

BULLETIN DE LA S. M. F.

L. DE BROGLIE

Sur les équations et les conceptions générales de la mécanique

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930_58_1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES ÉQUATIONS ET LES CONCEPTIONS GÉNÉRALES
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ;

PAR M. LOUIS DE BROGLIE.

Je n'ai pas la prétention pendant cette conférence de faire un tableau même incomplet du développement de la nouvelle Mécanique, Mécanique quantique ou Mécanique ondulatoire comme il vous plaira de l'appeler car vous savez que la Mécanique quantique, malgré des différences de méthodes, est au fond équivalente à la Mécanique ondulatoire. Ce que je veux chercher à vous montrer, c'est comment la nouvelle Mécanique s'est développée à partir de l'ancienne Mécanique et comment elle a amené les physiciens à modifier d'une façon très importante certaines de leurs conceptions habituelles. Je me servirai ici des méthodes de la Mécanique ondulatoire d'abord parce qu'elle m'est plus familière et ensuite parce que je crois ces méthodes plus faciles à suivre que celles de la Mécanique quantique.

Nous allons d'abord résumer quelques résultats bien connus de l'ancienne Mécanique dans le cas où l'on envisage un corpuscule de masse connue m soumis à un champ de force également connu et défini par une fonction potentielle $V(x, y, z, t)$.

Dans la Mécanique ancienne, on admet qu'un corpuscule est un objet extrêmement petit ou même sans dimensions qui occupe à chaque instant dans l'espace une position bien déterminée que l'on peut caractériser par exemple par trois coordonnées rectangulaires x, y, z . Au cours du temps la position du corpuscule varie en général et il décrit sous l'influence du champ de force une certaine

courbe que l'on nomme la trajectoire. Au point de vue mathématique, la trajectoire du corpuscule et la manière dont le corpuscule décrit cette courbe sont connues si l'on connaît l'expression des coordonnées x, y, z en fonction du temps. D'autre part la Mécanique ancienne admettait ce que je nommerai le postulat du déterminisme, suivant lequel le mouvement futur d'un corpuscule doit être entièrement déterminé dès que l'on connaît certaines données sur son mouvement actuel. La tâche de l'ancienne Mécanique était donc de fournir certaines équations permettant d'exprimer les coordonnées x, y, z comme fonction du temps, étant données d'abord la fonction des forces $V(x, y, z, t)$ et ensuite certaines données sur le mouvement initial du corpuscule. Les équations adoptées par la théorie classique sont les équations bien connues :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ces trois équations différentielles simultanées étant du second ordre, leurs solutions sont complètement déterminées si l'on connaît les valeurs de x, y, z à un instant initial et les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ à cet instant initial. En d'autres termes, le mouvement du corpuscule est entièrement fixé par les équations précédentes si l'on connaît sa position et sa vitesse initiales. Le postulat du déterminisme est donc bien satisfait.

Je ne puis naturellement développer ici toutes les nombreuses conséquences que les traités de Mécanique tirent des équations dont je viens de rappeler la forme. Je vais seulement me borner à vous rappeler le théorème fondamental de Jacobi, qui prépare en quelque sorte le passage à la nouvelle Mécanique.

Voici ce théorème : Si l'on parvient à trouver une intégrale complète $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ contenant 3 constantes arbitraires (dont aucune n'est additive) de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{1}{m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z, t) = \frac{\partial S}{\partial t},$$

les équations :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = b, \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = c,$$

où a, b, c sont constantes arbitraires, définissent un mouvement possible du corpuscule dans le champ de force ; et les composantes de la quantité de mouvement du corpuscule lorsqu'en exécutant ce mouvement il occupe la position xyz au temps t , sont données par les relations

$$p_x = mv_x = - \frac{\partial S}{\partial x},$$
$$p_y = mv_y = - \frac{\partial S}{\partial y},$$
$$p_z = mv_z = - \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Nous voyons donc que les mouvements possibles du corpuscule se répartissent en classes, chaque classe correspondant à une même intégrale complète $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$, par suite à un même ensemble de constantes primaires α, β, γ . Chacune de ces classes contient une infinité de mouvements correspondant tous à une même intégrale complète mais différent par la valeur des constantes secondaires a, b, c .

Nous allons maintenant fixer un instant notre attention sur le cas particulièrement important des champs constants où la fonction V ne dépend pas explicitement du temps. On sait qu'alors il y a conservation de l'énergie, c'est-à-dire que durant tout le cours du mouvement la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ du corpuscule et de son énergie potentielle V garde une valeur constante E . Il est naturel de faire jouer à la constante E le rôle d'une des constantes primaires de la théorie de Jacobi, soit γ . On pose alors

$$S(x, y, z, t, \alpha, \beta, E) = Et - S_1(x, y, z, E, \alpha, \beta),$$

où S_1 est une fonction qui ne dépend plus du temps (fonction de Jacobi raccourcie). Pour appliquer le théorème de Jacobi, il faut chercher une intégrale complète dépendant de la constante E et de deux constantes arbitraires α et β de l'équation

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) = E.$$

Si l'on a obtenu une telle intégrale complète, le mouvement défini par les équations

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \beta} = b, \quad \frac{\partial S_1}{\partial E} = t - \frac{\partial S_1}{\partial E} = c$$

est un des mouvements possibles du corpuscule dans le champ de force constant et la quantité de mouvements est définie par les relations

$$p_x = mv_x = \frac{\partial S_1}{\partial x},$$

$$p_y = mv_y = \frac{\partial S_1}{\partial y},$$

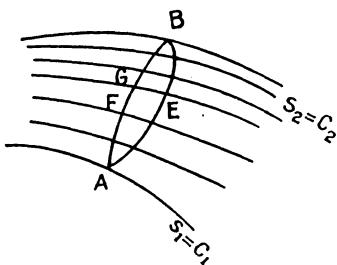
$$p_z = mv_z = \frac{\partial S_1}{\partial z}.$$

Les mouvements possibles se divisent en classes correspondant à une même valeur de l'énergie E et des deux autres constantes α et β . Chaque classe contient une triple infinité de mouvements caractérisés par la valeur des trois constantes secondaires a, b, c .

Les équations $\frac{\partial S}{\partial x} = a$ et $\frac{\partial S_1}{\partial \beta} = b$ ne contenant pas le temps définissent une courbe de l'espace qui est la trajectoire du corpuscule. L'équation $\frac{\partial S_1}{\partial E} = c$ qu'on écrit souvent $\frac{\partial S}{\partial E} = t - t_0$ en posant $c = t_0$ donne le mouvement le long de la trajectoire. On peut donc dire que dans le cas des champs constants l'étude de la trajectoire peut être séparée de celle du mouvement : ceci n'a pas lieu dans le cas général des champs variables avec le temps.

