

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. SOULA

Sur les points singuliers des deux fonctions $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{z^n}{a_n}$

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 36-49

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__36_0

© Bulletin de la S. M. F., 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES POINTS SINGULIERS DES DEUX FONCTIONS

$$\sum a_n z^n \quad \text{ET} \quad \sum \frac{z^n}{a_n};$$

PAR M. J. SOULA.

J'ai déjà indiqué l'intérêt que peut présenter une telle étude : elle est liée au problème posé par M. Borel à propos du théorème de la multiplication des singularités de M. Hadamard : sachant que α est point singulier de $f = \sum a_n z^n$, que β est point singulier de $\varphi = \sum b_n z^n$, $\alpha\beta$ est-il point singulier de $\mathbb{H}[f, \varphi] = \sum a_n b_n z^n$?

Le problème a reçu de M. Polya une solution remarquable dans le cas où α et β sont des points isolés ou semi-isolés ⁽¹⁾ ; il serait possible, de plus, de donner des réponses précises à la question de M. Borel si l'on connaissait les points singuliers de $f_1 = \sum \frac{z^n}{a_n}$ sans qu'il y ait à supposer que ceux de $\varphi(z)$ soient semi-isolés.

D'un autre côté, la comparaison de $f(z)$ et de $f_1(z)$ est un cas particulier des plus simples du problème qui se pose naturellement dans l'étude des séries de Taylor : trouver les points singuliers de $\Sigma G(a_n)z^n$ connaissant ceux de $f(z)$ quand $G(u)$ est une fonction analytique donnée. J'ai déjà étudié ⁽²⁾ la fonction f_1 en supposant que f n'a sur son cercle de convergence qu'un ou deux points singuliers et que ces points sont d'espèce particulière. On trouvera dans le présent Mémoire des énoncés d'un genre différent ; ils ont été obtenus par des méthodes dues à M. Carlson.

Notations. — Je considérerai deux variables imaginaires u et z et je poserai toujours

$$u = r e^{i\theta}, \quad z = \rho e^{i\omega}.$$

Le champ de la variable u sera en général une région illimitée

(1) PÖLYA, *C. R. Acad. Sc.*, 7 mars 1927.

(2) *Journal de Math. pures et appliquées*, 8^e série, t. IV, 1921, et 9^e série, t. I, 1922.

définie par des inégalités telles que

$$(\Sigma_2) \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad r \geq r_0,$$

α est un angle positif aigu, r_0 est un nombre positif. Un tel champ d'ouverture 2α sera désigné par Σ_2 :

1. *Lemme I.* — Soit la fonction $h(u)$ holomorphe et de module borné dans Σ_2 , soient r_1 , u , et u' des nombres positifs tels que

$$r_0 < r_1 < u < u',$$

la quantité

$$\frac{u}{u' - u} |h(u') - h(u)|$$

admet une borne indépendante de u et de u' .

Je pose :

$$g(z) = h\left(\frac{1}{z}\right), \quad z = \rho e^{i\omega},$$

$g(z)$ est holomorphe et de module borné dans le secteur

$$(\Sigma_2) \quad -\alpha \leq \omega \leq \alpha, \quad \rho < r_0^{-1},$$

et sur le contour (origine exceptée).

Soient x et x' les inverses de u et de u' . On a

$$0 < x' < x < r_1^{-1} < r_0^{-1}.$$

Il faut établir que $\frac{x'}{x - x'} |g(x) - g(x')|$ est borné. J'ai donné la démonstration dans un Mémoire récent (1).

Conséquence I. — La même méthode nous donnerait aisément la proposition suivante : si $h(u)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$ dans Σ_2 d'une manière uniforme, si u et u' sont réels et si $u' > u$,

$$\frac{u}{u' - u} |h(u') - h(u)|$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$.

Conséquence II. — Si $|h(u)|$ est borné dans Σ_2 , si $h(u)$ tend

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XLIV, 1927, p. 128.

vers zéro quand on donne à u une suite de valeurs réelles, positives en progression arithmétique, $h(n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ dans tout secteur Σ_x , intérieur à Σ_x .

Supposons, par exemple, que $h(n)$ tende vers zéro pour n entier positif. Soit

$$n < u < n + 1.$$

On a

$$|h(u) - h(n)| < B \frac{u - n}{u} < \frac{B}{u} \quad (B \text{ constant}):$$

$\frac{B}{u}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$; il en est de même de $h(n)$; $h(u)$ tend vers zéro sur l'axe réel. Comme cette fonction est de module borné, un théorème de M. Montel ⁽¹⁾ nous apprend que $h(u)$ tend vers zéro dans tout domaine Σ_x , intérieur à Σ_x .

