffit, en effet, d'écrire la formule (14) pour p et pour $p + q$, de faire la différence et de tenir compte du théorème VI.

Comme application de ce théorème, prenons une fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, holomorphe dans un domaine D du plan. On aura

$$\Delta |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$$

et, en général,

$$\Delta^p |f(z)|^2 = 2^{2p} |f^{(p)}(z)|^2 > 0.$$

En appliquant les théorèmes VI et VII, on obtiendra le résultat suivant :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans D. *A tout entier positif p, on peut faire correspondre un nombre positif R_p, tel que l'on ait*

$$(-1)^p \nabla^p (|f(z)|^2; r) > 0,$$

dès que $r < R_p$.

En particulier, on aura, en posant $z' = x' + iy'$,

$$\frac{2}{\pi r^2} \iint_{C_r(x,y)} |f(z')|^2 \, dx' \, dy' - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{\theta})|^2 \, d\theta$$
$$< |f(z)|^2 < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta,$$

pour r inférieur à une certaine valeur R finie.

IV. — Fonctions H_{mn} d'ordre p.

8. Nous allons considérer un espace à $m + n$ dimensions, lieu des points $P(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dans la variété $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ de cet espace, nous prendrons l'hypersphère $S_m(R)$ de centre $(x_1, x_2, \dots x_m)$ et de rayon R, et dans la variété $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ nous prendrons l'hypersphère $S_n(R')$ de centre $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ et de rayon R'. L'ensemble des points $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ tels que le point $(X_1, X_2, \dots, X_m, 0, \dots, 0)$ est non extérieur à l'hypersphère $S_m(R)$ et le point $(0, 0, \dots, 0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ non extérieur à l'hypersphère $S_n(R')$, constitue dans l'espace à $m + n$ dimensions un domaine fermé, qu'on appelle un *cylindroïde*. Nous dirons, pour mieux préciser, *cylindroïde* (m, n), ou C_{mn}. Le point $P(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ sera appelé *centre* du C_{mn}.

Cela étant, soit $u(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = u(P)$ une fonction quelconque, possédant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $2p$, inclusivement. Posons

$$\Delta_m u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta'_n u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}, \qquad \Delta_{m+n} u = \Delta_m u + \Delta'_n u.$$

Nous désignerons aussi, respectivement : 1° par $\mu_0(u;\,R)$, $\mu_1(u;\,R)$, ..., $\mu_i(u;\,R)$, ... les moyennes successives de $u(P)$ dans $S_m(R)$; 2° par $\nu_0(u;R')$, $\nu_1(u;\,R')$, ..., $\nu_j(u;\,R')$, ... les moyennes successives de $u(P)$ dans $S_n(R')$. Enfin, nous introduirons, comme dans le premier paragraphe, les opérateurs $I''_s[\varphi(R)]$ et $J''_s[\psi(R')]$. Le second sera défini par les relations (2), (3) et (4); le premier, par les relations obtenues de celles-ci en remplaçant n par m.

L'opération

$$\nu_j[\mu_i(u;\,R);\,R'] = \nu_j\mu_i(u;\,R,\,R') = \nu_j\mu_i$$

sera appelée *produit* des deux moyennes μ_i et ν_j. Dans des conditions très larges, où l'interversion des intégrales est assurée, ce produit est commutatif, c'est-à-dire on a $\nu_j\mu_i = \mu_i\nu_j$.

Proposons-nous, tout d'abord, de trouver le développement de $\nu_j\mu_i$ suivant les puissances de R et R'. On a, en appliquant la formule (8),

$$\mu_i(u;R) = u(P) + \sum_{h=1}^{p-1} a_{mh}\frac{m^i}{(m+2h)^i} R^{2h}(\Delta_m^h u)_P + \frac{1}{(m-2)^p} I''_i[\mu_0(\Delta_m^p u;R)].$$