Un autre théorème important valable dans le cas des champs constants est le suivant : les trajectoires de même classe qui correspondent à une intégrale complète $S_1(x, y, z, E, \alpha, \beta)$ sont orthogonales aux surfaces $S_1 = \text{const}$. Ceci résulte immédiatement du fait que les composantes v_x, v_y et v_z du vecteur vitesse tangent à la trajectoire sont proportionnelles aux dérivées $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$. Cette propriété des trajectoires d'être normales aux surfaces $S_1 = \text{const}$. permet de retrouver le principe de moindre action de Maupertuis. Considérons toutes les surfaces $S_1 = \text{const}$. correspondant à des valeurs de la constante comprises entre deux valeurs données c_1 et c_2 . J'ai représenté quelques-unes schématiquement.

Soient AEB une trajectoire de la classe définie par $S_1 = \text{const.}$ et AFB une courbe de mêmes extrémités légèrement différente de forme. Si



l'on désigne par du l'élément de normale aux surfaces $S_1 = \text{const.}$, l'intégrale $\int \frac{\partial S}{\partial u} ds$ prise le long de AEB est égale puisque alors $ds = du$ à $c_2 - c_1$. Prenons l'intégrale $\int \frac{\partial S}{\partial u} ds$ le long de la courbe variée AFB. La contribution d'un petit élément tel que FG est supérieure ou au moins égale à la variation de S_1 de F en G : en effet si FG est normal aux surfaces $S_1 = \text{const.}$ qui passent par ses extrémités $FG = du$ et la quantité $\frac{\partial S}{\partial u}$ FG est égale à $S_1(G) - S_1(F)$ tandis que si FG n'est pas normal aux surfaces $S_1 = \text{const.}$, $FG > du$ et $\frac{\partial S}{\partial u}$ FG est supérieur à $S_1(G) - S_1(F)$. Or tous les éléments FG ne peuvent être normaux aux surfaces $S_1 = \text{const.}$ sans quoi AFGB coïnciderait avec AFB. Donc l'intégrale $\int_A^B \frac{\partial S}{\partial u} ds$ est plus grande le long de AFB que le long de AEB. D'après l'équation à laquelle S_1 satisfait, on a

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} = \sqrt{\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{2m(E - V(x, y, z))}.$$

Nous arrivons ainsi à l'énoncé suivant qui constitue le principe de Maupertuis et qui est d'ailleurs soumis à des restrictions bien connues des mathématiciens : « Toute trajectoire passant par 2 points A et B du champ constant est caractérisée par le fait que l'intégrale $\int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds$ est plus petite pour la trajectoire que pour toute courbe infiniment voisine. »

Un exemple très simple illustrera ces considérations. Envisageons le mouvement d'un corpuscule en l'absence de champ. Alors $V=0$ et comme il y a conservation de l'énergie

$$S = E t - S_1(x, y, z, E, \alpha, \beta).$$

S_1 étant une intégrale complète de l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] = E.$$

Une telle intégrale complète est donnée par la formule

$$S_1 = \sqrt{2mE} (x\alpha + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z).$$

Les trajectoires sont données d'après le théorème de Jacobi par les relations

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial x} &= \sqrt{2mE} \left[x - \frac{\alpha z}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} \right] = a; \\ \frac{\partial S_1}{\partial \beta} &= \sqrt{2mE} \left[y - \frac{\beta z}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} \right] = b.\end{aligned}$$

Ce sont des droites de cosinus directeurs $\alpha, \beta, \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$.
Le mouvement est donné par

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} (x\alpha + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z) = t - t_0$$

ou

$$\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z = \sqrt{\frac{2E}{m}} (t - t_0).$$

Le mouvement est uniforme et la vitesse est $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ comme cela doit être puisque $E = \frac{1}{2}mv^2$. Les surfaces $S_1 = \text{const.}$ sont des plans de cosinus directeurs $\alpha, \beta, \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, les trajectoires sont les normales à ces plans. Enfin les relations telles que $mv_x = \frac{\partial S_1}{\partial x}$ se vérifient de suite.

Après avoir ainsi rappelé sommairement quelques points de l'ancienne Mécanique nous devons aussi pour préparer le passage à la nouvelle Mécanique rappeler quelques notions sur la propagation des ondes monochromatiques dans un milieu isotrope ré-

fringent et dispersif. Elle est régie par l'équation

$$\Delta\Psi \equiv \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

où V est une fonction du point considéré (x, y, z) et de la fréquence ν de l'onde monochromatique. L'onde monochromatique est représentée par une fonction $\psi(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{i\pi\nu t}$, et si l'on pose

$$\frac{1}{V} = \frac{n(x, y, z, \nu)}{V_0},$$

où V_0 serait la valeur constante de V dans le vide, on a

$$\Delta\Psi + \frac{i\pi^2\nu^2 n^2}{V_0^2} \psi = 0.$$

Rigoureusement parlant, l'étude de la propagation doit se faire en cherchant les solutions de cette équation mais il arrive assez fréquemment que l'on puisse résoudre le problème par des procédés approximatifs qui constituent l'optique géométrique. Pour comprendre ce qu'est l'optique géométrique, considérons d'abord le cas où l'indice ne dépend pas de xyz (milieu homogène). On obtiendra alors une solution de l'équation de propagation en considérant l'onde plane

$$\Psi = a e^{i\pi\nu \left[t - \frac{n(\nu)}{V_0} (\alpha x + \beta y + \gamma z) \right]}$$

avec $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$, a est une constante appelée l'amplitude de l'onde plane. La fonction $\varphi = \nu t - \frac{n(\nu)}{V_0} (\alpha x + \beta y + \gamma z)$ sera appelée la phase. Les surfaces d'égale phase ou « équiphases » $\varphi = \text{const.}$ sont des plans. Au cours du temps, les valeurs de la phase et par suite de la fonction Ψ progressent dans la direction α, β, γ avec la vitesse $V = \frac{V_0}{n(\nu)}$. A un instant donné, on retrouve les mêmes valeurs de Ψ sur des plans d'égale phase, parallèles et séparés les uns des autres par la distance constante $\lambda = \frac{V}{\nu}$ nommée « longueur d'onde », et en un point donné on retrouve les mêmes valeurs de Ψ à des intervalles de temps égaux à la période $T = \frac{1}{\nu}$.