2. Lemme II. — Soit une fonction $\psi(u)$ holomorphe dans un domaine Σ_x . Si la partie réelle de $\psi(u)$ reste dans ce domaine inférieure à $Mr + C$ (M et C étant des constantes positives), si $\frac{\psi(n)}{n}$ tend vers zéro pour n entier positif, $\frac{\psi(u)}{u}$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{u}$ dans tout domaine Σ_x , intérieur à Σ_x .

Traçons le cercle (R) dont le centre est le point d'affixe n , dont le rayon est $R = n \sin \alpha$ et qui est tangent aux côtés de Σ_x ; supposons n assez grand pour que ce cercle soit intérieur à Σ_x . Traçons aussi le cercle (R') concentrique au précédent et de rayon $R' = \lambda R$, λ étant un nombre fixe compris entre 0 et 1. Si A est le maximum de la partie réelle de $\psi(u)$ sur le cercle (R), on peut écrire l'inégalité suivante de M. Borel ⁽²⁾, pour u dans le cercle (R'),

$$|\psi(u)| < 2|\psi(n)| + [4A + 2|\psi(n)|] \frac{R'}{R - R'} = 4A \frac{\lambda}{1 - \lambda} + 2|\psi(n)| \frac{1}{1 - \lambda}.$$

A sera inférieur à la limite donnée où l'on aura remplacé r par s

⁽¹⁾ MONTEL, *Annales de l'École Normale*, 1916. — LINDELÖF, *Acta Societatis Scientiarum fennicae*, t. 46, 1915. J'ai donné une démonstration, *loc. cit.*, *Annales de l'École Normale*, p. 109.

⁽²⁾ Voir, par exemple, BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, note 1, p. 104.

plus grande valeur sur le cercle (R), soit $n + R = n(1 + \sin \alpha)$,

$$|\psi(u)| < n \left[4M(1 + \sin \alpha) + \frac{4C}{n} \right] + |\psi(u)| \frac{2}{1-\lambda},$$

Comme on a $u > n(1 - \lambda \sin \alpha)$, j'en déduis

$$\left| \frac{\psi(u)}{u} \right| < \frac{1}{1-\lambda \sin \alpha} \left\{ 4 \left[M(1 + \sin \alpha) + \frac{C}{n} \right] + \frac{|\psi(u)|}{n} \frac{2}{1-\lambda} \right\}.$$

$\frac{|\psi(u)|}{n}$ tend vers 0; $\left| \frac{\psi(u)}{u} \right|$ est borné pour u dans un des cercles (R'). Tous ces cercles recouvrent un domaine Σ_{α_1} dont l'ouverture $2\alpha_1$ vérifie $\sin \alpha_1 = \lambda \sin \alpha$. $\left| \frac{\psi(u)}{u} \right|$ est borné dans Σ_{α_1} ; un corollaire du lemme I montre que cette fonction tend uniformément vers zéro dans tout domaine Σ_{β} intérieur à Σ_{α_1} . Or α_1 est arbitrairement voisin de α puisque λ est arbitrairement voisin de 1.

3. *Lemme III.* — Soit une fonction analytique holomorphe dans le domaine Σ_x et vérifiant, dans cette région, l'inégalité

$$|G(u)| < e^{i\Omega|\sin \theta| + \varepsilon} r,$$

où ε est positif et arbitrairement petit, où M et Ω sont des constantes positives; Ω , inférieur à π , est indépendant de ε .

Si $G(u)$ est nul pour toute valeur entière positive de u à partir de r_0 , on peut affirmer que dans un certain domaine Σ_{α_1} intérieur à Σ_x , G vérifie

$$|G(u)| < e^{-au} \quad (a > 0).$$

Ce lemme a été utilisé par M. Carlson; j'en ai donné une généralisation. Dans certains énoncés, on a supprimé le terme en ε ; il est bien facile de voir que si le théorème est vrai quand on suppose seulement que $|G(u)e^{-\Omega|\sin \theta|} r|$ est borné, il est encore vrai dans le cas actuel.