Pour former $\nu_j\mu_i(u;\,R,\,R')$ il suffira donc de savoir former

$$\nu_j(u;\,R'),\quad \nu_j(\Delta_m u;\,R'),\quad \ldots,\quad \nu_j(\Delta_m^{p-1} u;\,R)$$

et

$$\nu_j\{I''_i[\mu_0(\Delta_m^p u;\,R)];\,R'\}.$$

On a, tout d'abord, pour ce dernier terme, en appliquant la formule de la moyenne à l'opérateur intégral I''_i,

$$\nu_j\{I''_i[\mu_0(\Delta_m^p u;\,R);R']\} = a_{mp}\frac{m^i(m-2)^p}{(m+2p)^i} R^{2p}\nu_j[\mu_0(\Delta_m^p u;\,\theta''_i R);\,R']$$
$$(0 < \theta''_i < 1).$$

d'où une seconde application de la formule de la moyenne donnera

$$\nu_j \left\{ \mathrm{I}_i^p[\mu_0(\Delta^p u;\ \mathrm{R});\ \mathrm{R}'] \right\} = a_{m,p} \frac{m^i(m-2)^p}{(m+2p)^i} \mathrm{R}^{2p}(\Delta_m^p u)_{\mathrm{Q}},$$

Q étant un point intérieur au C_{mn}.

Pour les autres termes, la formule (8) donnera successivement

$$\nu_j(u;\mathrm{R}') = u(\mathrm{P}) + \sum_{k=1}^{p-1} a_{nk} \frac{n^j}{(n+2k)^j} \mathrm{R}'^{2k}(\Delta'^k_n u)_{\mathrm{P}} + \frac{1}{(n-2)^p} \mathrm{J}_j^p[\nu_0(\Delta'^p_n u;\ \mathrm{R}')],$$

$$\nu_j(\Delta_m u;\ \mathrm{R}') = \Delta_m u(\mathrm{P}) + \sum_{k=1}^{p-2} a_{n,k} \frac{n^j}{(n+2k)^j} \mathrm{R}'^{2k}(\Delta'^k_n u)_{\mathrm{P}} + \frac{1}{(n-2)^{p-1}} \mathrm{J}_j^{p-1}[\nu_0(\Delta'^{p-1}_n \Delta_m u;\ \mathrm{R}')],$$

. . . . ,

$$\nu_j(\Delta_m^{p-1};\ \mathrm{R}') = \Delta_m^{p-1} u(\mathrm{P}) + \frac{1}{n-2} \mathrm{J}_j[\nu_0(\Delta'_n \Delta_m^{p-1} u;\mathrm{R}')].$$

On obtiendra donc finalement, en appliquant à chaque opérateur intégral J la formule de la moyenne,

$$(18)\quad \nu_j \mu_i(u;\ \mathrm{R},\ \mathrm{R}') = {\sum_{h=0}^{p}}' \ {\sum_{k=0}^{p-h}}' a_{mh} a_{nk} \frac{m^i n^j}{(m+2h)^i (n+2k)^j} \mathrm{R}^{2h} \mathrm{R}'^{2k} \Delta_m^h \Delta'^k_n u$$

$$(a_{m,0} = 1,\ a_{n,0} = 1),$$

les accents sur les signes de sommation indiquant que les divers laplaciens mixtes $\Delta_m^h \Delta'^k_n u$ sont calculés au centre P du C_{mn}, sauf ceux pour lesquels $h + k = p$, qui sont calculés, chacun, en un point déterminé, intérieur au C_{mn} [1].

En posant

$$\varphi^s_{mn}(\mathrm{R},\ \mathrm{R}';\ \Delta_m u,\ \Delta'_n u) = \sum_{h=0}^{s} a_{mh} a_{n,s-h} \frac{m^i n^j}{(m+2h)^i (n+2s-2h)^j} \mathrm{R}^{2h} \mathrm{R}'^{2s-2h} \Delta_m^h \Delta'^{s-h}_n u,$$

---

[1] Il est évident que la formule (18) contient une arbitraire, c'est le nombre p. En conséquence, le développement de $\nu_j \mu_i$ pourra être poussé aussi loin que l'existence des dérivées successives de u le permettra; on pourra même faire $p = \infty$, si la série ainsi obtenue est convergente pour $\mathrm{R} \neq 0$ et $\mathrm{R}' \neq 0$.

la formule (18) peut encore s'écrire

$$(18') \qquad \nu_j \mu_i(u; R, R') = u(P) + \sum_{s=1}^{p}{}' \varphi^s_{mn}(R, R'; \Delta u, \Delta' u),$$

l'accent ayant la même signification que plus haut. Remarquons que φ^s_{mn} est un polynome de degré s en R^2 et R'^2 ; c'est, en même temps, un polynome symbolique de degré s en $\Delta_m u$ et $\Delta'_n u$.