Considérons maintenant un milieu où l'indice varie lentement d'un point à l'autre. Une onde monochromatique pourra s'écrire :

$$\Psi = a(x, y, z) e^{2\pi i(vt - \varphi_1(x, y, z))}$$

On peut appeler « longueur d'onde » au point xyz l'inverse de la valeur en ce point de la dérivée $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}$ prise suivant la normale à la surface $\varphi_1 = \text{const.}$ Si dans une région de l'espace la variation de l'indice est négligeable à l'échelle de la longueur d'onde, on voit aisément que les dérivées de a seront négligeables devant celles de φ_1 , et en substituant dans l'équation de propagation on obtient l'équation approximative

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{v^2 n^2(x, y, z, v)}{V_0^2}.$$

C'est l'équation dite de l'optique géométrique qui permet de déterminer approximativement la forme de la phase φ_1 sans se préoccuper des variations lentes de l'amplitude a . Soit $\varphi_1(x, y, z, v, \alpha, \beta)$ une intégrale complète de cette équation : la fonction

$$\Psi = a e^{2\pi i(vt - \varphi_1(x, y, z, v, \alpha, \beta))}$$

où α est une fonction lentement variable à grande échelle, sera une solution approximative de l'équation de propagation. Par définition les courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$ sont appelées les « rayons » de l'onde Ψ . En appliquant le même raisonnement qui nous a conduit au principe de Maupertuis, on peut alors démontrer le principe suivant dit « Principe de Fermat » : Si la courbe C joignant A et B de l'espace est un rayon de l'onde, l'intégrale

$$\int_A^B \frac{ds}{\lambda} = \int_A^B \frac{nv}{V_0} ds$$

prise le long du rayon est plus petite que la même intégrale prise le long d'une courbe infiniment voisine joignant aussi les points A et B .

L'optique géométrique n'est qu'une approximation mais si la longueur d'onde tend vers zéro, cette approximation tend à devenir rigoureusement exacte.

La présence de la fréquence dans l'équation de propagation

(V dépend de v) appelle quelque attention. Au lieu d'avoir une onde monochromatique, on peut avoir à envisager une superposition d'ondes monochromatiques, chacune d'elles satisfaisant à l'équation de propagation mais avec la valeur de V qui correspond à sa fréquence. Mais il peut arriver qu'on puisse trouver une équation de propagation où la fréquence ne figure plus et à laquelle satisfasse la fonction d'ondes formée par la superposition des ondes monochromatiques. Comme exemple, supposons que l'indice soit donné par la loi

$$n(x, y, z, v) = \sqrt{1 - \frac{F(x, y, z) V_0^2}{4\pi^2 v^2}}.$$

Alors on pourra adopter comme équation générale de propagation :

$$\Delta\Psi - \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = F(x, y, z)\Psi,$$

qui ne contient plus v car pour une onde monochromatique

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 v^2 \Psi,$$

et l'équation reprend bien la forme dont nous sommes partis

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2 v^2 n^2}{V^2} \Psi = 0, \quad \Delta\Psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad \left(V = \frac{V_0}{n} \right).$$

C'est un cas de ce genre que nous allons rencontrer en Mécanique ondulatoire.

La grande analogie de forme qui existe entre l'équation de l'optique géométrique et l'équation de Jacobi pour les champs constants, analogie qui se traduit aussi par l'identité de forme des deux principes de Fermat et de Maupertuis, avait frappé, il y a plus d'un siècle, l'esprit pénétrant du géomètre Hamilton mais c'est seulement le développement de la théorie des quanta qui a permis de préciser cette analogie d'une façon satisfaisante.

Pour comprendre comment cela a pu être effectué, nous commencerons par comparer le mouvement d'un corpuscule en l'absence de champ ($V = 0$) avec la propagation dans le vide ($n = 0$).

Pour le corpuscule la fonction S_1 peut alors être prise égale à

$$S_1 = \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = mv(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z),$$

car $E = \frac{1}{2}mv^2$; $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Pour l'onde nous avons

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{v^2}{\lambda^2},$$

et nous trouvons l'intégrale complète

$$\varphi_1 = \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z) = \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z),$$

$\lambda = \frac{\nu}{v}$ étant la longueur d'onde dans le vide.

Les fonctions S et φ correspondant à S_1 et φ_1 sont

$$S = Et - mv(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z),$$

$$\varphi = \nu t - \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}z).$$

Un des principes essentiels de la théorie des quanta qui se manifeste notamment dans la théorie des quanta de lumière d'Einstein c'est de toujours établir une proportionnalité entre l'énergie d'un corpuscule et la fréquence d'une onde de la forme $E = h\nu$, h étant la constante de Planck. Pour établir cette proportionnalité entre l'énergie du corpuscule dont φ est la fonction de Jacobi et la fréquence de l'onde dont S est la phase il faut poser

$$S = h\nu,$$

car alors en égalant les coefficients de t , on a bien $E = h\nu$. Mais de plus en égalant les coefficients de $\alpha x + \beta y + \gamma z$, on trouve aussi

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

équation qui établit une relation entre la longueur d'onde de l'onde et la quantité de mouvements du corpuscule.

En d'autres termes, par le seul fait de poser $S = h\nu$, nous faisons correspondre au mouvement du corpuscule d'énergie E et de quantité de mouvements mv la propagation d'une onde monochro-

matique $\Psi = ae^{\frac{2\pi i}{\hbar} S}$ ayant la fréquence $\nu = \frac{E}{\hbar}$ et la longueur d'onde $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$.

Cette correspondance, établie pour le mouvement rectiligne et uniforme, se généralise dans le cas du mouvement d'un corpuscule sous l'action d'un champ constant défini par l'énergie potentielle $V(x, y, z)$. On comparera alors le mouvement du corpuscule à la propagation d'une onde dans un milieu non homogène d'indice $n(x, y, z, \nu)$. La fonction S s'écrivant alors $E t - S_1$ et la fonction ϕ étant $\nu t - \varphi_1$, on posera encore

$$S = h\varphi,$$

d'où

$$E = h\nu \quad \text{et} \quad S_1 = h\varphi_1.$$

Or pour le corpuscule on a l'équation (réduite) de Jacobi

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2 = 2m[E - V(x, y, z)],$$

et pour l'onde l'équation de l'optique géométrique

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{n^2 \nu^2}{V_0^2}.$$

Pour avoir $S_1 = h\varphi_1$, il faut poser

$$2m[E - V(x, y, z)] = h^2 \frac{n^2 \nu^2}{V_0^2}.$$

Or $\frac{V_0}{\nu}$ est la longueur d'onde correspondant à la fréquence ν dans le cas de l'absence de champ; on a donc

$$\frac{V_0}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

et par suite nous obtenons

$$n^2 = 1 - \frac{V(x, y, z)}{E} = 1 - \frac{V(x, y, z)}{h\nu}.$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'indice de réfraction variable que nous devons attribuer à l'espace où règne le potentiel V quand nous envisageons la propagation de l'onde que la relation $S = h\varphi$ associe au corpuscule. La longueur d'onde dans le

champ est :

$$\lambda(x, y, z) = \frac{V_0}{n^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m[E - V(x, y, z)]}}$$

ou encore

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

puisque ici

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z).$$

Jusqu'ici nous avons supposé que le corpuscule obéissait aux lois de la Mécanique classique correspondant à la fonction S de Jacobi. Nous sommes parvenus à la conclusion suivante : aux mouvements classiques d'énergie bien définie du corpuscule correspond la propagation (au degré d'approximation de l'optique géométrique) d'une onde monochromatique obéissant à l'équation

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} [E - V(x, y, z)]\Psi = 0.$$

Chaque fois que l'optique géométrique sera valable pour la propagation de l'onde Ψ , nous pourrons poser

$$\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S} = a e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [Et - S_1(x, y, z)]},$$

et les trajectoires prévues par la Mécanique classique et normales aux surfaces $S_1 = \text{const.}$ ne seraient pas autre chose que les rayons de l'onde Ψ normaux aux surfaces d'égale phase.

