BULLETIN DE LA S. M. F.

J. WOLFF

Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 195-203
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__195_0>

SUR L'ITÉRATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS UN DEMI-PLAN ;

PAR M. JULIUS WOLFF
(Utrecht).

On sait que, si $f(z)$ est holomorphe dans un cercle C et telle que toutes ses valeurs sont dans C, les itérés $z_1 = f(z)$, $z_2 = f(z_1)$, etc. tendent vers une limite β, qui ne dépend pas du point initial z(¹). Le but du présent article est l'étude des directions dans lesquelles z_n peut s'approcher de β, dans le cas que β est sur la circonférence C. Sans nuire à la généralité nous supposerons que C est le demi-plan $x > 0$ et β le point à l'infini. Alors on a $x_1 > x$, sauf pour les fonctions $f(z) = z + bi$.

1. Soit $f(z) = f(x + yi) = x_1 + y_1 i$ holomorphe dans le demi-plan $D(x > 0)$ et soit $x_1 > x$ pour chaque point z de D. Écrivons

$$f(x_1 + y_1 i) = f_2(z) = x_2 + y_2 i, \qquad \text{etc.}$$

La suite $x_1, x_2, \ldots$ étant croissante, si elle converge pour *un* point z de D, elle converge dans D.

Premier cas : la suite x_n converge. — La convergence est uniforme dans toute partie bornée et fermée de D, et la fonction limite $a(z)$ est harmonique dans D. En notant $\frac{\partial}{\partial \nu}$ la différentiation suivant la normale du chemin d'intégration, dans un sens convenable, on a

$$y_{n+1} - y_n = \int_z^{z_1} \frac{\partial x_n}{\partial \nu} ds \rightarrow (\text{pour } n \text{ infini}) \int_z^{z_1} \frac{\partial a}{\partial \nu} ds = b(z),$$

la convergence étant uniforme dans toute partie bornée et fermée de D.

(¹) *Comptes rendus*, t. 182, 1926, p. 42-43, 200-201, 255-257 et 918-920 ; t. 183, 1926, p. 500-502.

De plus on a

$$x_{n+1} - x_n \to 0,$$

donc

$$z_{n+1} - z_n \to ib(z).$$

La fonction $ib(z)$ est holomorphe dans D, sa partie réelle est identiquement nulle, donc $b(z)$ est une constante b.

Nous trouvons ainsi que $z_{n+1} - z_n$ tend pour n infini vers une constante imaginaire ib. D'autre part, z_n tend vers l'infini, car $x_{n+1} > x_n$.

Pour préciser la conduite de z_n pour les grandes valeurs de n, nous allons démontrer que b n'est pas nulle. Soit $a'(z)$ une fonction conjuguée de la fonction harmonique $a(z)$, de sorte que

$$a(z) + ia'(z) = \mathrm{A}(z)$$

est holomorphe dans D. Il est évident que

$$a(z_1) = a(z).$$

D'autre part,

$$a'(z_1) - a'(z) = \int_z^{z_1} \frac{\partial a}{\partial v}\, ds = \lim_{n \to \infty} \int_z^{z_1} \frac{\partial x_n}{\partial v}\, ds = \lim_{n \to \infty} (y_{n+1} - y_n) = b.$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{A}(z_1) = \mathrm{A}(z) + bi.$$

La fonction $\mathrm{A}(z)$, holomorphe dans D et dont toutes les valeurs sont aussi dans D, satisfait à l'équation Schröderienne

$$\mathrm{A}\{f(z)\} \equiv \mathrm{A}(z) + bi.$$

Supposons $b = 0$.

Posons :

$$\text{maximum de } a(z) \text{ sur le segment } z_n z_{n+1} = \mathrm{M}_n.$$

Alors

$$\mathrm{M}_n \leqq a(z_n) + |z_{n+1} - z_n| . (\text{max. de } |\mathrm{A}'(z)| \text{ sur } z_n z_{n+1}).$$

Mais nous savons que

$$|\mathrm{A}'(z)| \leqq \frac{a(z)}{x} \qquad (^1),$$

donc

$$\mathrm{M}_n < a(z) + |z_{n+1} - z_n| \frac{\mathrm{M}_n}{x_n}.$$

(1) *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 500-502.