Parmi les produits $\nu_j \mu_i$, il y en a quatre qui ont une signification géométrique, ce sont $\nu_0 \mu_0$, $\nu_1 \mu_0$, $\nu_0 \mu_1$, $\nu_1 \mu_1$. Le dernier représente la moyenne spatiale de u dans C_{mn} ; le premier, la moyenne des valeurs de u le long des arêtes (à $m+n-2$) dimensions de C_{mn}. Les deux autres représentent des moyennes prises sur des parties bien déterminées de la *périphérie* de C_{mn}.

Dans la suite, nous entendrons par moyenne, dans un cylindroïde (m, n), l'un quelconque des produits fonctionnels $\nu_0 \mu_0$, $\nu_0 \mu_1$, $\nu_1 \mu_0$, $\nu_1 \mu_1$.

9. Quelles sont les conditions pour que le développement (18') soit limité, par exemple qu'il s'arrête aux p premiers termes ? Il suffit, évidemment, pour cela, que l'on ait

$$(19) \quad \Delta^p_m u = 0, \qquad \Delta^{p-1}_m \Delta'_n u = 0, \qquad \Delta^{p-2}_m \Delta'^2_n u = 0, \qquad \dots \qquad \Delta'^p_n u = 0.$$

Nous verrons dans un instant (§ 11) que ces conditions sont aussi nécessaires. Toute fonction vérifiant le système (19) sera appelée *fonction* H_{mn} *d'ordre* p ; cela pour éviter la locution trop longue : fonction harmonique d'ordre p, à la fois par rapport aux m variables x et aux n variables y. Pour $p=1$ on obtient les fonctions doublement harmoniques ordinaires

$$\Delta_m u = 0, \qquad \Delta'_n u = 0.$$

Nous écrirons encore H_m au lieu de $H_{m,0}$ ou $H_{0,m}$.

Théorème VIII. — *Toute fonction* H_{mn} *d'ordre* p *est une fonction* H_{m+n} *d'ordre* p.

Cela résulte immédiatement du système (19) et de l'identité suivante, facile à établir :

$$\Delta^p_{m+n} u = (\Delta_m + \Delta'_n)^p u = \Delta^p_m u + C^1_p \Delta^{p-1}_m \Delta'_n u + \dots + \Delta'^p_n u.$$

10. Le théorème de M. E.-E. Levi s'étend aussi aux fonctions doublement harmoniques :

THÉORÈME IX. — *Soit* $u(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *une fonction sommable dans un domaine* D. *Si l'on a*

$$u = \nu_0\mu_0 = \mu_0\nu_0, \tag{20}$$

quels que soient le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *dans* D, *et* R *et* R′, *la fonction u est doublement harmonique en* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *et* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Dans la relation $u = \nu_0\mu_0$, multiplions les deux membres par $r^{n-1}\,dr$ et intégrons entre zéro et R′. Nous obtenons

$$u = \nu_1\mu_0. \tag{21}$$

On obtiendrait, de même,

$$u = \mu_1\nu_0. \tag{22}$$

Cela étant, soient respectivement

$$\mathrm{M}(x_1 + \mathrm{R}\alpha_1, \ldots, x_m + \mathrm{R}\alpha_m, y_1 + \mathrm{R}'\beta_1, \ldots, y_n + \mathrm{R}'\beta_n)$$

un point de la frontière du C_{mn}, $d\sigma_m$ et $d\sigma_n$ des éléments de la frontière des hypersphères $\mathrm{S}_m(\mathrm{R})$ et $\mathrm{S}_n(\mathrm{R}')$. Les relations (20) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} u(\mathrm{P}) &= \frac{1}{v'_m(\mathrm{R})v'_n(\mathrm{R}')}\int_{\mathrm{S}_n(\mathrm{R}')} d\sigma_n \int_{\mathrm{S}_m(\mathrm{R})} u(\mathrm{M})\,d\sigma_m \\ &= \frac{1}{v'_m(\mathrm{R})v'_n(\mathrm{R}')}\int_{\mathrm{S}_m(\mathrm{R})} d\sigma_m \int_{\mathrm{S}_n(\mathrm{R}')} u(\mathrm{M})\,d\sigma_n, \end{aligned}$$

$v'_m(\mathrm{R})$ et $v'_n(\mathrm{R}')$ étant respectivement les dérivées de $v_m(\mathrm{R})$ et $v_n(\mathrm{R}')$.