Mais qu'arrive-t-il si l'optique géométrique n'est plus valable pour la propagation de l'onde associée au corpuscule ? L'idée essentielle de la nouvelle Mécanique c'est de donner le rôle prépondérant à l'équation des ondes. Si l'on adopte ce point de vue, la mécanique classique n'est plus qu'une approximation : elle n'est utilisable que quand l'optique géométrique suffit à représenter la propagation de l'onde associée, et pour cela il faut que l'indice n , défini plus haut, varie peu à l'échelle de la longueur d'onde de l'onde Ψ ou encore il faut que le champ de force varie peu à cette échelle. Si la longueur d'onde de l'onde associée était infiniment petite, la Dynamique classique serait donc rigoureusement valable. D'après la formule $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ ceci serait toujours réalisé si \hbar était

infiniment petit. La modification que l'on a dû apporter aux lois classiques nous apparaît donc comme liée à la valeur finie de la constante \hbar .

Nous venons d'être conduits à substituer aux équations de la Dynamique du point matériel dans un champ constant l'équation de propagation d'une onde monochromatique mais, comme nous le verrons, on est amené en Mécanique ondulatoire à considérer des trains d'ondes formés par la superposition d'ondes monochromatiques. Il est donc utile de chercher à obtenir une forme de l'équation d'ondes à laquelle obéisse la fonction d'ondes Ψ quand elle représente une telle superposition d'ondes monochromatiques.

L'équation

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} V(x, y, z)\Psi = \frac{4\pi im}{\hbar} \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

satisfait à cette condition car pour une onde monochromatique de fréquence $\frac{E}{\hbar}$ on a

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\hbar} E\Psi,$$

et l'on retrouve

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - V)\Psi = 0.$$

L'avantage d'écrire l'équation de propagation sous la forme générale est très grand. D'abord, toute onde Ψ formée d'une superposition d'ondes monochromatiques est solution de cette équation, mais de plus comme avec cette équation nous ne sommes plus obligés de considérer seulement des ondes monochromatiques, le temps ne joue plus de rôle particulier et nous pouvons nous affranchir de la restriction que le champ soit constant. Nous admettons donc que la fonction potentielle est une fonction quelconque $V(x, y, z, t)$ des coordonnées et du temps, l'équation de propagation de la nouvelle Mécanique est

$$\Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} V(x, y, z, t)\Psi = \frac{4\pi im}{\hbar} \frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Avant de discuter le sens des équations de la nouvelle Méca-

nique, nous devons nous occuper du cas où plusieurs corpuscules se meuvent sous l'influence de leurs actions réciproques et éventuellement d'un champ extérieur. C'est la dynamique des systèmes de corpuscules des livres classiques. Rappelons d'abord quelques résultats de cette théorie classique.

Soient un ensemble de N corpuscules, m_i la masse du $i^{\text{ème}}$ corpuscule, x_i, y_i, z_i ses coordonnées. L'énergie cinétique du système est

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right].$$

L'énergie potentielle du système est formée de deux sortes de termes : 1^o ceux qui expriment l'action mutuelle des corpuscules et sont de la forme $V_{ij}(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2})$; 2^o ceux qui expriment l'action du champ extérieur s'il y en a un sur chaque corpuscule et qui sont de la forme $V_i(x_i, y_i, z_i, t)$.

Il existe pour un tel système un théorème tout à fait analogue à celui de Jacobi pour le corpuscule unique. Le voici : Si l'on parvient à trouver une intégrale complète (avec $3N$ constantes non additives $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}$) de l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] + V(x_1, \dots, z_N, t) = \frac{\partial S}{\partial t},$$

les équations $\frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = a_k (k = 1, \dots, 3N)$ où les a_k sont de nouvelles constantes arbitraires donnent le mouvement, et les composantes des quantités de mouvements des corpuscules sont fournies par les équations

$$p_{x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial S}{\partial x_i};$$

$$p_{y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial S}{\partial y_i};$$

$$p_{z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt} = - \frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

Si le champ extérieur est constant V ne dépend pas explicitement du temps et l'on peut écrire

$$S = Et - S_1(x_1, \dots, z_N).$$

On a alors pour la fonction réduite S_1 , l'équation réduite

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z_i} \right)^2 \right] - V(x_1, \dots, z_N) \leq E.$$

Si l'on trouve une intégrale complète de cette équation contenant E et $3N - 1$ constantes arbitraires $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}$, les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_k} = \alpha_k \quad (k = 1, \dots, 3N - 1), \quad \frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0,$$

et l'on a aussi

$$p_{x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial x_i};$$

$$p_{y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial y_i};$$

$$p_{z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial S_1}{\partial z_i}.$$

Ceci rappelé envisageons l'espace à $3N$ dimensions formé à l'aide des $3N$ coordonnées rectangulaires x_1, \dots, z_N . On appelle cet espace l'espace de configuration parce que chaque point de cet espace correspond à une configuration bien déterminée du système. Dans la Mécanique classique où l'on attribue toujours aux corpuscules des coordonnées bien définies, l'état du système à chaque instant est représenté par un point de l'espace de configuration. Au cours du temps le point figuratif du système décrit une courbe dans l'espace de configuration; le but de la Mécanique classique des systèmes est précisément de déterminer cette courbe; elle le fait grâce aux équations classiques $m_i \frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$, etc. Le théorème de Jacobi permet de grouper les trajectoires possibles du point figuratif en classes correspondant à une même intégrale complète de l'équation de Jacobi; les trajectoires d'une même classe sont individualisées par les valeurs des constantes secondaires α_k .