Par conséquent, à partir d'une certaine valeur de n,

$$M_n < \frac{a(z)}{1 - \frac{|z_{n+1} - z_n|}{x_n}},$$

car $|z_{n+1} - z_n|$ tendant vers zéro et x_n vers $a(z)$, le quotient tend vers zéro. Nous concluons que $a(z)$ est bornée sur l'ensemble des segments $z_n z_{n+1}$. Or

$$\begin{aligned} z_{n+2} - z_{n+1} = f(z_{n+1}) - f(z_n) &= \int_{z_n}^{z_{n+1}} f'(z)\,dz = \\ &= \int_{z_n}^{z_{n+1}} A'(z)\,dz - \int_{z_n}^{z_{n+1}} \{A'(z) - f'(z)\}\,dz = \\ &= -\int_{z_n}^{z_{n+1}} \{A'(z) - f'(z)\}\,dz, \end{aligned}$$

car $A(z_{n+1}) = A(z_n)$.

La partie réelle de la fonction $A(z) - f(z)$, holomorphe dans D, étant positive, nous savons que

$$|A'(z) - f'(z)| \leqq \frac{a(z) - x_1}{x} < \frac{a(z) - x}{x},$$

donc

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| < |z_{n+1} - z_n| . \left(\text{max. de } \frac{a(z) - x}{x} \text{ sur le segment } z_n z_{n+1}\right).$$

Mais sur le segment $z_n z_{n+1}$ on a

$$\begin{aligned} a(z) - x < a(z) - x_n &\leqq a(z_n) - x_n + |z_{n+1} - z_n| . (\text{max. de } |A'(z)|) \\ &\leqq a(z_n) - x_n + |z_{n+1} - z_n| . \left(\text{max. de } \frac{a(z)}{x}\right) \\ &< a(z_n) - x_n + \frac{M_n . |z_{n+1} - z_n|}{x_n} \to 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_{n+1} - z_n}$ tendrait vers zéro, d'où résulterait que z_n tend vers une limite finie.

Cette contradiction montre bien que $b \neq 0$.

Nous connaissons maintenant assez précisément la conduite de z_n pour n grand, dans le cas de convergence de la suite x_n : pour tous les points initiaux z l'incrément $z_{n+1} - z_n$ tend vers la même limite imaginaire ib différente de zéro.

2. Donnons un exemple d'une fonction se trouvant dans le premier cas. Posons

$$z_1 = z + \frac{1}{z} + i.$$

On a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{x_n^2 + y_n^2},$$

$$y_{n+1} - y_n = 1 - \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2},$$

$$z_n \to \infty, \qquad \text{donc} \qquad z_{n+1} - z_n = \frac{1}{z_n} + i \to i,$$

$$y_{n+1} - y_n \to 1,$$

$$y_n \sim n,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{y_n^2} \text{ converge},$$

$$x_{n+1} < x_n + \frac{x_n}{y_n^2} = x_n\left(1 + \frac{1}{y_n^2}\right).$$

Le produit infini $\prod_1^{\infty}\left(1 + \frac{1}{y_n^2}\right)$ étant convergent x_n tend vers une limite finie. Dans cet exemple la constante b est égale à l'unité.

3. *Deuxième cas : la suite x_n diverge.* — On sait que dans chaque angle

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$

la fonction $z^{-1}f(z)$ tend pour $|z|$ infini vers une limite λ réelle, finie et au moins égale à UN [1]. Posons

$$z = re^{\varphi i}, \qquad z_n = r_n e^{\varphi_n i},$$

φ et φ_n entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

THÉORÈME. — *Si $\lambda > 1$ et si pour* UN *point z_0 de* D *la suite des nombres* $|\operatorname{tang} \varphi_n|$ *est bornée, alors pour chaque point z de* D *φ_n tend vers une limite.*

Remarquons d'abord que pour tout point z de D la suite

(1) *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 500-502.

