

BULLETIN DE LA S. M. F.

F.E. MYARD

Contribution à la géométrie des systèmes articulés

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 183-210

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__183_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__183_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE DES SYSTÈMES ARTICULÉS.

PAR M. F. E. MYARD.

Ce Mémoire est le résultat de recherches que j'ai faites sur la géométrie des systèmes articulés.

Il est formé par la réunion et le développement de diverses Notes, la plupart présentées par M. Maurice d'Ocagne à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, et reprises ici avec, généralement, plus de détails dans l'exposé mathématique.

Ce travail relève essentiellement du domaine spéculatif, et concerne surtout l'Étude des *chaînes fermées paradoxales*.

Et à ce propos, je vais, immédiatement et brièvement, rappeler quelques considérations s'y rapportant.

On sait que toute chaîne fermée qui contient moins de sept couples rotoïdes est, en principe, indéformable.

Toute chaîne fermée déformable qui possède moins de sept couples rotoïdes peut donc être dite *paradoxe*.

De ces chaînes paradoxales, il n'y a aucun exemple *intéressant* lorsque le système articulé a moins de quatre couples rotoïdes (*axes confondus*; ou *axes à l'infini*: *dégénérescence*).

Dans le cas de quatre couples rotoïdes, on connaît des chaînes déformables (donc paradoxales) qui sont *banales*: ainsi, lorsque les quatre axes d'articulation sont parallèles (quadrilatère articulé), ou lorsqu'ils sont concourants sur un même sommet (angle tétraèdre articulé, joint de Cardan). Mais en plus, les quatre couples n'étant ni parallèles ni concourants, il est une chaîne *non banale*, et même extrêmement curieuse, représentée par le Mécanisme de Bennett.

Or, jusqu'à ce jour il n'existait, à ma connaissance, *aucun*

(1) *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1194, 1352, 1527; 191, 1930, p. 830; 190, 1930, p. 1491.

exemple de chaîne fermée à cinq couples rotoïdes, déformable au premier degré de liberté ⁽¹⁾.

Ce qui suit va nous révéler *deux exemples de ces chaînes à cinq couples rotoïdes*, ainsi que deux exemples de chaînes fermées déformables et non banales, à six couples rotoïdes. Mais pour cela, commençons par un exposé préliminaire dont, ultérieurement, nous utiliserons les résultats, et relatif à la chaîne fermée à quatre couples rotoïdes, considérée comme étant dérivée de l'*isogramme torique*.

Sur les chaînes fermées à quatre couples rotoïdes non concourants, déformables au premier degré de liberté. Isogramme torique.

M. Raoul Bricard, dans une remarquable étude géométrique sur le tore ⁽²⁾, a fait ingénieusement apparaître le rapport existant entre le mécanisme de Bennett et la propriété du plan bitangent au tore exprimée par le théorème de Villarceau.

Je fus conduit, de mon côté, à envisager cette question d'une manière un peu différente et plus détaillée ⁽³⁾, *essentiellement en vue d'un autre objectif* qui est la résolution d'une *chaîne fermée déformable au premier degré de liberté, à cinq couples rotoïdes*. Le développement que voici va nous permettre diverses conclusions géométriques et algébriques, dont nous aurons besoin par la suite.

Soit un tore représenté (*fig. 1*), en projection oblique, par ses deux parallèles limites P_1 , P_2 , et son cercle générateur C . Soit A l'un des deux cercles d'intersection du tore et du plan bitangent de trace T . Soit, sur ce cercle A , un point S quelconque assujéti à se déplacer sur lui. Ce déplacement peut être obtenu en considérant S comme l'extrémité du rayon ΩS tournant autour de l'axe ΩX perpendiculaire au plan bitangent. Pareillement, ce déplacement peut être obtenu en considérant S comme un point assujéti à se

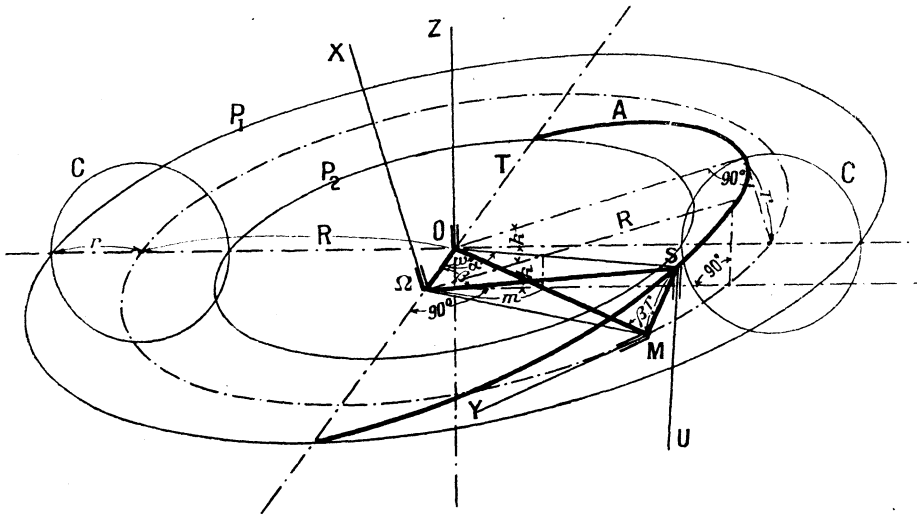
⁽¹⁾ Les chaînes à cinq couples parallèles, ou cinq couples concourants sur un même sommet, sont banales et déformables au deuxième degré de liberté.

⁽²⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5^e série, 3 mai 1925, p. 312.

⁽³⁾ A ce moment-là, j'ignorais l'étude rappelée ci-dessus; mais je tiens à remercier vivement M. Bricard pour les précieux conseils qu'il a bien voulu me donner au cours de ces divers travaux.

déplacer sur le tore (tout en restant dans le plan bitangent), c'est-à-dire comme un point situé à l'extrémité du rayon SM tournant autour de l'axe MY (qui lui est normal, et demeure situé dans le plan médian du tore), tandis que le rayon OM tourne autour de l'axe OZ du tore et décrit son plan médian.

Fig. 1.



Si donc nous matérialisons les droites $O\Omega$, ΩS , SM et OM par des barres rigides, nous voyons qu'il est possible d'avoir, *à priori*, un système articulé comprenant les trois couples rotoïdes ΩX , MY , OZ et le couple sphérique S .

Cette remarque est déjà curieuse, puisque tout système articulé (de ∞^1 positions) qui possède un couple sphérique, possède, en plus, quatre couples rotoïdes dans le cas général ⁽¹⁾.

Mais, en réalité, le couple S , apparemment sphérique, est tout simplement un couple rotoïde. En effet, considérons le tétraèdre $O\Omega SM$. Il a ses côtés opposés qui sont égaux deux à deux. Donc les deux triangles ΩOS et MOS (de côté commun OS) sont constamment égaux et disposés de manière à présenter un axe de symétrie normal au milieu de OS . Il en est de même des deux triangles $O\Omega M$ et ΩMS (de côté commun ΩM). Ce tétraèdre $O\Omega SM$

⁽¹⁾ Le cas particulier du *joint de Clémens* est un exemple.

est donc formé de deux paires de faces constamment égales et présentant un axe de symétrie (normal aux droites OS et ΩM , et passant par leur milieu).

Comme les deux faces inégales SMO et ΩOM restent constamment perpendiculaires (par construction), il en est de même des faces inégales $S\Omega O$ et ΩSM . Donc SM demeurant toujours dans un plan normal au plan décrit par le rayon ΩS , l'articulation S correspond à un couple rotoïde d'axe SU perpendiculaire à ΩS et contenu dans le plan bitangent.