Pour passer de la Dynamique classique des systèmes à la Mécanique ondulatoire des systèmes, Schrödinger a eu l'idée que l'on doit considérer une onde se propageant dans l'espace de configuration. Cette propagation d'ondes doit satisfaire aux conditions suivantes : 1° Quand le champ extérieur est constant, l'approxima-

tion de l'optique géométrique pour la propagation de l'onde doit correspondre à l'ancienne Mécanique. Comme pour le corpuscule unique, l'équation de propagation doit alors dégénérer en l'équation de Jacobi. 2° Si le système comprend qu'un seul corpuscule, on doit retrouver l'équation du corpuscule unique. 3° Si les corpuscules du système ne réagissent pas les uns sur les autres, l'équation de propagation pour le système doit se décomposer en N équations ayant la forme de celle du corpuscule unique, chacune étant valable pour l'un des corpuscules du système. Schrödinger a donné l'équation de propagation dans l'espace de configuration qui satisfait à ces conditions. Elle s'écrit :

$$\sum_1^N \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} V(x_1, \dots, z_N, t) = \frac{i\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Il arrive fréquemment que le système envisagé ne peut être considéré comme formé par N corpuscules sans liaison. On définit alors dans l'ancienne Mécanique le mouvement du système à l'aide d'un certain nombre de variables de Lagrange q_1, \dots, q_n . Schrödinger a expliqué comment on doit alors former l'équation de propagation. Nous laisserons cela de côté ici.

Nous avons déjà écrit beaucoup d'équations, mais il faut maintenant chercher ce qu'elles signifient et ce que l'on peut en tirer. Nous allons d'abord nous occuper du cas du corpuscule unique. Dans ce cas, nous avons remplacé les équations de Newton par l'équation de propagation

$$\Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t) \Psi = \frac{i\pi im}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Une première remarque ici s'impose : l'équation précédente est à coefficients complexes, et l'on doit écrire la solution sous forme complexe. La fonction Ψ est donc essentiellement complexe, elle ne peut représenter une vibration ayant un sens physique réel. Dans les théories classiques des vibrations, en optique classique par exemple, on introduisait des fonctions complexes, mais ce n'était là qu'un artifice mathématique que l'on pouvait éviter; seule la partie réelle de la quantité complexe avait un sens physique. Il n'en est plus de même ici; la fonction Ψ est essentiellement com-

plex. Comme une grandeur complexe ne peut pas avoir de signification physique directe (¹), nous devons en conclure que Ψ est seulement une sorte de grandeur intermédiaire pouvant nous servir à former des quantités réelles ayant un sens physique. Ce qui va suivre vient confirmer et préciser cette idée.

Dans la nouvelle Mécanique, il s'agit essentiellement de savoir ce que nous pouvons déduire de la propagation relativement aux phénomènes observables. Dans l'ancienne conception, nous pouvions déterminer avec une précision en principe illimitée, en pratique seulement limitée par l'imperfection de nos moyens d'observation la position et la vitesse d'un corpuscule à un instant initial quelconque; les équations de la Dynamique nous permettaient alors de prédire, avec une précision d'autant plus grande que l'observation initiale était plus précise, à quel endroit et avec quelle vitesse le corpuscule pouvait être observé à un instant ultérieur t . Le fait qu'une précision illimitée de l'observation initiale était supposée possible et conduisait à une précision rigoureuse de l'observation à l'instant t était conforme au postulat du déterminisme des phénomènes de la Nature. Nous allons voir que le développement de la nouvelle Mécanique a conduit à des conceptions très différentes.

Un premier principe qui paraît s'imposer au sujet de la signification de l'onde Ψ est le suivant : « Le carré du module de l'onde Ψ mesure en chaque point et à chaque instant la probabilité pour que le corpuscule soit observé en ce point à cet instant. » La fonction Ψ étant une quantité essentiellement complexe, on peut toujours l'écrire $\Psi = ae^{i\varphi}$, a et φ étant le module et l'argument, quantités réelles. Avec le langage de la théorie classique des ondes, on peut appeler « a » l'amplitude et « a^2 » l'intensité. Si l'on désigne par $\bar{\Psi}$ la quantité conjuguée de Ψ , soit $a e^{-i\varphi}$, on a

$$a^2 = \Psi \cdot \bar{\Psi}.$$

Nous allons expliquer comment on a été amené à adopter le principe énoncé plus haut que j'ai nommé « principe des interférences ». Dans la théorie classique de la lumière, l'intensité de l'onde lumineuse mesure en chaque point la quantité d'énergie

(¹) Quand nous disons qu'une grandeur a une signification physique directe nous voulons dire qu'elle représente quelque chose de « mesurable ».

qu'on peut y recueillir. C'est cette règle qui permet la prévision correcte des phénomènes d'interférences et de diffraction. Or, vous le savez, l'étude des phénomènes élémentaires d'action entre la matière et le rayonnement a montré que tout se passe comme si toute radiation de fréquence ν était formée de corpuscules (quanta lumière ou photons) d'énergie $h\nu$. Représentons-nous donc pour un instant une onde lumineuse comme entraînant avec elles un nuage de corpuscules d'énergie : pour être en accord avec l'interprétation des phénomènes d'interférence, il faut supposer que la densité du nuage est mesurée en chaque point par l'intensité de l'onde. Mais c'est là un énoncé insuffisant. D'une part, en effet, on a pu obtenir des phénomènes d'interférences ou de diffraction en employant pendant un temps très long une lumière d'intensité si faible qu'il ne devait jamais y avoir plus d'un photon à la fois dans l'appareil d'interférences ; dans ces cas, il est difficile de parler de la densité du nuage. D'autre part, nous verrons qu'il est difficile avec la nouvelle Mécanique, d'attribuer à chaque instant aux corpuscules une position et une vitesse bien définie, de sorte que l'image d'un nuage de corpuscules accompagnant l'onde lumineuse peut induire en erreur. Nous devons donc dire plus simplement avec plus de prudence dans le langage que l'intensité de l'onde lumineuse mesure en chaque point et à chaque instant la probabilité pour qu'un photon produise un effet observable : c'est bien là le principe des interférences et nous allons voir qu'il y a lieu de l'étendre des photons aux corpuscules matériels.

Un des résultats expérimentaux les plus importants de ces années dernières a été la découverte du phénomène de diffraction des électrons par les cristaux. Si l'association des ondes avec les corpuscules exposée dans la première conférence est exacte, à tout électron de vitesse v doit être associée une onde dont la longueur d'onde (en laissant de côté les corrections de Relativité) doit être égale à $\frac{h}{mc}$.

Cette formule conduit à associer aux électrons usuellement utilisables dans les expériences des longueurs d'onde de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-9} cm. Cette longueur d'onde est de l'ordre des rayons X ; par suite, on peut s'attendre à pouvoir observer avec des électrons des phénomènes analogues aux phénomènes découverts par Laue

de la diffraction des rayons X par les cristaux. Un faisceau d'électrons de vitesse v sera associée en Mécanique ondulatoire à une onde de longueur d'onde $\frac{h}{mv}$. Si cette onde tombe sur un cristal, elle subira une diffraction prévue par la théorie développée sur Laue et Bragg, et l'amplitude de l'onde sera maximum dans certaines directions privilégiées déterminées par des formules bien connues. C'est bien là ce qu'ont établi les belles expériences de MM. Davisson et Germer, du professeur G. P. Thomson, de Rupp, de Ponte et d'autres encore. Ces expériences prouvent que la probabilité pour qu'un électron manifeste sa présence en un point est mesurée par l'intensité de l'onde associée en ce point. Le principe des interférences, certainement valable pour les photons, paraît donc aussi exact pour les particules matérielles. Nous sommes donc fondés à l'adopter d'une façon générale.