En répétant alors le raisonnement de M. E.-E. Levi dans la Note citée [1], on trouvera que $u(\mathrm{P})$ admet des dérivées partielles tant par rapport aux variables x que par rapport aux variables y. On aura, par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{R}}{v'_m v'_n}\int_{\mathrm{S}_m(\mathrm{R})} \alpha_i\,d\sigma_m \int_{\mathrm{S}_n(\mathrm{R}')} u(\mathrm{M})\,d\sigma_n, \tag{23}$$

---

[1] *Voir* notre premier Mémoire.

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \mu_1\left(\frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}\right)$$

et, puisque u est à dérivée continue par rapport à x_i,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \mu_1 \nu_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i};\ \mathrm{R},\ \mathrm{R}'\right).$$

C'est la formule (21), où u est remplacé par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. On peut alors appliquer encore une fois la formule (23) et obtenir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\mathrm{R}}{v'_m v'_n}\int_{\mathrm{S}_m(\mathrm{R})} x_i\, d\sigma_m \int_{\mathrm{S}_n(\mathrm{R}')} \frac{\partial u(\mathrm{M})}{\partial x_i}\, d\sigma_n,$$

d'où

$$\Delta_m u = \frac{\mathrm{R}}{v'_m v'_n}\int_{\mathrm{S}_m(\mathrm{R})} \frac{\partial}{\partial \mathrm{R}}\left(\int_{\mathrm{S}_n(\mathrm{R}')} u(\mathrm{M})\, d\sigma_n\right) d\sigma_m = \frac{\mathrm{R}}{v'_m v'_n}\, \frac{\partial(\nu_0\mu_0)}{\partial \mathrm{R}}$$
$$= \frac{\mathrm{R}}{v'_m v'_n}\, \frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial \mathrm{R}} = 0.$$

On trouverait, de même, $\Delta'_n u = 0$, ce qui démontre le théorème. Pour $m = n = 2$, il a été démontré par M. Luigi Amoroso ([1]).

Remarque. — Si l'un des nombres m et n est égal à l'unité, l'une des moyennes μ_0, ν_0 se réduit à une somme de deux termes. L'hypothèse $\nu_0\mu_0 = \mu_0\nu_0$ est alors satisfaite d'elle-même.

11. **Théorème X.** — *Si le produit $\nu_j\mu_i$ est un polynome de degré $p-1$ en R^2 et R'^2 (i et j quelconques), la fonction $u(\mathrm{P})$ est une fonction H_{mn} d'ordre p.*

C'est l'extension du théorème de M. Fr. Sbrana ([2]) aux fonctions H_{mn}.

Tout d'abord, il est facile de voir que si $\nu_j\mu_i$ est un polynome de degré $p-1$ en R^2 et R'^2, il en sera de même de $\nu_1\mu_1$ et $\nu_0\mu_0$.

([1]) Luigi Amoroso, *Sopra un sistema di equazioni alle derivate parziali che ammetono un teorema della media* (*Recondiconti dei Lincei*, vol. XXIII, 1914, p. 293-304).

([2]) *Voir* notre premier Mémoire.

On aura donc, par hypothèse,

$$\nu_0\mu_0 = \sum_{s=0}^{p-1}\left(\sum_{h=0}^{s} a_{mh}\,a_{n,s-h}\,\mathrm{R}^{2h}\,\mathrm{R}'^{2s-2h}\,\Delta_m^h\,\Delta_n'^{s-h}\,u\right),$$

$$\nu_1\mu_1 = \sum_{s=0}^{p-1}\left[\sum_{h=0}^{s} a_{mh}\,a_{n,s-h}\,\frac{mn}{(m+2h)(n+2s-2h)}\,\mathrm{R}^{2h}\,\mathrm{R}'^{2s-2h}\,\Delta_m^h\,\Delta_n'^{s-h}\,u\right].$$

D'autre part, en répétant le raisonnement de M. Fr. Sbrana dans la Note citée, on peut établir les identités suivantes :

$$\Delta_m(\nu_1\mu_1) = \mathrm{R}\,\frac{\partial(\nu_0\mu_0)}{\partial\mathrm{R}}, \qquad \Delta_n'(\nu_1\mu_1) = \mathrm{R}'\,\frac{\partial(\nu_0\mu_0)}{\partial\mathrm{R}'}.$$

En introduisant dans ces identités les valeurs ci-dessus de $\nu_1\mu_1$ et $\nu_0\mu_0$ on trouvera, par identification, que u doit vérifier le système (19).