4. *Lemme IV.* — Pour que la série $\Sigma a_n z^n$ dont le cercle de convergence est 1 représente une fonction holomorphe sur l'arc AB du cercle de convergence défini par

$$(AB) \quad \Omega \leq |\omega| \leq \pi,$$

il faut et il suffit qu'il existe une fonction $G(u)$ holomorphe dans

un domaine Σ_x telle que $G(n) = a_n$ et vérifiant l'inégalité

$$|G(u)| < M e^{|\Omega| |\sin \theta| + \varepsilon |r|}.$$

Des énoncés analogues ont été souvent donnés ; je ne puis que renvoyer aux travaux de M. Carlson.

Si les a_n sont réels, la fonction G peut être choisie réelle pour u réel. Cette fonction est, en effet, donné par M. Carlson sous forme d'intégrale

$$G(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z} e^{-u \log z} dz,$$

où l'on doit poser $\log z = \log \rho + i\omega$, ω variant de $-\pi$ à π . Le contour C , qui entoure l'origine, peut être pris symétrique par rapport à l'axe réel ; un rayon issu de l'origine ne le coupe qu'en un point. On a donc, pour u réel,

$$G(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [A(\omega) + iB(\omega)][C(\omega) + i] d\omega,$$

A , B , C étant des fonctions réelles ; A est une fonction paire ; B et C sont impaires. On déduira aisément de là que $G(u)$ est réel.

§. Nous abordons maintenant l'étude des deux fonctions définies par

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n, \quad f_1(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{a_n},$$

en supposant que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite ; on peut admettre sans inconvénient que cette limite est 1. Nous admettons qu'aucun des a_n n'est nul et nous les supposons tous réels, pour commencer.

Supposons que la fonction $f(z)$ soit holomorphe au point -1 du cercle de convergence et aussi sur l'arc

$$(AB) \quad \Omega \leq |\omega| \leq \pi, \quad \rho = 1.$$

Supposons que $f_1(z)$ n'ait pas son cercle de convergence comme coupure et qu'elle soit holomorphe sur l'arc qui a pour milieu le point $-e^{i\beta}$ et qui a pour longueur $2(\pi - \Omega_1)$. La fonction

$$f_2(z) = \sum \frac{e^{in\beta}}{a_n} z^n$$

est holomorphe au point pour lequel $ze^{i\beta} = -e^{i\beta}$, donc pour $z = -1$. Elle est aussi holomorphe sur l'arc

$$(A_1 B_1) \quad \Omega_1 \leq |\omega| \leq \pi, \quad \rho = 1.$$

Considérons les fonctions $G(u)$ et $G_2(u)$ définies au lemme IV et telles que

$$G(n) = \alpha_n, \quad G_2(n) = \frac{e^{in\beta}}{\alpha_n}.$$

Dans un certain domaine Σ_α , on a

$$|G(u) G_2(u)| < M e^{(\Omega + \Omega_1) |\sin \theta| r + \varepsilon r},$$

M est une constante, ε est arbitrairement petit. Je pose

$$H(u) = G(u) G_2(u) - e^{i\beta u}.$$

J'ai

$$|H(u)| < M e^{(\Omega + \Omega_1) |\sin \theta| r + \varepsilon r} + e^{r |\sin \theta|}.$$

Or, $|\beta|$ peut être supposé inférieur à π ; si $\Omega + \Omega_1$ est aussi inférieur à π , la fonction H , qui est nulle pour u entier, tombe sous le coup du lemme III et l'on a

$$|H(u)| < e^{-ar} \quad (a > 0),$$

dans un domaine Σ_{α_1} . Écrivons

$$(1) \quad G G_2 e^{-i\beta u} = 1 + H e^{-i\beta u}.$$

Dans Σ_{α_1} on a

$$|H(u) e^{-i\beta u}| < e^{-(a - |\beta|) |\sin \theta| r}.$$

Cette quantité tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ si $|\sin \theta| < \frac{a}{|\beta|}$; le premier membre de (1) tend donc vers 1 dans certain domaine Σ_{α_1} intérieur à Σ_{α_1} . Il est donc certain que G et G_2 n'ont pas de racine quand u est intérieur à Σ_{α_1} .