Voyons le rapport des vitesses angulaires en considérant le système articulé comme un joint de transmission. Supposons la barre $O\Omega$ constituant le bâti. Soient OZ et ΩX les axes d'entrée et de sortie (inclinés l'un sur l'autre de l'angle k)

$$\frac{\sin[180 - (\alpha + \beta)]}{r} = \frac{\sin \alpha}{R}.$$

Or $R \sin k = r$, d'où

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin k \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \alpha} = \sin k.$$

Or $\tan \omega = \tan \alpha \cos k$, car $\tan \omega = \frac{m}{r}$ et $\tan \alpha = \frac{m}{\cos k \cdot r}$. d'où

$$\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \omega} \cos k = \sin k.$$

En différentiant

$$-\sin \beta d\beta + \left[\tan \omega \cos \beta d\beta - \frac{\sin \beta}{\cos^2 \omega} d\omega \right] \frac{\cos k}{\tan^2 \omega} = 0,$$

d'où, finalement,

$$\frac{d\beta}{d\omega} = - \frac{\sin \beta \cos k}{\sin^2 \omega \left[\sin \beta - \frac{\cos \beta \cos k}{\tan \omega} \right]}.$$

Si nous considérons maintenant le bâti constitué par la barre OM, les axes d'entrée et de sortie étant OZ et MY (axes perpendiculaires), nous aurons le même résultat puisque l'angle \widehat{SMO} est constamment égal à $\hat{\beta}$.

Il faut évidemment regarder cette chaîne, ou *isogramme torique déformable*, comme un cas particulier remarquable du mécanisme

de Bennett dans lequel l'isogramme est rectangle ⁽¹⁾. Mais, ainsi, ce mécanisme devient tout simple à concevoir — même dans le cas général où les dièdres de l'isogramme, égaux deux à deux, sont différents de 90° . (Je rappelle que les sinus des dièdres sont proportionnels aux arêtes opposées.)

Dans ce cas général, nous pouvons envisager l'existence d'un tore aplati sur lequel se déplace un point S assujéti à décrire un cercle analogue au cercle de Villarceau A. Et nous retrouvons, de cette façon, une propriété concernant les sections cycliques, et dont l'énoncé peut, en conséquence, se traduire instantanément ainsi : Étant donné un tore aplati, c'est-à-dire engendré par un cercle dont le plan est oblique sur l'axe de rotation mais rencontre le centre du tore (la génération étant double, c'est-à-dire produite aussi par un cercle symétriquement disposé, donc oblique en sens contraire), par chaque point de ce tore on peut faire passer cinq cercles qui sont : le parallèle du lieu, les deux cercles générateurs, et les deux cercles analogues à ceux de Villarceau (et qui sont également des cercles générateurs).

La propriété de la sphère bitangente au tore (théorème de Mannheim) peut aussi conduire à la réalisation de systèmes articulés.

**Premier exemple d'une chaîne fermée à cinq couples rotoïdes,
déformable au premier degré de liberté, ou *Chaîne* n° 1.**

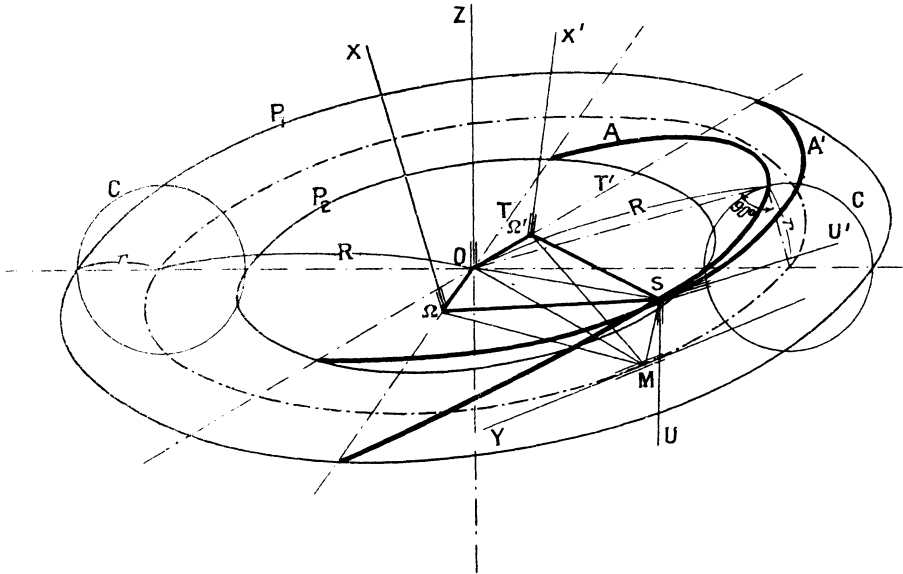
Reprenons un tore défini (*fig. 2*), en projection oblique, par ses deux parallèles limites P_1 , P_2 , et son cercle générateur C. Étant donnée la propriété du plan bitangent, nous pouvons considérer le tore comme étant engendré par l'un ou l'autre des deux cercles contenus dans un plan bitangent quelconque, et tournant autour de l'axe OZ. En particulier, nous pouvons envisager le cercle A' (qui est l'un des cercles d'intersection, avec le tore, du plan bitangent mobile, de trace T') de centre Ω' , animé de ce mouvement de rotation autour de l'axe OZ, et dire qu'il rencontre constamment le cercle A en un point mobile S (qui, par conséquent, va se déplacer simultanément sur ces deux cercles A et A').

⁽¹⁾ J'emploierai, indifféremment, et dans le même sens, les deux qualificatifs *torique* et *rectangle*, lorsqu'ils se rapporteront à l'isogramme articulé.

Il s'ensuit que nous pouvons, *à priori*, réaliser un système articulé comprenant trois couples rotoïdes OZ , ΩX , $\Omega' X'$ (ΩX et $\Omega' X'$ étant normaux, respectivement aux plans des cercles A et A') et le couple sphérique S .

En réalité, je vais montrer que le couple apparemment sphérique S se réduit à deux couples rotoïdes concourants.

Fig. 2.



En effet, nous avons vu que le système articulé $O\Omega SM$ était à quatre couples rotoïdes d'axes respectifs OZ , ΩX , SU et MY . Considérons donc la barre OM comme faisant partie du bâti. Si nous déformons l'isogramme torique $O\Omega SM$, le point Ω décrit un cercle autour de OZ (dans le plan moyen du tore) et le point S décrit un cercle d'axe MY et de plan normal au précédent.

Or, pareillement, nous pouvons considérer le système articulé $O\Omega' SM$, à quatre couples rotoïdes d'axes respectifs OZ , $\Omega' X'$, SU' et MY ($\Omega' X'$ étant normal au plan du cercle A' , et SU' étant normal au plan $MS\Omega'$).

Nous avons donc deux systèmes de droites (ou barres articulées) $O\Omega SM$ et $O\Omega' SM$, disposées toujours symétriquement par rapport au plan OSM , et présentant, en commun, la liaison OMS . Nous

pouvons, par conséquent, supprimer cette liaison commune OMS. Il nous restera en S un couple rotoïde SU pour le système SΩO, et le couple rotoïde SU' pour le système SΩ'O (les deux axes SU et SU' étant symétriquement disposés par rapport au plan SMO et faisant chacun un même angle constant avec l'axe MY). Donc, au total, un système articulé à cinq couples rotoïdes, à ∞¹ de positions et à plan de symétrie.

La démonstration peut être faite plus géométriquement. Considérant encore, dans le système articulé à quatre couples rotoïdes OΩSM, la barre OM comme étant le bâti, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant donnés deux cercles égaux de rayon r , et disposés perpendiculairement de manière que le plan de chacun contienne le centre de l'autre, la distance des centres étant R, si l'on assujettit une droite de longueur R à s'appuyer par ses extrémités sur ces deux cercles, cette droite engendre une surface réglée, dont les génératrices sont constamment normales aux génératrices correspondantes et respectives de deux hyperboloïdes de révolution ayant les cercles donnés pour cercles de gorge, les cônes directeurs correspondants ayant un demi-angle au sommet de valeur k défini par $\sin k = \frac{r}{R}$.

