BULLETIN DE LA S. M. F.

G. BOULIGAND

Sur les trajectoires orthogonales d'une famille de droites

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 204-209
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__204_0>

SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE DE DROITES;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Dans un article ayant pour objet l'examen de quelques tendances contemporaines, en matière géométrique ([1]), j'ai donné quelques brèves indications relatives au problème suivant :

On considère, dans le plan euclidien, une famille de droites à un paramètre, ou plus précisément un ensemble de droites tel que les deux coordonnées α, β fixant l'une d'elles soient des fonctions continues

$$\alpha = f(t), \quad \beta = g(t), \tag{1}$$

donnant dans le plan (α, β) la représentation d'un arc simple de Jordan. On se propose de rechercher s'il existe, pour un tel système de droites, des trajectoires orthogonales.

Depuis la publication du travail d'ensemble auquel je viens de faire allusion, j'ai reconnu la nécessité de préciser mes démonstrations, et même de modifier, sur un point, mes conclusions. Je vais donc reprendre entièrement la question, en conservant, pour plus de commodité, mes notations antérieures.

2. Rapportons le plan à deux axes rectangulaires Ox, Oy et considérons les droites

$$y = \alpha x - \beta, \tag{2}$$

où α et β sont des fonctions de t, définies par les équations (1) et soumises aux hypothèses précédentes. Nous cherchons si une telle famille de droites peut être identique au système des normales à une certaine courbe, douée d'une tangente continue et orientée ([2]).

([1]) *Sobra una Conception de la Geometria* (*Revista Matemática Hispano-Americana*; n^{os} 4 et 5 de 1928).

([2]) Une telle courbe peut se découper en un nombre fini d'arcs, représentables, relativement à des axes convenables, sous la forme $y = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ a une dérivée $\varphi'(x)$ continue. Cette remarque justifie la forme (2) adoptée pour représenter une droite de la famille considérée.

S'il existe une telle courbe, on pourra l'obtenir en intégrant le système

$$(3) \qquad -\frac{1}{y'} = f(t), \qquad -\frac{x}{y'} - y = g(t).$$

Pour étudier la possibilité d'intégration, il est naturellement permis d'opérer sur un arc de diamètre arbitrairement petit prélevé, dans le plan (α, β) sur l'arc total défini par les équations (1), pourvu qu'on synthétise ensuite les résultats (de même forme), relatifs à un système fini d'arcs divisionnaires recouvrant l'arc total [1]. Cette remarque permet de raisonner le long d'un arc en aucun point duquel α ne s'annule, c'est-à-dire sur un continuum de droites qui ne contient aucune parallèle à Ox. Moyennant quoi, on peut substituer au système (3) le suivant :

$$(4) \qquad y' = F(t), \qquad x + yF(t) = G(t),$$

en posant

$$F(t) = -\frac{1}{f(t)}, \qquad G(t) = \frac{g(t)}{f(t)}.$$

Lorsque le point $[f(t), g(t)]$ décrit un arc simple, il en est alors de même du point $[F(t), G(t)]$.

3. Nous sommes donc ramenés à étudier la possibilité d'intégration du système (4), c'est-à-dire à chercher s'il existe deux fonctions $x(t)$, $y(t)$, dont les accroissements provenant d'un accroissement Δt de la variable t satisfassent aux conditions suivantes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x + y\Delta F + F(t+\Delta t)\Delta y = \Delta G, \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = F(t). \end{array} \right.$$

Ces deux conditions entraînent la suivante :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[1 + F^2(t) + y\frac{\Delta F}{\Delta x} - \frac{\Delta G}{\Delta x} \right] = 0,$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[1 + F^2(t) + \left(y\frac{\Delta F}{\Delta y} - \frac{\Delta G}{\Delta y} \right) F(t) \right] = 0;$$

nous sommes ramenés, d'après cette dernière condition, à

---

[1] Voir note [2], page 204.