Ce résultat nous permet de définir une fonction $\psi(u)$ par l'égalité

$$\psi(u) = \log G(u).$$

Une détermination du logarithme étant choisie pour une valeur de u , ψ se laisse définir dans Σ_{α_1} par prolongement analytique; un raisonnement connu montre que ψ est holomorphe dans le domaine simplement connexe Σ_{α_1} . Pour u réel, la fonction G est réelle;

comme elle n'a pas de racines, on peut la supposer positive ; on pourra donc choisir ψ réel. On a

$$|G(u)| < e^{kr} \quad \text{dans } \Sigma_{\alpha_1},$$

et la partie réelle de ψ est inférieure à Kr . Enfin $\frac{\psi(n)}{n} = \frac{1 \cdot a_n}{n}$ et ce nombre réel tend vers zéro. On peut donc appliquer le lemme II : $\frac{\psi(u)}{u}$ tend uniformément vers zéro dans un domaine Σ_{α_1} . Il en est de même de la partie réelle de $\frac{\psi(u)}{r}$. On a donc, dans Σ_{α_1} et pour r assez grand,

$$e^{-\varepsilon r} < G(u) < e^{\varepsilon r}.$$

Le lemme IV montre que, dans ces conditions, $f(z)$ ne possède que le point singulier 1 sur son cercle de convergence.

Passons à $f_1(z)$. Comme le deuxième membre de l'équation (1) est voisin de 1, on en déduit

$$|G_2 e^{-i\beta u}| < \frac{K}{G} \quad (K \text{ constant}).$$

L'inégalité obtenue pour G donne

$$|G_2 e^{-i\beta u}| < K e^{\varepsilon r}.$$

Or, la fonction $G(n) e^{-i\beta n}$ prend la valeur $\frac{1}{a_n}$ pour n entier ; il en résulte que $f_1(z)$ n'a que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1, elle aussi.

THÉORÈME I. — *Si les a_n sont réels, si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1, si les fonctions $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma \frac{z^n}{a_n}$ sont holomorphes sur des arcs du cercle de convergence de longueurs respectives α et α_1 , si l'un de ces arcs a pour milieu le point -1 , si enfin $\alpha + \alpha_1$ est supérieur à 2π , on peut affirmer que les deux fonctions n'ont l'une et l'autre que le point singulier 1 sur le cercle de convergence.*

6. Supposons que l'on sache *a priori* que f n'a que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, on peut supposer α arbitrai-

rement voisin de 2π ; si f_1 est holomorphe sur un arc quelconque α , du cercle, elle n'a que le point singulier 1.

THÉOREME II. — Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1, si les a_n sont réels, si f n'a que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, de deux choses l'une : ou f_1 n'a sur le cercle de rayon 1 que le point singulier 1, ou elle admet ce cercle comme coupure.

Gardant les mêmes hypothèses, je vais indiquer quelques propriétés de f et de f_1 quand elles n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1.

Il existe une fonction $G(u)$ telle que $G(n) = a_n$ et telle que $|G(u)e^{\varepsilon u}|$ soit borné dans un domaine Σ_{α_3} . De la démonstration du lemme IV, telle que je l'ai présentée (1), résulte que $f(z)$ est holomorphe au voisinage du point singulier 1, dans la région intérieure à un angle supérieur à π et qui a la droite qui joint l'origine au point 1 pour bissectrice. J'exprimerai cette propriété en disant que le point 1 est un point singulier « sans contact ».

THÉOREME II'. — Si $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont que le point singulier 1 sur leur cercle de convergence de rayon 1, ce point est singulier sans contact.

Les coefficients a_n ont tous même signe dès que n est assez grand; je puis donc les supposer positifs. Cela nous permet d'affirmer que l'on n'est pas dans le cas actuel lorsqu'on étudie des exemples simples tels que $\Sigma \sin \log n z^n$ ou $\Sigma \sin \sqrt{n} z^n$.

Je remarquerai encore que la fonction $\Sigma \sqrt[n]{a_n} z^n$ n'a que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1; $\sqrt[n]{G(u)}$ est, en effet, holomorphe dans Σ_{α_3} et de l'ordre de $e^{\varepsilon u}$.

Pour avoir une autre propriété, je reprends la fonction $\psi(u)$ du n° 5 et j'applique le lemme I à $\frac{\psi(u)}{u}$ pour $u' = n+1$ et $u = n$ (n entier). $\frac{\psi(u)}{u}$ tend vers zéro dans un domaine Σ_{α_3} ; j'en ai déduit que

$$n \left| \frac{\psi(n)}{n} - \frac{\psi(n+1)}{n+1} \right| = \varepsilon(n)$$

(1) *Journal de Math. pures et appl.*, t. IV, 1921, p. 124.

tend aussi vers zéro (lemme I, conséquence I),

$$\left| \psi(n) - \psi(n+1) + \frac{\psi(n+1)}{n+1} \right| = \varepsilon(n),$$

$$|\psi(n) - \psi(n+1)| \leq \varepsilon(n) + \frac{\psi(n+1)}{n+1} = \varepsilon'(n),$$

expression qui tend encore vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On peut écrire

$$-\varepsilon'(n) < \psi(n+1) - \psi(n) < \varepsilon'(n),$$

$$e^{-\varepsilon'(n)} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{\varepsilon'(n)};$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend donc vers 1.