Considérant le deuxième système articulé OΩ'SM, nous voyons qu'il existe pareillement une surface réglée symétrique de la précédente (les plans des deux cercles formant deux plans de symétrie pour ces deux surfaces).

Donc, deux génératrices symétriques de ces deux surfaces réglées, telles que SΩ et SΩ', sont constamment normales respectivement aux génératrices correspondantes de double génération définissant les deux hyperboloïdes précédemment nommés.

Donc SΩ peut être articulée, en S, par couple rotoïde sur la génératrice correspondante (et à laquelle elle est normale) de l'hyperboloïde d'axe MY (première génération). De même en Ω.

Pareillement, SΩ' peut être articulée, en S, par couple rotoïde sur la génératrice correspondante (et à laquelle elle est normale) de l'hyperboloïde d'axe MY (deuxième génération). De même en Ω'. Les deux rayons OΩ, OΩ' étant articulés suivant l'axe OZ, nous avons bien, au total, un système articulé à cinq couples rotoïdes.

Ce système articulé nous donne dans l'espace et par rapport au système lui-même, les exemples (pouvant illustrer le théorème de Kempe-Kœnigs) : *a.* D'un point S décrivant un cercle; *b.* D'une droite SM passant par un point fixe M et balayant un plan; *c.* De droites SU , SU' engendrant chacune un hyperboloïde.

Remarquons que cette chaîne à cinq articulations, produite par la réunion de deux systèmes articulés ayant une liaison commune, ou mieux, résultant de la contraction de deux isogrammes articulés symétriques, n'est possible que si ces isogrammes sont *rectangles*. Donc, dans le *cas général*, la réunion correspondante de deux mécanismes de Bennett identiques et symétriques, ne la donnerait pas. On aurait alors une *chaîne déformable, non banale, à six couples rotoïdes, deux à deux concourants*.

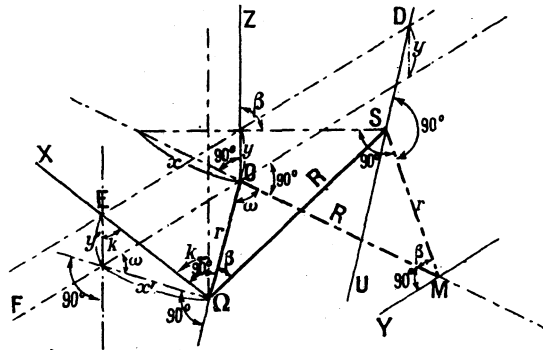
Chaîne n° 1 (suite). Démonstration complémentaire par les congruences.

Voilà donc un premier exemple de chaîne fermée à cinq couples rotoïdes, déformable au premier degré de liberté.

A l'exposé précédent, je vais joindre une démonstration complémentaire en faisant appel à la géométrie des congruences; dans le cas présent, en montrant que les *cinq axes* de cette *Chaîne n° 1* s'appuient constamment sur un système de deux droites.

Considérons (*fig. 3*) le trièdre tri-rectangle de sommet O et

Fig. 3.



d'arêtes OZ , OM , OF , le plan ZOM étant de symétrie pour la chaîne fermée (à cinq couples rotoïdes) ou *Chaîne n° 1*, constituée par la

réunion de deux isogrammes rectangles articulés (comme nous venons de l'indiquer) et dont un seul, l'isogramme $O\Omega SM$, est représenté. (L'autre isogramme $O\Omega'SM$, non représenté ici, étant symétriquement disposé par rapport à ZOM , et les côtés OM et SM étant communs aux deux isogrammes.)

Évidemment, les cinq axes ou droites OZ , ΩX , $\Omega'X'$, SU et SU' coupent constamment une première droite située dans le plan de symétrie. Il faut montrer que ces cinq axes rencontrent une deuxième droite qui, nécessairement, doit être perpendiculaire au plan de symétrie — donc, dans le plan ZOF .

Étant donnée la symétrie, il suffit, pour cela, de faire voir que les deux axes ΩX et SU coupent ce plan ZOF en deux points E et D situés sur une même normale à OZ .

En effet, nous avons établi que :

$$(I) \quad \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \omega} \cos k = \sin k \quad \text{avec} \quad \frac{r}{R} = \sin k.$$

Or, nous avons ici

$$\left(\frac{r}{\cos \beta} - R \right) = x \quad \text{avec} \quad \frac{x}{y} = \tan \beta;$$

d'où

$$y = \left(\frac{r}{\cos \beta} - R \right) \frac{1}{\tan \beta}.$$

De même, nous avons ici

$$\frac{r}{\tan \omega} = x' \quad \text{avec} \quad \frac{x'}{y'} = \tan k;$$

d'où

$$y' = \frac{r}{\tan \omega \tan k}.$$

Il faut montrer que $y = y'$. C'est-à-dire

$$(II) \quad \left(\frac{r}{\cos \beta} - R \right) \frac{1}{\tan \beta} = \frac{r}{\tan \omega \tan k}.$$

Admettons-le. Cette expression nous donne

$$\left(\frac{1}{\cos \beta} - \frac{1}{\sin k} \right) \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{\tan \omega \tan k};$$

ou

$$\frac{1}{\sin \beta} - \frac{1}{\sin k \tan \beta} = \frac{1}{\tan \omega \tan k};$$

ou

$$1 - \frac{\cos \beta}{\sin k} = \frac{\sin \beta}{\tan \omega \tan k};$$

ou

$$\sin k = \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \omega} \cos k.$$

Nous retrouvons l'égalité (I). Donc l'expression (II) était bien une égalité.

**Deuxième exemple de chaîne fermée à cinq couples rotoïdes,
déformable au premier degré de liberté, ou *Chaîne* n° 2.**

A cette *Chaîne fermée* n° 1, à plan de symétrie, qui constitue vraisemblablement la première solution de tels systèmes articulés, j'ajoute maintenant un second exemple. Cette *Chaîne fermée* n° 2, sans plan de symétrie, est obtenue comme suit :

Supposons deux isogrammes articulés égaux, et nullement rectangles *à priori*; autrement dit : sous leur forme générale, deux mécanismes pareils de Bennett.

Essayons de réaliser leur réunion, ou plutôt leur contraction, en les disposant de manière qu'ils aient un côté commun, les axes d'articulation correspondant aux extrémités de ce côté commun étant confondus.

Si je supprime, alors, ce côté commun, et l'articulation des deux côtés égaux aboutissant à l'une des extrémités de ce côté commun (ces deux côtés égaux pouvant être aussi bien en prolongement rectiligne qu'en prolongement oblique, c'est-à-dire constituer indifféremment une seule barre rigide *droite* ou *brisée*), j'obtiens, dis-je, la *Chaîne* n° 2 prévue.

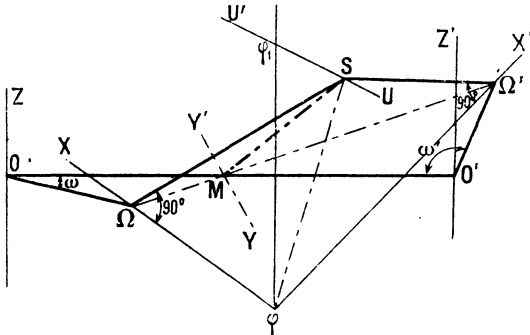
(Et cela demeurant vrai en prenant, pour les mettre en commun, aussi bien un grand qu'un petit côté de chacun des deux isogrammes articulés égaux.)