12. M. V. Volterra a démontré que si une fonction u continue coïncide sur la frontière d'un domaine fermé avec une fonction harmonique, et que cette fonction est égale en chaque point intérieur à la moyenne de ses valeurs sur une *seule* hypersphère centrée en ce point et intérieure au domaine considéré, la fonction u est harmonique dans ce domaine ([1]). La restriction imposée dans l'énoncé primitif par M. Volterra a été enlevée par M. G. Vitali ([2]). Il existe un théorème analogue pour les fonctions H_{mn}.

Théorème XI. — *Supposons que les valeurs d'une fonction $u(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ continue dans un domaine fermé* D *coïncident sur la frontière de ce domaine avec les valeurs d'une fonction* H_{mn}.

Si la valeur de u, en chaque point intérieur, est égale à la moyenne de ses valeurs sur un seul C_{mn} *centré en ce point et intérieur à* D, *la fonction u est* H_{mn} *dans* D.

Soient, respectivement, $\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ la

---

([1]) Vito Volterra, *Alcune osservazioni sopra proprieta atti ad individuare una funzione armonica* (*Rendiconti dei Lincei*, vol. XVIII, 1909, p. 263-266).

([2]) G. Vitali, *Sopra una proprieta caratteristica delle funzioni armoniche* (*Rendiconti dei Lincei*, vol. XXI, 1912, p. 315-320).

fonction H_{mn} donnée, et $v = u - U$. La fonction v est nulle sur la frontière de D, elle aura donc un maximum ou un minimum à l'intérieur de D. Supposons, par exemple, qu'elle ait un maximum $\mathfrak{M}$, atteint en un point P, nécessairement intérieur. Soient R(P) et R'(P) les *rayons* du cylindroïde attaché au point P. On aura, par exemple,

$$u(\mathrm{P}) = \mathfrak{M} = \nu_0\mu_0[u(\mathrm{P});\ \mathrm{R}(\mathrm{P}),\ \mathrm{R}'(\mathrm{P})],$$

d'où l'on déduit qu'il y a une infinité de points sur ce cylindroïde, où la fonction v prend la valeur $\mathfrak{M}$. Soit P' un de ces points, choisi de manière à être plus rapproché de la frontière de D que le point P. On déduira de la même manière que la fonction v prendra la valeur $\mathfrak{M}$ en une infinité de points sur le cylindroïde attaché au point P'. On obtient ainsi une suite de points intérieurs

$$\mathrm{P},\quad \mathrm{P}',\quad \mathrm{P}'',\quad \ldots,$$

tendant vers la frontière de D et où la fonction v prend la valeur $\mathfrak{M}$. Il en résulte, en vertu de la continuité de v dans le domaine fermé D, que l'on doit avoir $\mathfrak{M} = 0$. De même, si v admet un minimum dans D, ce minimum doit être nul, donc $u \equiv U$,

C. Q. F. D.

13. Il existe, pour les fonctions H_{mn} d'ordre p des théorèmes analogues aux théorèmes I et II. En d'autres termes, une fonction H_{mn} peut être caractérisée par une relation linéaire et homogène entre la fonction même et un certain nombre de produits $\nu_j\mu_i$. Mais le nombre de ces quantités, nécessaires pour la formation de ladite relation, n'est plus égal à p comme dans le cas des fonctions simplement harmoniques d'ordre p.