Nous préciserons l'énoncé du principe des interférences de la façon suivante.

D'abord, comme la fonction Ψ , solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire n'est définie qu'à une constante multiplicative près, nous choisirons cette constante de façon à avoir

$$\iiint \psi \bar{\psi} d\tau = 1.$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace. Nous verrons tout à l'heure que si cette condition est réalisée à un instant quelconque, elle le reste toujours en vertu même de l'équation de propagation. La fonction ψ est alors dite « normée ».

Cela étant, nous énoncerons le principe des interférences en disant « soit $d\tau$ un élément de volume de l'espace contenant le point de coordonnées xyz : la probabilité pour qu'une observation faite à l'instant t permette de localiser le corpuscule dans cet élément de volume est $\psi(xyzt) \bar{\psi}(xyzt) d\tau$ ».

Au cours du temps, la répartition des valeurs du $\psi\bar{\psi}$ dans l'espace se modifie en général, et pour suivre ces modifications, il est commode d'imaginer un fluide dont la densité à chaque instant en chaque point a pour expression

$$\rho(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) \bar{\psi}(x, y, z, t).$$

Par définition, nous attribuerons à ce fluide un mouvement tel

que sa vitesse au point xyz à l'instant t soit donnée par la formule

$$\vec{v} = \frac{1}{\psi\bar{\psi}} \frac{\hbar}{4\pi im} (\psi \operatorname{grad} \bar{\psi} - \bar{\psi} \operatorname{grad} \psi).$$

Cette expression est bien réelle, car en posant $\psi = ae^{i\varphi}$, elle s'écrit

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{2\pi m} \operatorname{grad} \varphi.$$

Nous allons montrer que le fluide de probabilité ainsi défini se conserve en se déplaçant, et ceci nous apportera la preuve que, si à l'instant initial, la quantité totale du fluide, c'est-à-dire l'intégrale $\int \int \int \psi \bar{\psi} d\tau$ est égale à un, il en sera de même à tout instant postérieur. L'équation de propagation nous donne, en effet,

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} V(x, y, z, t)\psi = \frac{i\pi im}{\hbar} \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

La quantité ψ obéit donc à l'équation conjuguée

$$\Delta\bar{\psi} - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} V(x, y, z, t)\bar{\psi} = -\frac{i\pi im}{\hbar} \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}.$$

Multiplions la première équation par $\bar{\psi}$, la seconde par ψ et retranchons. Il vient

$$\bar{\psi} \Delta\psi - \psi \Delta\bar{\psi} = \frac{4\pi im}{\hbar} \frac{\partial(\psi\bar{\psi})}{\partial t} = \frac{4\pi im}{\hbar} \frac{\partial\rho}{\partial t};$$

d'où

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\hbar}{i\pi im} (\bar{\psi} \Delta\psi - \psi \Delta\bar{\psi}) = \frac{\hbar}{i\pi im} \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\psi} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} \right] = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}),$$

par les définitions de ρ et de \vec{v} .

Le mouvement du fluide de densité ρ et de vitesse \vec{v} obéit donc à la relation

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

appelée en hydrodynamique l'équation de continuité. Or, cette relation signifie qu'il n'y a au cours du mouvement ni apparition, ni disparition du fluide, en d'autres termes, qu'il y a conservation de la quantité totale de ce fluide.

Nous démontrerons encore un théorème dû à P. Ehrenfest, dont

nous verrons tout à l'heure l'importance. Considérons un train d'ondes ψ limité, et soit A une grandeur vectorielle, qui, en chaque point de l'onde, est définie par trois composantes $A_x(xyzt)$, $A_y(xyzt)$, $A_z(xyzt)$. Nous appellerons « valeur moyenne » de cette grandeur à l'instant t dans le fluide de probabilité défini plus haut la grandeur \bar{A} de composantes

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \iiint A_x \varphi \, d\tau = \iiint A_x \psi \bar{\varphi} \, d\tau, \\ A_y &= \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Le théorème d'Ehrenfest s'énonce alors comme il suit : « Le centre de gravité du fluide de probabilité se déplace dans l'espace comme le ferait, d'après la Dynamique classique, un point matériel soumis à la valeur moyenne de la force. »

Par définition, les coordonnées du centre de gravité du fluide de probabilité sont, par définition,

$$\bar{x} = \iiint x \varphi \, d\tau.$$

$$\bar{y} = \iiint y \varphi \, d\tau,$$

$$\bar{z} = \iiint z \varphi \, d\tau.$$

Les formules qui traduisent le théorème d'Ehrenfest sont donc

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{f}_x = - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}, \quad \dots$$

Or, nous avons, par définition,

$$\begin{aligned}m \frac{\overline{dv_x}}{dt} &= \iiint m \varphi \frac{dv_x}{dt} \, d\tau \\ &= m \iiint \varphi \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \, d\tau.\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en remarquant que les $v_{x,y,z}$ sont nulles à l'infini, on obtient

$$m \frac{\overline{dv_x}}{dt} = m \iiint \left[\varphi \frac{\partial v_x}{\partial t} - v_x \operatorname{div}(\varphi v) \right] = m \iiint \frac{\partial}{\partial t} (\varphi v_x) \, d\tau.$$

en vertu de l'équation de continuité.

Or,

$$\rho v_x = \frac{h}{i\pi im} \left[\psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} - \bar{\Psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right].$$

Donc,

$$m \overline{\frac{dv_x}{dt}} = \frac{h}{i\pi i} \int \int \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t \partial x} - \bar{\Psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right] d\tau.$$

ou, en intégrant par parties,

$$m \overline{\frac{dv_x}{dt}} = \frac{h}{i\pi i} \int \int \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] d\tau.$$

L'équation de propagation donne maintenant

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h}{i\pi im} \Delta \psi - \frac{2\pi i}{h} \mathbf{V} \psi,$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = -\frac{h}{i\pi im} \Delta \bar{\Psi} - \frac{2\pi i}{h} \mathbf{V} \bar{\Psi},$$

d'où l'on conclut

$$m \overline{\frac{dv_x}{dt}} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \int \int \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \bar{\Psi} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Delta \psi \right] d\tau \\ + \int \int \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{V} \bar{\Psi} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \mathbf{V} \psi \right] d\tau.$$

La première intégrale est nulle, car une équation par parties la transforme en

$$\int \int \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] d\tau$$

et ceci est nul en vertu de la formule de Green parce que les ψ et $\bar{\Psi}$ sont nuls à l'infini. Il reste

$$m \overline{\frac{dv_x}{dt}} = \int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\psi \bar{\Psi} \mathbf{V}) - \psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \right] d\tau.$$

La première intégrale se ramène à une intégrale de surface nulle, et l'on a

$$m \overline{\frac{dv_x}{dt}} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}.$$

Un raisonnement très simple permet de voir que la moyenne de $\frac{dv_x}{dt}$ est égale à $\frac{d\bar{x}}{dt}$. Donc,

$$m \overline{\frac{d\bar{x}}{dt}} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x},$$

et le théorème d'Erenfest se trouve démontré.