Commençons, pour faire la démonstration, par envisager le cas particulier où les deux isogrammes articulés égaux sont *rectangles* et réunis de façon que les deux côtés aboutissant à l'articulation supprimée se trouvent *en ligne droite*.

Soient donc (*fig. 4*) les deux isogrammes articulés égaux et rectangles OΩMS et O'Ω'SM, le côté MS étant commun, et les

deux côtés MO et MO' en prolongement rectiligne. Lorsqu'on déforme l'isogramme torique OΩMS, l'axe SU décrit un hyperboloïde dont le point S parcourt le cercle de gorge. Pareillement, c'est ce même hyperboloïde que décrit l'axe SU' de l'isogramme torique O'Ω'SM. Au total, les axes SU et SU' sont constamment confondus et ne donnent en S qu'une seule articulation rotoïde.

Fig. 4.



Par conséquent, supprimant l'articulation en M et le côté commun MS, il nous reste cinq articulations d'axes : OZ, ΩX, USU', Ω'X', O'Z'; et nous avons la *Chaîne fermée* n° 2, annoncée dans ce cas particulier ⁽¹⁾.

L'angle ΩSΩ' varie entre 180° et un minimum correspondant à l'égalité des angles ω et ω'. Or, ω et ω' sont égaux pour la position moyenne. A ce moment

$$(1) \quad r = R \cos \omega = R \cos \omega'$$

et le minimum de cet angle ΩSΩ' est $2\omega = 2\omega'$.

Or, nous avons constamment : $r = R \sin k$.

Ce qui prouve que lorsque les angles ω et ω' sont égaux [c'est-à-dire satisfont (1)], ils sont le complément de l'angle constant k.

Le minimum de ΩSM' est donc : $2(90^\circ - k)$.

Cette *Chaîne fermée* n° 2 (correspondant au cas particulier des deux isogrammes rectangles et des deux côtés en prolongement rectiligne) étant à cinq couples rotoïdes, et déformable au premier

⁽¹⁾ C'est encore vrai si les deux côtés MO et MO' ne sont plus en prolongement rectiligne, mais obliques, car, évidemment, les axes SU et SU' restent confondus.

degré de liberté, il existe donc pour elle, comme nous l'avons vu pour la *Chaîne* n° 1, un système de deux droites sur lesquelles s'appuient constamment ses cinq axes d'articulations.

Faisons apparaître cette congruence.

Pour cela, considérons le quadrilatère plan formé par les deux barres $S\Omega$ et $S\Omega'$ (articulées suivant l'axe unique USU') et les deux axes $\Omega\Phi$ et $\Omega'\Phi$ respectivement normaux à ces barres.

Par la diagonale de symétrie $S\Phi$, menons le plan normal à ce quadrilatère. Ce plan — puisque le triangle $\Omega S\Omega'$ demeure constamment isocèle — est toujours perpendiculaire au plan (unique) des cercles balayés par les rayons $O\Omega$ et $O\Omega'$, donc parallèle aux droites OZ , $O'Z'$, et il contient USU' .

Par conséquent, la première droite $\Phi\Phi_1$, contenue dans ce plan et parallèle à OZ , $O'Z'$, rencontre évidemment ces deux droites (à l' ∞), ainsi que les trois droites ΩX , $\Omega'X'$ et USU' .

Autrement dit, la première droite cherchée de la congruence est située dans le plan normal au quadrilatère plan (suivant la diagonale de symétrie), cette première droite passant par le sommet Φ du quadrilatère, et joignant les intersections (à l' ∞) des deux axes parallèles OZ , $O'Z'$ avec ce plan normal au quadrilatère.

Puisque le point S décrit un cercle situé dans le plan des droites OZ , $O'Z'$, nous voyons que la deuxième droite cherchée est constamment à l'intersection du plan des deux droites OZ , $O'Z'$ et du plan du quadrilatère. C'est donc la droite SM .

Autrement dit, la deuxième droite cherchée de la congruence est située dans le plan du quadrilatère, et joint, en passant par le sommet S du quadrilatère, les intersections des deux axes parallèles OZ , $O'Z'$ avec ce plan du quadrilatère.

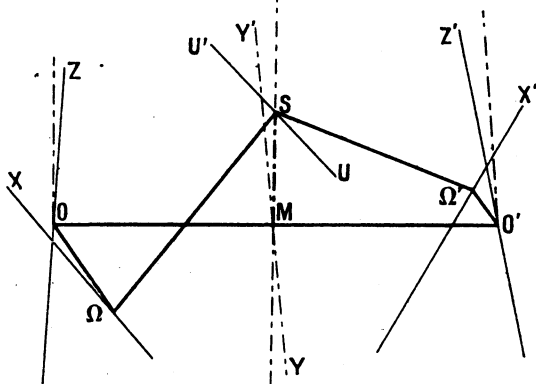
Supposons maintenant (*fig. 5*) que les deux isogrammes articulés égaux $O\Omega SM$, $O'\Omega' SM$ ne soient pas *rectangles*. (Le côté MS est commun, et les deux côtés MO et MO' sont encore en prolongement rectiligne.) Et prenons le cas de figure où les deux isogrammes déformables présentent, dans leurs positions successives, une forme identique (ce qui correspond à la position moyenne).

Nous disons que si les axes MY et MY' (évidemment normaux en M à MS) sont confondus, il en est de même des axes SU et SU' .

En effet, nous voyons qu'il est possible d'amener l'isogramme

$O'\Omega'SM$ sur l'isogramme $O\Omega SM$, et le confondre identiquement avec ce dernier, par une simple rotation de 180° autour de

Fig. 5.



l'axe SM . Donc, après cette rotation, les deux axes SU et SU' sont confondus. Comme ils sont normaux chacun en S à MS , ils étaient donc déjà confondus avant la rotation.

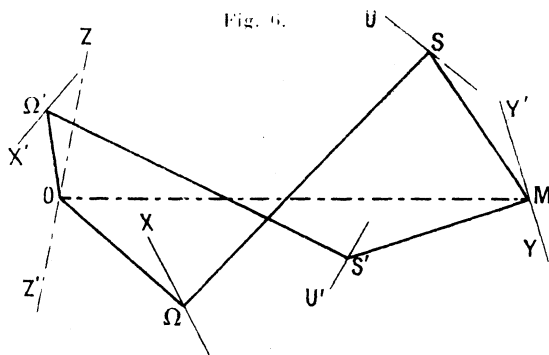
Or, cela reste évidemment vrai, non seulement pour toutes les positions successives du système articulé ainsi prévu, mais encore si les deux côtés MO et MO' ne sont pas en prolongement rectiligne. Le rayon MS balaie un cercle dont le plan est dans celui des deux côtés MO et MO' (alors obliques), et l'axe d'articulation unique USU' décrit un hyperboloïde (dont le point S parcourt le cercle de gorge).

Donc, au total, nous avons bien, dans le cas général, la chaîne annoncée à cinq couples rotoïdes, déformable au premier degré de liberté, ou *Chatne fermée* n° 2.

La figure 6 montre la *Chatne* n° 2 dans le cas général où ce sont deux grands côtés égaux qui sont amenés en commun dans la réunion des deux isogrammes articulés égaux. L'articulation ZOZ' est supprimée.

Il est à remarquer que la condition d'isogrammes rectangles qui s'impose pour la *Chatne* n° 1 (sinon, je l'ai signalé, c'est une chaîne à six couples rotoïdes qui résulte), n'existe pas pour la *Chatne* n° 2, ainsi que nous venons de le voir.

Évidemment, si dans ces *Chaines* n° 2 on rétablit l'articulation (en M dans le cas de la figure 5, et en O dans le cas de la figure 6),



on obtient une chaîne fermée à six couples rotoïdes, déformable au deuxième degré de liberté. La distance entre les points M et S dans le premier cas, et O et M dans le deuxième cas, demeure constante et égale au côté commun supprimé.