$|\operatorname{tang} \varphi_n|$ est bornée. Car dans le cas contraire il existerait un point α de D et une suite partielle $p \to \infty$, telle que, par exemple, $\varphi_p(\alpha) \to \frac{\pi}{2}$. De cette suite (p) on pourrait extraire une suite (q), telle que la suite des fonctions

$$e^{\varphi_q(z) - i \log r_q(z)}$$

convergerait dans D vers une fonction holomorphe. $\varphi_q(z)$ tendrait vers une fonction harmonique dans D, ayant forcément son maximum au point α, elle serait partout égale à $\frac{\pi}{2}$, contrairement à l'hypothèse que $|\operatorname{tang} \varphi_n(z_0)|$ est bornée.

On sait que

$$\delta_n = \frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}$$

ne croît jamais avec n (1). Elle tend donc vers une limite < 1. Donc

$$\frac{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{x_n x_{n+1}} \to \mu \geqq 4,$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \lambda,$$

donc

$$\frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{x_n^2} \to (\mu - \lambda - \lambda^{-1} - 2)\lambda.$$

Mais

$$y_{n+1} = \lambda y_n + o(x_n),$$

par conséquent, $\frac{(\lambda - 1)^2 y_n^2}{x_n^2}$ tend vers une limite, et parce que $\lambda > 1$:

$$\frac{y_n^2}{x_n^2} \to k^2 = \frac{\lambda\mu - (\lambda + 1)^2}{(\lambda - 1)^2}.$$

Pour $k = 0$, on a $\varphi_n \to 0$.

Pour $k \neq 0$, nous pouvons écrire

$$y_{n+1} = \lambda y_n + o(y_n),$$

d'où la conclusion que $|y_n|$ finit par croître.

Donc φ_n a une limite, dépendant en général du point initial z.

---

(1) *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 500-502.

4. Supposons maintenant que $\lambda = 1$. Alors

$$f(z) = z + \varpi(z).$$

$\varpi(z)$ est holomorphe dans D et sa partie réelle est partout positive. Même chose pour $\frac{1}{\varpi(z)}$. On sait donc que dans chaque angle.

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$

la fonction $z\varpi(z)$ tend vers une limite ρ réelle et positive, qui peut être infinie.

Théorème. — *Si* $\lambda = 1$, $\rho < \infty$ *et si pour* un *point* z_0 *de* D *la suite des nombres* $|\operatorname{tang} \varphi_n|$ *est bornée, alors pour chaque point* z *de* D φ_n *tend vers zéro.*

En effet, d'abord la suite $|\operatorname{tang} \varphi_n|$ est bornée pour chaque z de D (§ 3). On a donc

$$\varpi(z) = \frac{\rho}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Soit h un nombre positif. La formule pour $\varpi(z)$ nous apprend que si $|\varphi_n| > h$ et n assez grand, $|\varphi_{n+1}| < |\varphi_n|$. De plus elle nous apprend que $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ tend vers zéro. On en conclut que $|\varphi_n| < 2h$ pour n assez grand, et puisque h était arbitraire il est démontré que φ_n tend vers zéro.

5. Rien n'est démontré dans le cas $\lambda = 1$, $\rho = \infty$. Les exemples

$$f(z) = z + a + bi \qquad (a > 0)$$

et

$$f(z) = z + z^{-\frac{1}{2}} + i$$

montrent que φ_n peut avoir une limite : arc tang $\frac{b}{a}$ dans le premier exemple, $\frac{\pi}{2}$ dans le second.

Théorème. — *Si* $\lambda = 1$ *et si pour* un *point initial* z_0 *l'angle* $\varphi_n(z_0)$ *a une limite* γ, *si en outre pour ce point* z_0 *la série* $\sum_0^\infty \frac{1}{x_n}$ *diverge, alors pour tout autre point initial* z *l'angle* $\varphi_n(z)$ *tend vers la même limite* γ.

D'abord : si $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$, un raisonnement semblable à celui du paragraphe 3, que nous laisserons au lecteur, montre que la proposition est juste; et la divergence de $\sum_0^\infty \frac{1}{x_n}$ devient superflue.