Les quantités à éliminer entre les expressions qui donnent les développements de $\nu_0\mu_0$, $\nu_0\mu_1$, etc., sont

$$\Delta_m u,\quad \Delta'_n u,\quad \Delta_m^2 u,\quad \Delta_m\Delta'_n u,\quad \Delta'^2_n u,\quad \ldots,\quad \Delta'^{p-1}_n u,$$

leur nombre est $\frac{p(p+1)}{2} - 1$. Il faut donc $\frac{p(p+1)}{2}$ produits $\nu_j\mu_i$ pour la formation de la relation linéaire et homogène. Ce nombre est diminué sensiblement dans le cas où $m = n$, car φ^s_{mn} devient symétrique en $\Delta_m u$ et $\Delta'_n u$. Nous allons donner un exemple simple de ces considérations. Soit $p = 2$. On aura [1]

$$\nu_0\mu_0 = u + a_{m,1}\,R^2\Delta u + a_{n,1}\,R'^2\Delta' u,$$
$$\nu_1\mu_1 = u + \frac{m}{m+2}\,a_{m,1}\,R^2\Delta u + \frac{n}{n+2}\,a_{n,1}\,R'^2\Delta' u,$$
$$\nu_2\mu_2 = u + \frac{m^2}{(m+2)^2}\,a_{m,1}\,R^2\Delta u + \frac{n^2}{(n+2)^2}\,a_{n,1}\,R'^2\Delta' u,$$

d'où, en éliminant Δu et $\Delta' u$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{m}{m+2} & \dfrac{n}{n+2} \\ 1 & \dfrac{m^2}{(m+2)^2} & \dfrac{n^2}{(n+2)^2} \end{vmatrix} u = \begin{vmatrix} \nu_0\mu_0 & 1 & 1 \\ \nu_1\mu_1 & \dfrac{m}{m+2} & \dfrac{n}{n+2} \\ \nu_2\mu_2 & \dfrac{m^2}{(m+2)^2} & \dfrac{n^2}{(n+2)} \end{vmatrix}.$$

Réciproquement, cette relation caractérise les fonctions H_{mn} d'ordre 2, si $m \neq n$. Si $m = n$, elle se réduit à une identité; mais on a, dans ce cas,

$$\nu_0\mu_0 = u + a_{n,1}(R^2\Delta u + R'^2\Delta' u),$$
$$\nu_1\mu_1 = u + \frac{n}{n+2}\,a_{n,1}(R^2\Delta u + R'^2\Delta u)$$

d'où, en éliminant, cette fois-ci, toute la parenthèse,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{n}{n+2} \end{vmatrix} u = \begin{vmatrix} \nu_0\mu_0 & 1 \\ \nu_1\mu_1 & \dfrac{n}{n+2} \end{vmatrix}.$$

Cette relation doit remplacer la précédente dans le cas où $m = n$.

14. Il y a un cas particulier important où le système (19) est intégrable. C'est le cas où l'un des deux nombres m, n est égal à l'unité. Soit, par exemple, $n = 1$. Pour avoir une image géométrique réelle, nous prendrons $m = 2$, bien que ce ne soit pas absolument nécessaire.

Nous considérons donc une fonction $u(x, y, z)$, telle que l'on ait (en écrivant Δ au lieu de Δ_2)

$$\Delta^p u, \qquad \Delta^{p-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \qquad \Delta^{p-2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right) = 0, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial^{2p} u}{\partial z^{2p}} = 0.$$

---

[1] Nous avons écrit, pour la simplicité, Δu et $\Delta' u$ au lieu de $A_m u$ et $\Delta'_n u$.

Ce système s'intègre facilement et donne

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{p} [h_i(x, y) z + k_i(x, y)] z^{2(p-i)},$$

$h_i(x, y)$ et $k_i(x, y)$ étant des fonctions harmoniques d'ordre i.

En particulier, pour $p = 1$, on aura

$$u(x, y, z) = h(x, y) z + k(x, y),$$

$h(x, y)$ et $k(x, y)$ étant harmoniques. Le cylindroïde C_{mn} devient ici un cylindre circulaire, aux génératrices parallèles à l'axe des z, et limité par deux sections droites dont la distance est $2R'$. Nous l'appellerons, pour abréger, cylindre vertical. Les quantités $\nu_0\mu_0$, $\nu_0\mu_1$, $\nu_1\mu_0$, $\nu_1\mu_1$ représentent ici, respectivement : la moyenne des valeurs sur les deux circonférences de base, la moyenne des valeurs sur les deux cercles de base, la moyenne des valeurs sur la surface latérale du cylindre, la moyenne des valeurs dans le cylindre tout entier. Ces considérations permettent facilement d'énoncer les théorèmes généraux IX, X, XI dans ce cas particulier. Nous avons donné ces énoncés dans notre Note des *Comptes rendus* du 7 décembre 1931, à laquelle nous renvoyons le lecteur.