Chaîne n° 2 *suite*. Démonstration complémentaire.

À propos de cette *Chaîne* n° 2, M. Bricard a fait apparaître d'une façon très élégante, et dans le cas général, la *congruence*.

Voici ce raisonnement :

Reprenons les deux isogrammes articulés égaux, réunis comme je viens de montrer qu'il est possible de le faire.

On sait que les quatre axes d'un mécanisme de Bennett appartiennent constamment à un hyperboloïde de révolution (même système de génération).

Nous avons donc, par la réunion correspondant à la *Chaîne* n° 2, deux hyperboloïdes ayant en commun deux droites. Donc, ils ont en commun deux autres droites qui constituent, évidemment, celles de la congruence cherchée ⁽¹⁾.

Nota. -- Bien entendu, la démonstration peut s'appliquer, pareillement, à la *Chaîne* n° 1.

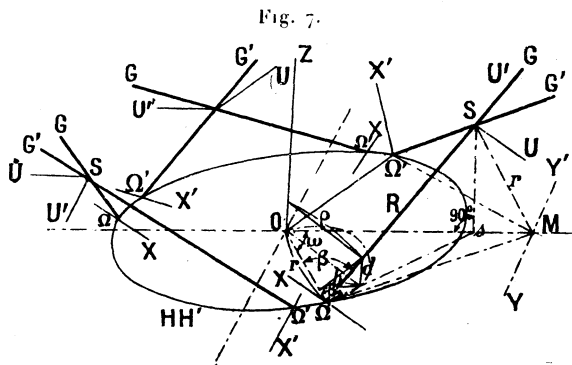
⁽¹⁾ J'en déduis, d'une manière plus générale, que la Chaîne existe, pareillement, dès qu'il y a, entre les deux isogrammes, simplement égalité de deux côtés et des angles correspondants des axes. La démonstration géométrique directe se ferait comme précédemment.

Hyperboloïde articulé à simples couples rotoïdes.

On connaît la théorie relative à l'*hyperboloïde articulé* dans lequel les génératrices (des deux systèmes) sont liées entre elles par couples sphériques.

Voici un hyperboloïde articulé, ne possédant que des couples rotoïdes, et constituant une application directe de la *Chatne* n° 1, à cinq couples rotoïdes, précédemment décelée.

Soient (fig. 7) les deux cercles H et H' de rayon r , et con-



fondus, mais pouvant être animés d'un pivotement relatif l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire liés par un couple rotoïde d'axe OZ .

S'appuyant sur le cercle H , soit la série des génératrices ΩG semblablement et uniformément réparties. De même, s'appuyant sur le cercle H' , soit la série des génératrices $\Omega' G'$.

Supposons que ces génératrices se rencontrent deux à deux aux divers points S , et que $\Omega S = R = \Omega' S$.

Si les génératrices ΩS et $\Omega' S$ sont respectivement articulées en Ω et Ω' autour des axes ΩX et $\Omega' X'$ perpendiculaires aux rayons $O\Omega$ et $O\Omega'$ correspondants et faisant avec l'axe OZ l'angle constant k , convenablement orienté et défini par $\sin k = \frac{r}{R}$, d'une part.

Et si en S , les génératrices $S\Omega$ et $S\Omega'$ sont respectivement articulées autour des axes SU et SU' perpendiculaires aux rayons SM (avec $OM = R$) et faisant chacune, avec MY , ce même angle k convenablement orienté, d'autre part.

Il est évident que, dans ces conditions, nous aurons une série

de systèmes identiques articulés, à cinq couples rotoïdes, et constituant chacun une chaîne pareille à celle que j'ai précédemment définie (*Chaîne n° 1*).

Au total, un hyperboloïde articulé présentant une ceinture constante formée par les deux cercles pivotants HH'. Et il est curieux de voir, en fonction des déformations, comment varie le cercle de gorge en grandeur et en position.

Considérons le plan formé par les droites SΩ et Ss. Abaissons sur lui le plan perpendiculaire passant par OZ. Nous faisons apparaître les deux longueurs ρ (rayon du cercle de gorge) et d (distance du cercle de gorge au plan des cercles HH'). Soit k l'angle constant fait, dans ses diverses positions, par le plan SΩO avec le plan des cercles HH'. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \tan \beta' &= \tan \beta \cos k. \\ \rho = r \sin \beta' &= \frac{r \tan \beta'}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta'}} = \frac{r \tan \beta \cos k}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta \cos^2 k}}. \end{aligned}$$

Nous voyons que les limites de ρ sont r et 0. Et ce rayon ρ pourrait s'exprimer en fonction de ω puisque

$$\cos \beta + \frac{\sin \beta}{\tan \omega} \cos k = \sin k.$$

Nous avons aussi

$$h = r \cos \beta' \sin \beta' \quad \text{et} \quad \frac{d}{h} = \tan k.$$

D'où

$$d = r \cos \beta' \sin \beta' \tan k,$$

ou

$$d = r \frac{\tan \beta'}{1 + \tan^2 \beta'} \tan k,$$

ou

$$d = \frac{r \tan \beta \cos k}{1 + \tan^2 \beta \cos^2 k} \tan k = \frac{r \tan \beta \sin k}{1 + \tan^2 \beta \cos^2 k}.$$

Le maximum de d correspond à β' = 45°, et d oscille entre $\frac{r}{2} \tan k$ et $-\frac{r}{2} \tan k$ en passant par zéro. C'est-à-dire que l'*hyperboloïde déformable* a un cercle de gorge toujours centré sur l'axe OZ, et dont le plan se déplace entre deux positions extrêmes, symétriques par rapport aux cercles HH', et distantes de $\frac{r}{2} \tan k$

et $-\frac{r}{2} \tan k$, tandis que le rayon de ce cercle de gorge varie comme je l'ai indiqué. Quand le cercle de gorge est dans le plan des cercles III', il se confond avec eux ($\rho = r$); et lorsqu'il atteint l'une ou l'autre de ses positions limites, son rayon $\rho = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

**Sur les chaînes fermées à six couples rotoïdes,
déformables au premier degré de liberté.**

On connaît des exemples de chaînes *banales* à six couples rotoïdes. *A priori* ⁽¹⁾, je vois deux de ces systèmes articulés, déformables au premier degré de liberté.

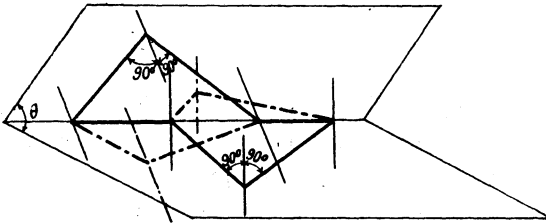
Ils sont constitués respectivement de la façon suivante :

a. Un système comprenant deux groupes de trois couples rotoïdes concourants. C'est le cas du « double cardan » ou joint de Hooke.

On peut considérer une telle chaîne comme étant l'assemblage de deux angles tétraèdres articulés, ayant un côté commun.

b. Un système comprenant deux groupes de trois couples rotoïdes parallèles (*fig. 8*).

Fig. 8.



On peut considérer une telle chaîne comme étant l'assemblage de deux quadrilatères plans articulés. En supprimant, dans chaque quadrilatère, deux côtés appropriés, on obtient la chaîne fermée prévue (les diagonales n'ont pas besoin d'être confondues).

Or, j'ai déjà décelé et indiqué ⁽²⁾ une chaîne paradoxale et non

⁽¹⁾ Je laisse de côté l'exemple trop évident de six axes parallèles, ou six axes concourants sur un même sommet.