choisir $y(t)$ de manière que l'expression

$$y\frac{\Delta F}{\Delta y} - \frac{\Delta G}{\Delta y}$$

tende vers une limite, ayant pour valeur

$$-\frac{1+F^2(t)}{F(t)}.$$

Dans le champ des bonnes fonctions, un tel problème se ramènerait immédiatement à l'intégration d'une équation linéaire du premier ordre. Cette analogie nous suggère de faire appel à la fonction inconnue

$$z(t) = y(t)\sqrt{1+F^2(t)}; \tag{6}$$

transformons d'après cela notre condition

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[y\frac{\Delta F}{\Delta y} - \frac{\Delta G}{\Delta y}\right] = -\frac{1+F^2(t)}{F(t)}. \tag{7}$$

En multipliant d'abord les deux membres de (7) par $F(1+F^2)^{-\frac{1}{2}}$, cette relation devient

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{y\dfrac{F\Delta F}{\sqrt{1+F^2}} + \sqrt{1+F^2}\,\Delta y - \dfrac{F\Delta G}{\sqrt{1+F^2}}}{\Delta y} = 0. \tag{8}$$

Nous tirons d'ailleurs de (6)

$$\Delta z = \Delta y\sqrt{1+F^2} + (y+\Delta y)\Delta(\sqrt{1+F^2}),$$

ce qui permet, en résolvant par rapport au premier terme du second membre, et portant dans (8), de mettre cette condition sous la forme équivalente (après suppression du terme évanescent $-\Delta\sqrt{1+F^2}$)

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{y\left(\dfrac{F\Delta F}{\sqrt{1+F^2}} - \Delta\sqrt{1+F^2}\right) + \Delta z - \dfrac{F\Delta G}{\sqrt{1+F^2}}}{\Delta y} = 0. \tag{9}$$

J'insiste ici sur le point suivant : vu que l'on ne peut affirmer que le rapport

$$\frac{\Delta F}{\Delta y}$$

demeure borné, on n'a pas le droit de supprimer (comme l'impliquait mon texte antérieur) la parenthèse au numérateur. L'énoncé, suivant lequel il suffirait d'exprimer l'existence d'une fonction z ayant, par rapport à G, une dérivée égale à $\frac{F}{\sqrt{1+F^2}}$, est donc défectueux.

Le changement de variable introduit par analogie avec la théorie de l'équation linéaire usuelle du premier ordre ne produisant aucune simplification immédiate, on peut s'en tenir à la forme (7) de la condition imposée à la fonction $y(t)$. A ma connaissance, la détermination d'une fonction par une condition de cette forme est un problème d'Analyse qui n'a guère été abordé.

4. Je vais établir maintenant (et ce résultat négatif sera la seule conclusion subsistante) que ce problème n'admet de solution que pour des conditions supplémentaires, de forme convenable, imposées aux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, ou si l'on préfère, aux fonctions $F(t)$ et $G(t)$. Cela découle directement du théorème suivant :

Théorème. — *S'il existe une fonction $y(x)$ satisfaisant au système*

$$\frac{dy}{dx} = F(t),$$
$$x + yF(t) = G(t),$$

la courbe décrite par le point $F(t)$, $G(t)$ *est de mesure superficielle nulle.*

En effet, la dernière de ces deux équations est la normale à la courbe $y = y(x)$. $F(t)$ et $G(t)$ sont en somme deux coordonnées fixant cette normale, en fonction du paramètre t, dont la succession des valeurs définit l'ordre, sur l'arc simple considéré du plan (F, G). Mais, on pourrait pareillement fixer cet ordre au moyen de l'abscisse x du point d'incidence, laquelle est donc une fonction monotone de t.

Une autre représentation paramétrique de la courbe

$$X = F(t), \quad Y = G(t)$$

nous sera donnée par les équations

$$X = y'(x), \quad Y = x + y(x)y'(x).$$

Modifiant seulement les notations, nous allons prouver que la courbe

$$(\Gamma) \qquad x = \varphi'(u), \qquad y = u + \varphi(u)\varphi'(u) \qquad [\varphi'(u) \text{ continue}]$$

est de mesure superficielle nulle. En effet, considérons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Ou. La courbe (Γ) est tracée sur la surface

$$(\Sigma) \qquad y = u + x\varphi(u).$$

Cette surface est le lieu d'une parallèle Δ au plan xOy qui s'appuie sur la bissectrice $y = u$ de l'angle $\widehat{Oy, Ou}$. Chaque parallèle à l'axe des y coupe cette surface en un seul point : il y a donc correspondance biunivoque entre un point (x, y, u) de cette surface et sa projection orthogonale $(x, 0, u)$ sur le plan xOu. D'ailleurs, en raison de la continuité de $\varphi'(u)$, les dérivées partielles