15. Nous avons vu (théorème IX) que les fonctions H_{mn} d'ordre un sont caractérisées par la relation $u = \nu_0\mu_0$. Si, en tout point d'un domaine D fermé de l'espace à $m + n$ dimensions, on a

$$u \leqq \nu_0\mu_0,$$

pour R et R' suffisamment petits, nous dirons que u est une fonction *sous*-H_{mn} dans ce domaine. Si l'inégalité contraire a lieu, la fonction sera *sur*-H_{mn}. Par exemple, une fonction sous-H_{11} sera caractérisée par la propriété suivante : *La valeur de u en chaque point est inférieure à la moyenne de ses valeurs aux sommets d'un rectangle aux côtés parallèles aux axes et centré en ce point, dès que les dimensions de ce rectangle sont suffisamment petites.*

Ce sont les fonctions que M. Paul Montel a appelées *double-*

ment convexes (1). Le théorème de M. Montel (2), d'après lequel toute fonction doublement convexe est une fonction sousharmonique pour l'ensemble des variables, se généralise de la manière suivante :

THÉORÈME XII. — *Toute fonction sous*-H_{mn} *est une fonction sous*-H_{m+n}.

Pour avoir un support géométrique réel, nous esquisserons la démonstration pour $m = 2$, $n = 1$. La méthode (qui est celle que M. Montel a utilisée pour son théorème) restera la même dans le cas général.

Soit donc $u(x, y, z)$ une fonction de trois variables, jouissant de la propriété suivante : la moyenne de u en chaque point P est inférieure à la moyenne des valeurs sur les deux circonférences de base de tout cylindre vertical centré en P, dès que les dimensions de ce cylindre sont inférieures à un certain nombre positif k. Prenons alors une sphère S de centre P et de rayon $R < k$ et inscrivons dans cette sphère n cylindres verticaux, de rayons respectifs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Écrivons, pour chaque cylindre, l'inégalité correspondante, faisons la somme des n inégalités obtenues, divisons par n et passons à la limite. Nous obtenons

$$u(P) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_S u \, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément superficiel de la sphère. La fonction $u(P)$ est donc sousharmonique dans le domaine D (3).

16. Nous terminons par une application du dernier théorème. Soient $u(x, y)$ une fonction sousharmonique dans un domaine

---

(1) Paul MONTEL, *Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1928, p. 29-60).

(2) *Loc. cit.*

(3) Au moment de signer le *bon à tirer*, j'apprends que ce théorème a été donné aussi par M. Montel lui-même dans son Mémoire : *Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sousharmoniques*, paru dans les *Praktika* de l'Académie d'Athènes, t. 6, 1931 (séance du 5 novembre 1931), p. 374.

plan D et

$$v(x, y, R) = \int\int_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'.$$

Nous allons montrer que $v(x, y, R)$ *est une fonction sous-harmonique en* x, y, R. Posons à cet effet

$$w(x, y, R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta, y + R\sin\theta)\, d\theta.$$

D'après un théorème de M. Fr. Riesz ([1]), $w(x, y, R)$ est une fonction *croissante* de R. C'est évidemment aussi une fonction croissante de R^2. Or on a

$$v(x, y, R) = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} w(x, y, R)\, d(R^2),$$

donc, d'après un théorème de M. Paul Montel ([2]), $v(x, y, R)$ *est une fonction convexe de* R^2, donc aussi de R, puisque $R > 0$.

D'autre part, on a, par hypothèse de la sous-harmonicité de $u(x, y)$,

$$\frac{1}{\pi R^2} v(x, y, R) = \frac{1}{\pi R^2}\int\int_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' > u(x, y),$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{1}{\pi R^2}\int\int_{C_R(x,y)} v(x', y', R)\, dx'\, dy' > \int\int_{C_R(x,y)} u(x', y')\, dx'\, dy' = v(x, y, R),$$

c'est-à-dire que $v(x, y, R)$ *est sousharmonique en* x *et* y. Par conséquent, en vertu du théorème XII, $v(x, y, R)$ sera une fonction sousharmonique des trois variables x, y, R,

C. Q. F. D.

([1]) Fr. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel* (*Acta mathematica*, t. 48, 1928).

([2]) Paul Montel, *loc. cit.*