⁽²⁾ Voir p. 190.

d'axe SU entre les barres SM et SI , et d'ajouter un couple rotoïde d'axe IS , pour obtenir la chaîne fermée prévue.

En effet, considérons le sommet S comme appartenant à l'isogramme articulé rectangle $O\Omega SM$. Nous pouvons l'amener en un point quelconque du cercle A ; et l'axe SU , qui est toujours normal à ΩS et à SM , reste invariablement dans le plan du cercle A , et, par conséquent, est tangent au cercle A en ce point correspondant.

Considérons, maintenant, le point S comme pouvant pivoter autour des deux axes IL et $\mu I\mu'$, c'est-à-dire se déplaçant sur la sphère de centre I . Le point S peut parcourir le cercle A .

Or, si nous envisageons l'axe précédent SU comme lié, non plus à l'isogramme torique $O\Omega SM$, mais au bras IS , dans les déplacements de ce dernier nous voyons que cet axe SU , qui était normal à SI (à la position de départ), demeurera constamment normal à SI dans les positions successives, c'est-à-dire constamment dans un plan tangent à la sphère à l'extrémité S de la barre IS . Si donc, le point S décrit le cercle A , nous voyons que nous pourrions amener, sans cesse, sur l'axe SU (lié à l'isogramme torique $O\Omega SM$, et situé dans le plan du cercle A auquel il est tangent) l'axe SU lié au bras IS . Il suffira, pour cela, de faire pivoter convenablement ce dernier dans le plan tangent en S à la sphère, de façon qu'au total nous n'ayons jamais qu'un seul et même axe SU ; c'est-à-dire prévoir une articulation d'axe SI .

En somme, nous aurons bien la *chaîne fermée à six couples rotoïdes* OZ , MY , SU , SI , $\mu I\mu'$, IL , les deux axes OZ et IL pouvant être considérés, par exemple, comme liés au bâti.

Évidemment, la chose reste vraie si l'axe $\mu I\mu'$ est oblique sur l'axe IL . Dans ces conditions, le point S ne peut balayer qu'une zone médiane de la sphère, laquelle correspond à la surface engendrée par le cercle décrit par le point S autour de l'axe $\mu I\mu'$, et tournant autour de l'axe IL (l'axe IL est oblique sur le plan de ce cercle générateur, et passe par son centre).

Si le cercle A , ou une portion de ce cercle A , se trouve sur cette zone sphérique, la liaison demeure possible, et la chaîne subsiste réellement. On peut établir les limites.

Nota. — A titre d'exercice géométrique, il est curieux de voir

si une chaîne analogue pourrait exister dans le cas général où l'isogramme articulé n'est pas rectangle.

Sur la rigidité relative des chaînes fermées indéformables.

Une chaîne fermée à trois articulations est *strictement indéformable dans le cas général*. Au contraire, si les trois axes sont dans un même plan, on n'a plus un système rigide, mais un système à déformations élémentaires.

Je vais donner une démonstration de cette propriété connue.

On sait qu'il existe la série des emmanchements E que voici :

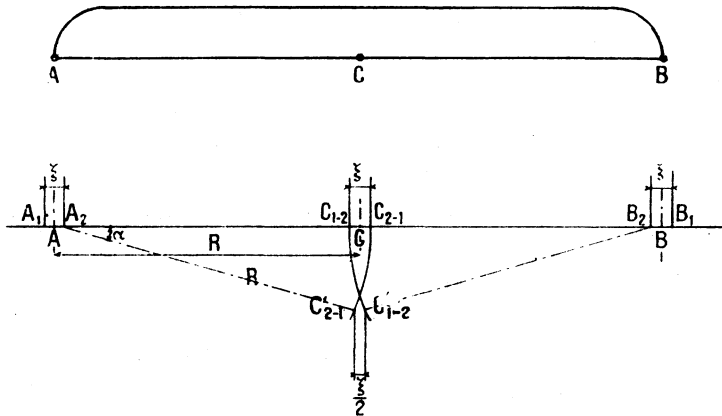
E libre	E tournant	E glissant
	E exact	
E à l'étau	E à la presse	E à chaud

A tous, correspond un jeu moyen défini par $\xi = K \sqrt{D}$; avec K, constant pour chacun, mais diminuant de l'un à l'autre, pour passer par zéro (E exact) et prendre une valeur négative aux emmanchements à serrage.

Et l'on sait qu'une articulation mécanique est impossible sans la présence de ce jeu positif ξ .

Soit (fig. 10) la chaîne fermée à trois articulations ABC (paral-

Fig. 10.



èles ou concourantes) situées dans le même plan. Soit ξ le jeu correspondant à l'*Emmanchement tournant* des trois charnières

identiques de diamètre D. Nous voyons qu'aux positions moyennes des centres A et B correspondent les positions limites A_1 et A_2 pour A, et B_1 et B_2 pour B. Et si nous prenons — ce qui est possible — les deux positions limites A_2 et B_2 , nous avons pour C les deux positions limites (hors de l'axe AB) C_{2-1} et C_{1-2} .

Or, cela nous fait apparaître un angle élémentaire z . Et nous avons, pour $z > 0$, trois infiniment petits équivalents

$$R \sin z, \quad Rz, \quad R \tan z.$$

Mais, dans le triangle élémentaire $C_{2-1} C_{1-2} C_{2-1}$, nous avons

$$\frac{3/\xi}{R \sin z} = \tan z \rightarrow 0.$$

Les deux ∞ petits ξ et $R \sin z$ ne sont donc pas du même ordre. ξ est d'ordre supérieur par rapport à $R \sin z$, donc par rapport à Rz .

Par conséquent, au jeu ξ infiniment petit et *insensible* correspond un déplacement élémentaire zRz *qui est sensible*.

Ce déplacement du point C de chaque côté de la ligne AB est élémentaire, mais non nul, et le système n'est pas rigide, en conséquence.

Sur une généralisation du joint de Cardan.

Les variations angulaires différentielles bipériodiques de deux corps centrés, tournant d'un *mouvement moyen égal*, sont utilisées, notamment dans le joint à compensation de Chavrier, ainsi que dans une nouvelle machine actuellement étudiée par l'auteur du Mémoire. Jusqu'ici, on les a obtenues par combinaison de deux cardans concentriques décalés, l'axe d'entrée commandant les deux arbres de sortie (d'axe commun), et les variations angulaires relatives dépendant d'un seul paramètre (angle de l'axe d'entrée avec l'axe des arbres de sortie).

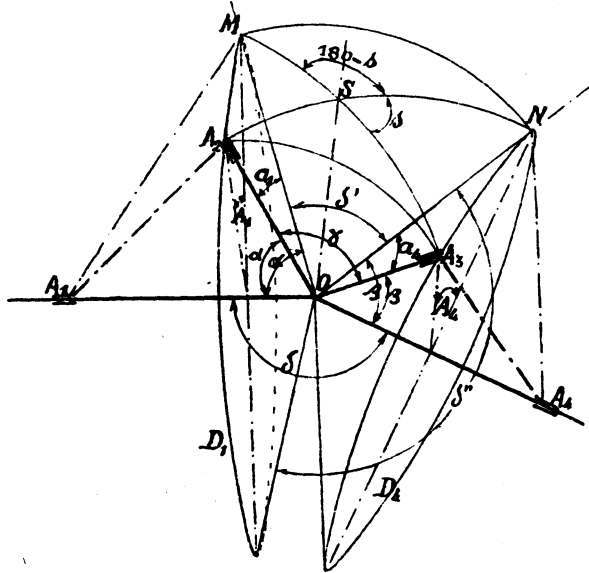
Or, par combinaison de deux « cardans généralisés », celles-ci dépendraient de plusieurs paramètres angulaires, d'où : latitude plus grande et variée dans l'amplitude de ces variations, tout en conservant une faible obliquité des axes d'entrée et de sortie (avantageuse, pratiquement).