THÉORÈME III. — *Si les a_n sont réels, si $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont que le point singulier 1 sur leur cercle de convergence commun de rayon 1, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1.*

J'ai étudié des fonctions telles que $\psi(u)$ (1); des résultats obtenus on déduit aisément des propriétés des coefficients; je n'en donnerai qu'une :

THÉORÈME IV. — *Gardons les hypothèses du théorème III et supposons de plus que a_n soit égal à un nombre déterminé, a , pour n égal à un des entiers d'une suite, $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$; si $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ tend vers 1, a_n tend vers a .*

7. On peut obtenir des résultats dans le cas où les coefficients sont imaginaires. Nous poserons

$$a_n = \rho_n e^{i\omega_n}, \quad \rho_n = |a_n|, \quad f(z) = \sum \rho_n e^{i\omega_n} z^n, \quad f_1(z) = \sum \frac{1}{\rho_n} e^{-i\omega_n} z^n.$$

Nous supposons encore que $\sqrt[n]{\rho_n}$ tend vers 1.

La fonction $\sum \rho_n e^{-i\omega_n} z^n$ a ses points singuliers conjugués de ceux de $f(z)$. Le théorème de la multiplication des singularités de M. Hadamard donnera les points singuliers de $\sum \rho_n^2 z^n$. Si $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $(|\omega| \leq \Omega, \rho = 1)$ et si Ω est inférieur à $\frac{\pi}{2}$,

(1) *Annales de l'École Normale*, 1927, p. 119.

$\Sigma \rho_n^2 z^n$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq 2\Omega$, ($2\Omega < \pi$). De même, si $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq \Omega_1$, $\Sigma \frac{z^n}{\rho_n^2}$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq 2\Omega_1$. Si donc $\Omega + \Omega_1 < \frac{\pi}{2}$, les deux séries $\Sigma \rho_n^2 z^n$ et $\Sigma \frac{z^n}{\rho_n^2}$ n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence; une remarque donnée plus haut montre que $\Sigma \rho_n z^n$ et $\Sigma \frac{z^n}{\rho_n}$ n'ont aussi que le point singulier 1 sur ce cercle.

THÉORÈME V. — Si $\sqrt[p_n]{a_n}$ tend vers 1, si $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq \Omega$ et $f_1(z)$ sur l'arc $|\omega| \geq \Omega_1$ du cercle de rayon 1, si $\Omega + \Omega_1 < \frac{\pi}{2}$, les fonctions $\Sigma \rho_n z^n$ et $\Sigma \frac{z^n}{\rho_n}$ n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence.

On peut ajouter que ces deux fonctions possèdent les propriétés données par le théorème II' et que les ρ_n possèdent les propriétés des a_n donnés au n° 6. Si, de plus, on sait que $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, il en est de même de $\Sigma e^{i\omega_n} z^n$ et de $\Sigma e^{-i\omega_n} z^n$ comme le montre le théorème de la multiplication des singularités.

8. Je me propose, maintenant, d'étudier les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ dans le cas où l'on suppose qu'elles n'ont l'une et l'autre qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence; $\sqrt[p_n]{a_n}$ tendant vers 1, les a_n n'étant pas nécessairement réels pour le moment.

Un procédé, dû à M. Carlson (1), permet de transformer $f(z)$ et $f_1(z)$ de manière à placer les points singuliers au voisinage du point 1. Soient

$$z = e^{i\varphi_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, p')$$

les points singuliers de $f(z)$ sur le cercle de convergence et

$$z = e^{i\varphi_\nu} \quad (\nu = p' + 1, p' + 2, \dots, p)$$

ceux de $f_1(z)$, p points en tout.

Donnons-nous un nombre q supérieur à 1; il existe, on le sait,

(1) CARLSON, *Math. Annalen*, t. 79, 1919. p. 244.

un entier m et d'autres entiers m_1, m_2, \dots, m_p tels que

$$\left| \frac{\zeta_\nu}{2\pi} - \frac{m_\nu}{m} \right| < \frac{1}{m(2q)}$$

m est au plus égal à $(2q)^p$.