Supposons donc $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$ Pour chaque point z de D $|\operatorname{tang} \varphi_n|$ est bornée (§ 3). Si le théorème n'était pas exact, il y aurait un point α de D, et une suite partielle $p \to \infty$, telle que

$$\varphi_p(\alpha) \to \delta \neq \gamma.$$

De cette suite (p) on pourrait extraire une suite (q), telle que la suite des fonctions

$$e^{\varphi_q(z) - i \log r_q(z)}$$

convergerait dans D vers une fonction holomorphe F(z), ayant même valeur en tous les itérés z_n de z_0, car $\frac{z_{q+k}}{z_q} \to 1$ pour k fixe. Or, la divergence de la série $\sum_0^\infty \frac{1}{x_n}$ entraîne que F(z) est une constante [1], en contradiction avec $\delta \neq \gamma$, et le théorème est démontré.

6. Nous allons maintenant montrer, par un exemple, que dans le cas $\lambda = 1$, $\rho = \infty$ l'angle φ_n peut ne pas tendre vers une limite.

Considérons la fonction

$$f(z) = z + z^i + 2e^{\frac{\pi}{2}},$$

z^i étant $e^{-\varphi}(\cos \log r + i \sin \log r)$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

On a donc

$$z_{n+1} = z_n + 2e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\varphi_n}(\cos \log r_n + i \sin \log r_n).$$

L'argument de $z_{n+1} - z_n$ est toujours entre $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$. Il en

---

[1] Théorème de Blaschke (*Leipz. Berichte*, mai 1918).

résulte que les limites possibles de φ_n sont au plus égales à $\frac{\pi}{6}$ en valeur absolue.

Soit z_0 un point initial arbitraire. Pour n assez grand on aura $r_{n+1} > r_n$ et

$$A \leqq r_{n+1} - r_n \leqq |z_{n+1} - z_n| \leqq 3e^{\frac{\pi}{2}} \qquad (A > 0 \text{ et constante}).$$

Donc

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1, \qquad \log r_{n+1} - \log r_n \to 0.$$

On en conclut que l'argument de z^i finit par varier à degrés insensibles.

Supposons maintenant

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi.$$

Alors le module de z^i tend vers $e^{-\varphi}$ et l'ensemble des limites ψ de l'argument de $z_{n+1} - z_n$ est le segment

$$-\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{2}e^{-\varphi-\frac{\pi}{2}}\right) \leqq \psi \leqq \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{2}e^{-\varphi-\frac{\pi}{2}}\right).$$

Il existe dans ce segment une valeur $\psi \neq \varphi$.

Donc pour une certaine suite d'indices $p \to \infty$ l'argument ψ_p de $z_{p+1} - z_p$ diffère de φ d'une quantité plus grande qu'un nombre 2ε, positif et fixe.

Soit p un de ces indices. Considérons les indices $p+1$, $p+2$, ..., $p+k$ tels que

$$|\psi_{p+i} - \psi_p| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Pour que cette inégalité ait lieu, il suffit que $\log r_{p+i} - \log r_p$ soit plus petit qu'un certain nombre η, *indépendant de p*.

Or

$$r_{p+i} - r_p \leqq 3e^{\frac{\pi}{2}} i,$$

$$\frac{r_{p+i}}{r_p} \leqq 1 + \frac{3e^{\frac{\pi}{2}} i}{r_p}.$$

Il en résulte que

$$k > C r_p, \qquad |z_{p+k} - z_p| > D r_p, \qquad \arg(z_{p+k} - z_p) > \varphi + \varepsilon,$$

C et D étant des constantes positives et $\arg z_p \to \varphi$. L'angle sous lequel on voit de l'origine le segment $z_p z_{p+k}$ finit donc par rester supérieur à une quantité positive et fixe, en contradiction avec la convergence supposée de φ_n.

Remarquons que $x_{n+1} - x_n$ est entre $e^{\frac{\pi}{2}}$ et $3e^{\frac{\pi}{2}}$, donc $\frac{x_n}{n}$ est entre ces deux nombres, d'où la divergence de $\sum \frac{1}{x_n}$. Cependant pour chaque point z de D φ_n n'a pas de limite.

D'autre part on démontre facilement (par exemple en raisonnant comme au paragraphe 5) que les seules hypothèses $\sum \frac{1}{x_n}$ divergente et $\lambda = 1$ ont pour conséquence que pour deux points quelconques α et β la différence $\varphi_n(\alpha) - \varphi_n(\beta)$ tend vers zéro.