C'est ainsi que je fus conduit à étudier la généralisation, ici

présentée, du joint de Cardan — lequel rentre dans le type d'une chaîne fermée déformable, à quatre couples rotoïdes concourants.

Soient (*fig. 11*) OA_1 , l'axe du cône OD_1 , et α son demi-angle au

Fig. 11.



sommet. Soient OA_1 , l'axe du cône OD_1 , et β son demi-angle au sommet. Ces deux axes font entre eux l'angle δ . Considérons le système de deux droites OA_2 , OA_3 liées invariablement l'une à l'autre, en formant entre elles l'angle γ ; et faisons pivoter autour du point O ce système angulaire, de manière que la droite OA_2 reste constamment sur le cône OD_1 , et, pareillement, que la droite OA_3 soit constamment une génératrice du cône OD_2 .

Puisque la droite OA_2 rencontre toujours l'axe OA_1 , elle peut être liée à celui-ci par couple rotoïde (en A_2 , par exemple), et de même, la droite OA_3 peut être liée à l'axe OA_1 par un couple rotoïde, en A_3 . Nous voyons donc que la liaison rotative des axes OA_1 , OA_4 (couples rotoïdes en A_1 et A_4 par rapport au bâti) peut être assurée par les deux branches indéformables OA_2 , OA_3 , chacune étant liée par couple rotoïde à son axe correspondant, et les angles α , β , γ étant \angle de 90° et quelconques.

Comme condition de possibilité (pour avoir la continuité de

transmission), nous voyons, en considérant les génératrices situées dans le plan des axes, que l'angle γ doit être compris entre le plus grand angle fait par les génératrices voisines et le plus petit angle fait par les génératrices opposées

$$\delta' < \gamma < \delta'' \quad \text{ou} \quad |360^\circ - (\alpha + \delta + \beta)| < \gamma < |\delta - \alpha + \beta|.$$

Pour obtenir le rapport des vitesses simultanées, il faut lier algébriquement la valeur des angles de rotation $\widehat{A_1}$ et $\widehat{\Lambda_1}$, puis différentier les termes de cette relation. Je me contenterai d'indiquer la marche du calcul.

Les trièdres $OA_1\Lambda_2M$ et $OA_1\Lambda_3N$ donnent respectivement

$$(1) \quad \cos \alpha_1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \widehat{\Lambda_1}$$

et

$$(2) \quad \cos \alpha_1 = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos \widehat{\Lambda_1}.$$

Il faut, maintenant, lier algébriquement les paramètres α_1 et α_2 .

Les quatre trièdres de sommet O et génératrice commune OS donnent :

$$(3) \quad \cos \alpha_1 = \cos \widehat{SO\Lambda_2} \cdot \cos \widehat{SOM} + \sin \widehat{SO\Lambda_2} \cdot \sin \widehat{SOM} \cdot \cos \widehat{s},$$

$$(4) \quad \cos \alpha_1 = \cos \widehat{SO\Lambda_3} \cdot \cos \widehat{SON} + \sin \widehat{SO\Lambda_3} \cdot \sin \widehat{SON} \cdot \cos \widehat{s},$$

$$(5) \quad \cos \gamma = \cos \widehat{SO\Lambda_2} \cdot \cos \widehat{SO\Lambda_3} - \sin \widehat{SO\Lambda_2} \cdot \sin \widehat{SO\Lambda_3} \cdot \cos \widehat{s},$$

$$(6) \quad \cos \delta' = \cos \widehat{SOM} \cdot \cos \widehat{SON} - \sin \widehat{SOM} \cdot \sin \widehat{SON} \cdot \cos \widehat{s},$$

Et les deux trièdres OA_2MN et OA_3NM donnent respectivement

$$(7) \quad \cos(\widehat{SON} + \widehat{SO\Lambda_2}) = \cos \alpha_1 \cdot \cos \delta' + \sin \alpha_1 \cdot \sin \delta' \cdot \cos \widehat{OM},$$

$$(8) \quad \cos(\widehat{SOM} + \widehat{SO\Lambda_3}) = \cos \alpha_1 \cdot \cos \delta' + \sin \alpha_1 \cdot \sin \delta' \cdot \cos \widehat{ON}.$$

Or, les angles dièdres \widehat{OM} et \widehat{ON} s'expriment, par un calcul facile, respectivement en fonction de α_1 , α et α_2 , β . Enfin

$$\delta' = 360^\circ - (\alpha + \delta + \beta).$$

Donc, au total, les six équations trigonométriques (3), (4), (5), (6), (7), (8) contiennent les sept paramètres variables $\widehat{SO\Lambda_2}$,

$\widehat{\text{SOA}}_3, \widehat{\text{SOM}}, \widehat{\text{SON}}, \hat{s}, a_1, a_2$, et les quatre paramètres fixes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Par conséquent, l'élimination des cinq paramètres $\widehat{\text{SOA}}_2, \widehat{\text{SOA}}_3, \widehat{\text{SOM}}, \widehat{\text{SON}}, \hat{s}$ entre ces six équations donnerait la relation qui lie a_1 et a_2 . Si enfin, dans celle-ci, on remplaçait a_1 et a_2 en fonction de Λ_1 et Λ_2 [équations (1) et (2)] on obtiendrait la relation finale qui, différenciée, ferait apparaître le résultat cherché.

Sur un mode de liaison absolument général de deux axes de rotation dans l'espace (fig. 12).

THÉOREME. — *a. Deux axes de positions relatives et successives quelconques dans l'espace peuvent avoir une liaison réciproque et continue de rotation, et cela au moyen d'un système plan de deux pivots perpendiculaires respectivement à chacun de ces axes, à la condition que les axes de ces deux pivots soient toujours concourants, et que chaque pivot puisse se déplacer librement dans leur plan commun.*

b. Pour une position déterminée des deux axes, le rapport des vitesses instantanées de rotation est

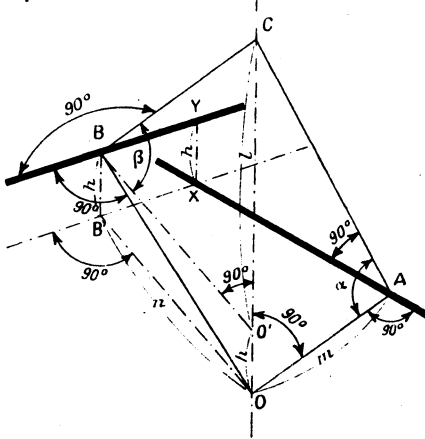
$$\omega = \cos^2 \alpha \left[\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \tan^2 \alpha + \frac{h^2}{mn} - \frac{2h}{n} \tan \alpha \right].$$

Avec m et n paramètres définissant les positions relatives des deux pivots, h la distance des deux axes, α l'angle de rotation d'un des axes.

En effet : *a.* Les deux axes sont AX et BY. Leur perpendiculaire commune est XY de longueur h . Le plan AXB' est parallèle à BY et contient AX. Soient, en A et B, des axes pivotants (tels, en positions successives, que OA et OB, ou que CA et CB) perpendiculaires respectivement aux deux axes AX et BY. Chacun de ces pivots, pendant la rotation des axes AX et BY, reste dans le plan normal (en A ou B) à l'axe correspondant. Et ces deux plans, de traces OA et OB' sur AXB', se coupent suivant l'arête OO'C. En conséquence, nous voyons que, pour une position déterminée dans l'espace, les deux axes AX et BY peuvent avoir chacun une rotation relative définie, car il est toujours possible de faire en

sorte que les pivots CA et CB soient concourants et se coupent sur OO'C, si ces pivots peuvent se déplacer librement dans le plan

Fig. 12.



de leurs axes. Or, ceci reste vrai pour toutes les positions relatives des deux axes AX et BY.

b. Le rapport des vitesses angulaires instantanées est $\rho = \frac{dx}{d\beta}$.