Nous sommes maintenant armés d'un principe qui nous permet d'évaluer la probabilité de localisation d'un corpuscule quand on connaît son onde associée. Mais dans l'ancienne Mécanique, on admettait qu'il était possible à un instant d'attribuer au corpuscule une position x, y, z et un état de mouvement défini par une énergie E et une quantité de mouvement $p = mv$. Or, jusqu'ici, dans la nouvelle théorie, nous n'avons pu définir qu'une probabilité de position, nous n'avons pas parlé d'état de mouvement. Étudions ce point maintenant.

Envisageons le cas simple de l'absence de champ. Nous avons trouvé qu'au mouvement rectiligne uniforme d'énergie E constante et de quantité de mouvement $\vec{p} = \vec{mv}$ également constante s'opérant dans une direction de cosinus directeurs $\alpha, \beta, \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ correspondrait l'onde

$$\Psi = A e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [Et - \sqrt{2mE} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \beta y + \gamma z]}$$

de fréquence $\frac{E}{\hbar}$ et de longueur d'onde $\frac{\hbar}{mv}$. Cette onde monochromatique représente un état de mouvement bien déterminé, mais elle ne nous donne aucun renseignement sur la position du corpuscule, car le $\bar{\Psi}$ est le même en tout point de l'espace, l'onde est homogène. En d'autres termes, l'onde Ψ monochromatique correspond à des valeurs bien déterminées de l'énergie et de la quantité de mouvement, mais si nous pouvons, par une observation directe, parvenir à localiser le corpuscule, il y a, d'après le principe des interférences, la même probabilité pour que ce soit en n'importe quel point de l'espace.

Mais au lieu de la solution monochromatique, nous pourrions considérer un train d'ondes de dimensions limitées formé par la superposition de solutions monochromatiques. Alors, l'intensité $\bar{\Psi}$ n'est différente de zéro que dans les limites du train d'ondes et la position du corpuscule est mieux définie. Mais, par contre, si nous faisons correspondre à chaque composante monochromatique de fréquence ν et de longueur d'onde λ un état de mouvement défini par l'énergie $E = h\nu$ et les composantes de quantité de mouvement

$$p_x = \alpha \frac{\hbar}{\lambda}, \quad p_y = \beta \frac{\hbar}{\lambda}, \quad p_z = \gamma \frac{\hbar}{\lambda},$$

comme le train d'ondes est formé par une superposition d'ondes monochromatiques, nous ne pouvons plus attribuer au corpuscule un mouvement bien défini. En passant de l'onde monochromatique au train d'ondes, nous avons restreint l'incertitude sur la position, mais nous avons fait apparaître une incertitude sur le mouvement. Nous pouvons même envisager le cas extrême où le train d'ondes aurait des dimensions infiniment petites. En ce cas, il faudrait le considérer comme formé par une infinité d'ondes monochromatiques, et tandis que la position serait alors bien déterminée par le principe des interférences, l'état de mouvement serait, lui, entièrement indéterminé. Donc, mieux la position est définie, plus est grande l'incertitude sur l'état de mouvement.

Dans les considérations qui précèdent, nous avons admis implicitement un deuxième principe que nous nommerons le « principe de décomposition spectrale ». D'après ce principe, si l'onde ψ attachée à un corpuscule est formée par une superposition d'ondes monochromatiques, à chaque onde monochromatique correspond un état de mouvement du corpuscule. D'une façon plus précise, on peut, avec M. Born, énoncer ce principe de la façon suivante : « Si l'onde ψ est une somme d'ondes monochromatiques formant un spectre discontinu, c'est-à-dire si l'on a

$$\psi = \sum_{E, z, \beta} a(E, z, \beta) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E t - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z)]}$$

la probabilité pour qu'une mesure conduise à attribuer au corpuscule le mouvement d'énergie E dans la direction $\alpha\beta\gamma$ est

$$a(E, z, \beta) \bar{a}(E, \alpha, \beta) = |a|^2.$$

Si l'onde Ψ est une somme d'ondes monochromatiques formant un spectre continu, c'est-à-dire si

$$\psi = \iiint a(E, z, \beta) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E t - \sqrt{2mE}(\alpha x + \beta y + \gamma z)]} dz d\beta dE,$$

la probabilité pour qu'une observation conduise à attribuer au corpuscule un mouvement d'énergie comprise entre E et $E + \Delta E$ dans une direction correspondant à l'intervalle $\alpha, z + \Delta\alpha, \beta, \beta + \Delta\beta$ est égale à

$$\iint_{\Delta E} \int_{\Delta z} \int_{\Delta \beta} a(E, z, \beta) \bar{a}(E, z, \beta) dz d\beta dE.$$

Plus brièvement, on peut dire que l'intensité de chaque composante spectrale mesure la probabilité du mouvement correspondant.

Les deux principes que nous venons successivement d'énoncer dans cette conférence : le principe des interférences et le principe de décomposition spectrale, conduisent à ce que l'on nomme les relations d'incertitude d'Heisenberg. Pour les énoncer, précisons un peu la représentation d'un train d'ondes par une superposition d'ondes monochromatiques planes.

En posant

$$\begin{aligned}v &= \frac{E}{\hbar}, \\ \mu_x &= \frac{p_x}{\hbar} = \frac{\alpha \sqrt{2mE}}{\hbar}, \\ \mu_y &= \frac{p_y}{\hbar} = \frac{\beta \sqrt{2mE}}{\hbar}, \\ \mu_z &= \frac{p_z}{\hbar} = \frac{\gamma \sqrt{2mE}}{\hbar},\end{aligned}$$

l'onde monochromatique caractérisée par les constantes E , α et β peut s'écrire

$$\Psi = a e^{2\pi i \nu t - \mu_x v - \mu_y y - \mu_z z}.$$

Un train d'ondes sera représenté par une expression de la forme

$$\Psi = \int \int \int a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) e^{2\pi i \nu t - \mu_x v - \mu_y y - \mu_z z} d\mu_x d\mu_y d\mu_z,$$

formule dans laquelle v est considérée comme fonction de μ_x, μ_y, μ_z , car on a

$$\hbar v = E = \frac{\hbar^2}{2m} (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2).$$

Les coefficients $a(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ sont en général complexes, car les diverses ondes monochromatiques ne sont pas en général en phase les unes avec les autres.