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(u), \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 1 + x\varphi'(u)$$

sont bornées dans toute région bornée du plan xOu. Il en sera donc de même de la fonction

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2},$$

par laquelle il faut multiplier l'aire d'un domaine infiniment petit du plan xOu pour en déduire un infiniment petit équivalent à l'aire du domaine correspondant sur Σ. Or, la courbe

$$(\gamma) \qquad x = \varphi'(u)$$

du plan xOu est de mesure superficielle nulle. Il en est donc de même de la courbe (Γ) de la surface Σ.

Étudions maintenant la correspondance entre les points de la surface Σ voisins de la courbe Γ et les points du plan xOy. Il suffit à cet effet de chercher une fonction u de x, y satisfaisant à l'équation de (Σ) et se réduisant, sur la courbe Γ, aux cotes des points de cette courbe. Or la dérivée partielle par rapport à u est

$$1 + x\varphi'(u).$$

Elle se réduit sur la courbe Γ à $1 + x^2$. Donc, dans un domaine de Σ autour de Γ, cette dérivée partielle n'est pas nulle. Il s'ensuit que la nouvelle correspondance considérée est biunivoque aux environs de Γ : à une aire de la surface Σ, correspondra d'ailleurs une aire plus petite du plan $x\mathrm{O}y$. Finalement, en passant par l'intermédiaire de la surface Σ, nous définissons une correspondance point par point entre les plans $x\mathrm{O}y$ et $x\mathrm{O}u$, correspondance qui est biunivoque le long de la courbe γ (¹) et dans laquelle le rapport d'une aire du plan $x\mathrm{O}u$ à l'aire du plan $x\mathrm{O}y$ dont elle provient demeure borné. La proposition énoncée est donc établie.

Ainsi que je l'avais indiqué dans mon article précédemment cité, on peut faire intervenir la podaire de la famille de droites. Cette podaire est définie par les équations

$$\xi = \frac{\mathrm{G}(t)}{1+\mathrm{F}^2(t)}, \qquad \eta = \frac{\mathrm{F}(t)\mathrm{G}(t)}{1+\mathrm{F}^2(t)},$$

elle se déduit de la courbe lieu du point $\mathrm{F}(t)$, $\mathrm{G}(t)$ par une transformation rationnelle, dans laquelle un ensemble de mesure superficielle nulle en engendre un autre qui est aussi de mesure superficielle nulle.

En résumé, *une famille de droites à un paramètre dans le plan ne peut être, en général, identifiée avec le système des normales à une courbe* $y = \varphi(x)$ *de ce plan*. Une condition nécessaire est que la podaire d'une telle famille soit de mesure superficielle nulle. Le fait de savoir si cette condition est suffisante reste à résoudre. Quoi qu'il en soit, les considérations rencontrées dans cet article peuvent être considérées comme le prototype de questions qui se posent très fréquemment, à partir du moment où l'on veut reprendre des problèmes classiques de géométrie infinitésimale en se débarrassant de toute hypothèse de commodité.

(¹) Ce point du raisonnement est essentiel. On ne pourrait le supprimer, en se bornant par exemple à remarquer qu'une aire de la surface Σ se projette suivant une aire plus petite du plan $x\mathrm{O}y$. Il importe en effet de bien montrer que Γ ne passe par aucun point du contour apparent de Σ, associé à la direction $\mathrm{O}u$; si cette éventualité se présentait, à un domaine enfermant Γ sur Σ, ne correspondrait plus un *domaine* enfermant la projection de Γ sur le plan $x\mathrm{O}y$. S'il est vrai que ce dernier ensemble a (en même temps que le domaine dont il dérive par projection) une aire infiniment petite, ses propriétés topologiques ne lui donnent plus qualité pour arbitrer quant à l'annulation de la mesure superficielle.