Or

$$h + l = m \tan \alpha \quad \text{et} \quad l = n \tan \beta.$$

D'où

$$dl = m \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = n \frac{1}{\cos^2 \beta} d\beta.$$

D'où

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{n}{m} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = \frac{n}{m} \cos^2 \alpha [1 + \tan^2 \beta] = \rho.$$

Mais $\tan \beta = \frac{m \tan \alpha - h}{n}$. D'où, en remplaçant $\tan \beta$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{n}{m} \cos^2 \alpha \left[1 + \left(\frac{m \tan \alpha - h}{n} \right)^2 \right] \\ &= \cos^2 \alpha \left[\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \tan^2 \alpha + \frac{h^2}{mn} - \frac{2h}{n} \tan \alpha \right]. \end{aligned}$$

Cas particulier. — 1° $h = 0$. Les axes sont concourants :

$$\rho = \cos^2 \alpha \left[\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \tan^2 \alpha \right].$$

2° $h = 0$ et $\frac{m}{n} = 1$. D'où $\rho = 1$. Il y a symétrie. Les vitesses

angulaires sont *constamment égales*. Le système est homociné-
tique.

C'est aussi le cas où *les deux axes sont parallèles* : m et $n = \infty$,
et sont équivalents $\left(\frac{m}{n} = 1\right)$ (les pivots sont parallèles).

Indétermination. — Dans le cas où l'un des axes de rotation
(ou les deux) est perpendiculaire au plan des pivots (m ou $n = 0$).

APPLICATION. — *Joint universel.* — Le dispositif plan des deux
pivots peut être formé : 1° par un *système de compas à trois*
articulations R_1, R_2, R_3 normales à ce plan (*fig. 13*). Au total,

Fig. 13.

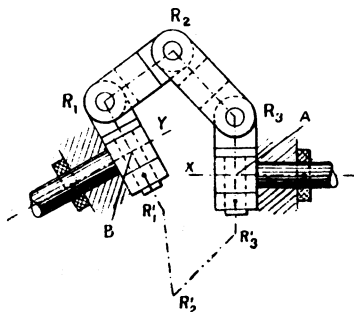
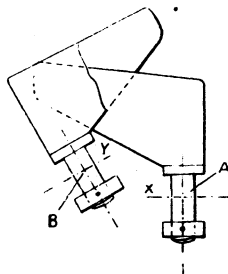


Fig. 14.



on obtient ainsi une chaîne fermée à sept couples rotoïdes. Les
branches du compas, ainsi que les tiges des pivots, peuvent avoir
des longueurs inégales. Pour plus de rigidité, il est bon de répéter
un autre système à trois articulations R'_1, R'_2, R'_3 s'ajoutant au
précédent; 2° par un *système à plans glissants* (*fig. 14*) (tenon
et mortaise).

Et dans ce dernier système, si nous considérons *le cas parti-*
culier où il y a symétrie, nous retrouvons la disposition cinéma-
tique du *joint de transmission « Tracta »*.

Remarque. — Cette liaison absolument générale de deux axes
reste encore possible — mais alors, le pivotement (dont les limites
sont, d'ailleurs, saisissables) pouvant se réduire à une fraction de
tour, et même devenir nul — si les axes des deux pivots ne sont
pas, respectivement, normaux aux axes correspondants d'entrée et
de sortie.

Dans ce cas, les deux plans OAC et OBC sont remplacés par

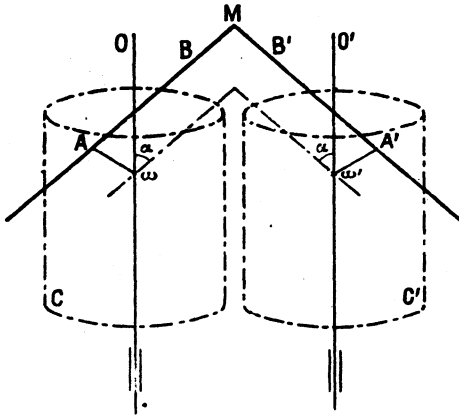
deux cônes; et si ces derniers se rencontrent, les points tels que C ou O se déplacent, alors, sur la courbe d'intersection des deux cônes.

Un tel joint de transmission (dans le cas de la continuité, c'est-à-dire des pivots perpendiculaires aux axes correspondants) est véritablement universel. Il remplace ceux de Cardan, Kœnigs, Oldham et, de plus, assure la liaison lorsque les deux axes, de position absolument quelconques, ne sont pas concourants.

**Liaison homocinétique de deux axes parallèles (ou concourants).
Généralisation du joint de Kœnigs (1).**

Soient (*fig. 15*) les deux axes parallèles de rotation ωO , $\omega' O'$. Considérons la génératrice AB située à la distance quelconque ωA de l'axe ωO , et faisant avec lui un angle α quelconque.

Fig. 15.



Pareillement et symétriquement, considérons la génératrice opposée $A'B'$, située à la distance $\omega' A' = \omega A$ de l'axe $\omega' O'$, et inclinée sur lui du même angle α .

Si nous entraînons en sens inverse et à la même vitesse, et chacune autour de l'axe ωO ou $\omega' O'$ correspondant, ces deux génératrices AB, $A'B'$, elles engendreront chacune un hyperboloïde de révolution, et se couperont constamment en un point M qui se déplacera dans le plan de symétrie des deux axes ωO , $\omega' O'$; et le

(1) *Génie Civil* du 10 janvier 1931.

lieu du point M sera la courbe d'intersection des deux hyperboloïdes, c'est-à-dire (cette courbe étant plane) une hyperbole.

Puisque les deux génératrices AB, A'B' sont concourantes, et font entre elles un angle variable en fonction des positions successives, nous pourrions matérialiser la liaison des deux axes ωO , $\omega' O'$ de la façon suivante :

Dans le cylindre C, d'axe ωO , un alésage oblique d'axe AB;

Dans le cylindre C', d'axe $\omega' O'$, un alésage oblique d'axe A'B' ;

Et deux tiges cylindriques (formant compas) d'axes respectifs MB et MB', et articulées par *couple rotoïde* en M pour assurer la liaison.

Chacune des tiges MB et MB' aura, dans son logement, un mouvement combiné de rotation et de translation alternative. Et, au total, la liaison homocinétiq ue inverse des deux axes ωO , $\omega' O'$ comprendra le système de *deux couples louchoyants symétriques* et d'un *couple rotoïde*.

A la limite, si la distance $\omega A \equiv \omega' A'$ devient nulle, la liaison reste la même, mais les deux hyperboloïdes sont remplacés par leurs cônes asymptotes.

Un tel dispositif ne peut, évidemment, donner qu'une liaison d'amplitude angulaire limitée pratiquement — la rotation complète étant matériellement impossible.

Mais si les deux axes ωO , $\omega' O'$, au lieu d'être parallèles, sont concourants, le principe reste vrai : la continuité de rotation pouvant, alors, devenir réelle (conditions de valeurs angulaires limites, faciles à définir). Et dès lors, un tel système doit être considéré comme une généralisation du joint de Kœnigs.

En effet, dans celui-ci, les branches du compas sont parallèles, respectivement, aux axes à lier, et l'angle de ces branches est constamment égal à celui des axes à lier.

Au contraire, mon dispositif (cas des axes concourants) montre que le parallélisme respectif des branches de compas et des axes à lier n'est pas nécessaire; mais, par ailleurs, il faut que l'angle varie d'une façon périodique et continue en fonction des positions successives.

Remarquons que l'axe du couple rotoïde en M n'a nullement besoin d'être normal aux génératrices MA et MB.