En étudiant la façon dont les ondes monochromatiques en se superposant donne naissance au train d'ondes limité, on parvient par des raisonnements, que je dois passer sous silence, à la conclusion suivante :

Si Δx , Δy et Δz désignent les dimensions (en général finies) du

train d'ondes, les ondes qui constituent le train d'ondes occupent nécessairement un domaine spectral défini par des intervalles $\Delta\mu_x$, $\Delta\mu_y$ et $\Delta\mu_z$ tels que

$$\Delta x \Delta \mu_x \geq \gamma_0, \quad \Delta y \Delta \mu_y \geq \gamma_0, \quad \Delta z \Delta \mu_z \geq \gamma_0,$$

γ_0 étant un nombre de l'ordre de l'unité. Puisque $\mu_x = \frac{p_x}{\hbar}$, etc., on a

$$\Delta x \Delta p_x \geq \gamma_0 \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \gamma_0 \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \gamma_0 \hbar.$$

Ce sont les relations d'incertitude d'Heisenberg. Elles expriment l'impossibilité où nous sommes d'attribuer à la fois au corpuscule une position et une vitesse bien déterminée.

Au lieu de pouvoir nous représenter comme autrefois le corpuscule comme un point bien localisé décrivant une trajectoire linéaire, nous n'avons plus à notre disposition pour décrire le corpuscule qu'une fonction complexe différente de zéro dans une région finie de l'espace. De cette fonction, nous déduisons des quantités réelles ψ et $a(Ez\beta) \cdot \bar{a}(Ex\beta)$ qui représentent certaines probabilités sans nous permettre jamais d'attribuer à la fois au corpuscule une vitesse et une position bien définies. Chaque fois qu'une observation nous apporte à l'instant t_0 un renseignement sur la position ou le mouvement du corpuscule, les probabilités se trouvent brusquement modifiées, et, par suite, nous devons adopter une forme nouvelle pour l'onde Ψ correspondant au nouvel état de probabilité après l'observation. De cette forme nouvelle des Ψ prise comme donnée initiale, l'équation de propagation permet de déduire les valeurs ultérieures de ψ et de dire quel sera à un instant t postérieur à t_0 la probabilité pour qu'une observation permette d'assigner telle ou telle valeur à la position ou à l'état de mouvement. Cette conception toute nouvelle de prévisions que peut faire la physique est en opposition avec le postulat du déterminisme. L'état initial de position et de vitesse ne pouvant jamais être regardé comme connu exactement, il n'est plus possible de déterminer rigoureusement le mouvement. La seule chose qui soit maintenant rigoureusement déterminée par l'équation de propagation des ondes Ψ , c'est l'évolution de la probabilité à partir d'un état initial donné.

Pour que ce nouvel édifice théorique puisse tenir, il est néces-

saire qu'une observation ne puisse jamais nous fournir sur un corpuscule des renseignements en opposition avec les relations d'incertitude. En d'autres termes, une mesure de la position doit introduire une incertitude sur la valeur de la quantité de mouvements après la mesure d'autant plus grande que la mesure est plus précise, et inversement, une mesure de la quantité de mouvements doit toujours introduire une incertitude sur la position après la mesure d'autant plus grande que la mesure est plus précise. Heisenberg et Bohr ont montré par des exemples qu'il devait en être toujours ainsi.

Nous n'avons énoncé le principe de décomposition spectrale que pour le cas du champ nul. Les résultats énoncés sont cependant encore valables si le champ est constant dans le temps et varie peu dans l'espace à l'échelle de la longueur d'onde. Mais pour obtenir des énoncés applicables dans tous les cas, il est nécessaire de développer une théorie plus abstraite et plus générale qui permet de trouver par exemple la probabilité d'une grandeur mécanique quelconque quand on connaît la fonction Ψ . Nous n'y insisterons pas ici.

Il est essentiel de comprendre pourquoi les corpuscules quand ils exécutent des mouvements à notre échelle paraissent obéir aux lois de la Mécanique classique. Les corpuscules matériels que nous connaissons ont toujours des longueurs d'ondes extrêmement petites : le plus léger, l'électron, dans toutes les expériences usuelles a une longueur d'onde de l'ordre de 10^{-8} cm; pour les autres corpuscules plus lourds, les longueurs d'ondes sont plus courtes encore. De là résultent deux conséquences importantes : d'abord dans les phénomènes mécaniques à notre échelle, les champs sont sensiblement constants à l'échelle de la longueur d'onde, ensuite on peut concevoir une région de l'espace contenant un grand nombre de longueurs d'ondes et dont les dimensions sont inférieures à ce que nous pouvons directement mesurer. Une observation précise peut donc nous permettre, sans être en contradiction avec les relations d'incertitude, de représenter l'état d'un corpuscule par un train d'ondes presque monochromatiques de dimensions négligeables à notre échelle et comprenant pourtant un grand nombre de longueurs d'ondes. Nous pouvons donc dire qu'il est possible d'attribuer un mouvement bien défini au corpus-

cule et de bien le localiser à *notre échelle*. Le fluide de probabilité dont nous avons parlé précédemment forme, dans ce cas, une sorte de petit globule de dimensions négligeables à l'intérieur duquel la force — grad V peut être regardée comme constante. Il résulte alors du théorème d'Ehrenfest, puisque le globule se confond sensiblement avec son centre de gravité, que ce globule se meut comme un point matériel obéissant aux lois de l'ancienne Mécanique. Or, le corpuscule ne peut manifester sa présence qu'en un des points intérieurs au globule, et comme ces points sont pratiquement indiscernables, tout se passe comme si le corpuscule obéissait aux lois de l'ancienne Mécanique. Mais en réalité, la position du corpuscule suffisamment bien définie à l'échelle macroscopique reste incertaine à l'échelle de la longueur d'onde, et c'est pourquoi quand on cherche à construire des théories microscopiques en attribuant, comme le faisait la vieille théorie de Bohr, une position et un mouvement bien défini aux corpuscules à l'échelle atomique, on se heurte à des difficultés. Suivant Bohr, on doit dire : « La localisation des corpuscules dans l'espace temps et leur spécification énergétique par l'énergie et la quantité de mouvements sont deux faces complémentaires de la réalité, et l'on ne peut jamais les connaître simultanément. A l'échelle macroscopique seulement, à cause de l'imprécision de nos moyens de mesure, on peut avoir l'*illusion* qu'il est possible de définir à la fois la position et le mouvement d'un corpuscule et de faire une description déterministe complète du phénomène dynamique. »

Au début du développement de la Science moderne, Descartes disait qu'il fallait s'efforcer d'expliquer les phénomènes naturels « par figures et par mouvements ». Les relations d'incertitude d'Heisenberg expriment précisément qu'une telle description est impossible puisqu'on ne peut jamais dans un phénomène dynamique connaître à la fois avec exactitude « la figure et le mouvement ».