On peut donc enfermer chacun des points singuliers considérés dans l'un des arcs b_s dont le milieu est le point $e^{\frac{2\pi is}{m}}$ et dont la longueur est $\frac{2\pi}{mq}$. On posera

$$F_\mu(z) = m \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\mu+m\lambda} z^{m\lambda}, \quad F'_z = m \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{z^{m\lambda}}{a_{\mu+m\lambda}}.$$

Il est bien facile de voir que les points singuliers de $F_\mu(z)$ se déduisent de ceux de $f(z)$ par des rotations de $\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \dots$ autour de l'origine. Ceux de $F'_\mu(z)$ se déduisent de la même façon de ceux de $f_1(z)$; tous ces points sont donc intérieurs aux arcs b_s . On a d'ailleurs

$$(2) \quad m f(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F_\mu(z), \quad m f_1(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F'_\mu(z).$$

Posons :

$$t = z^m,$$

$$F_\mu(z) = m \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\mu+m\lambda} t^\lambda = m g_\mu(t),$$

$$F'_\mu(z) = m \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{t^\lambda}{a_{\mu+m\lambda}} = m g'_\mu(t).$$

Les points singuliers de $g_\mu(t)$ se déduisent de ceux de $F_\mu(z)$ par la transformation $t = z^m$; le milieu de l'arc b_s devient $e^{2\pi is} = 1$, la longueur de l'arc devient $\frac{2\pi}{q}$; les points singuliers de $g_\mu(t)$ situés sur le cercle ont donc leurs arguments inférieurs à $\frac{\pi}{q}$ en valeur absolue; il en est de même de ceux de $g'_\mu(t)$.

Si tous les coefficients a_n sont réels, on prendra $q > 2$; on pourra appliquer à g_μ et g'_μ le théorème I : ces deux fonctions n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence. F_μ et F'_μ n'ont que les points singuliers $e^{\frac{2i\pi s}{m}}$; cela est vrai pour toute valeur de μ et, en vertu de (2), la même propriété est valable pour $f(z)$ et $f_1(z)$.

THÉOREME VI. — Si $\sqrt[p]{|a_n|}$ tend vers 1, si les a_n sont réels, si les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont l'une et l'autre qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence, ces points singuliers sont des sommets d'un polygone régulier dont le point 1 est un sommet.

On peut ajouter que les signes des a_n varient de façon périodique, pour n assez grand; que les points singuliers en question sont « sans contact »; que le nombre des sommets du polygone est au plus $4p$, p étant le nombre total des points singuliers de f et de f_1 sur le cercle.

De même, à l'aide du théorème V, on démontrera :

THÉOREME VII. — Si $\sqrt[p]{|a_n|}$ tend vers 1, si $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont l'une et l'autre qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence, les fonctions $\sum |a_n| z^n$ et $\sum \frac{z^n}{|a_n|}$ n'ont qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence et ces points sont des sommets d'un polygone régulier.

9. On peut encore étudier le cas où l'on sait seulement que $f(z)$ n'a que des points singuliers en nombre fini sur le cercle de convergence.

Supposons, par exemple, que $f(z)$ n'ait que deux points singuliers $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$ sur le cercle de convergence; admettons toujours que $\sqrt[p]{|a_n|}$ tende vers 1 et que les a_n soient réels. J'effectue la transformation du n° 8 sur $f(z)$ et sur $f_1(z)$ en prenant $p = 2$ et en laissant q indéterminé. $g(t)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| > \frac{\pi}{q}$. Si $f_1(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq \left(\pi - \frac{\pi}{q}\right) \frac{1}{m}$, $g'_\mu(t)$ sera holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq \pi - \frac{\pi}{q}$ et $g'_\mu(t)$ et $g''_\mu(t)$ n'auront que le point singulier 1 (théorème I). $f_1(z)$ n'aura qu'un nombre fini de points singuliers de module 1 et les points singuliers de $f(z)$ et de $f_1(z)$ seront des sommets d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est $m \leq (2q)^2$.

On sera certainement dans ce cas si $f_1(z)$ est régulier sur l'arc $|\omega| \geq \left(\pi - \frac{\pi}{q}\right) \frac{1}{4q^2}$ puisque $m \leq (2q)^2$. Or le maximum de $\left(\pi - \frac{\pi}{q}\right) \frac{1}{4q^2}$ quand q prend toute valeur de 1 à ∞ est $\frac{\pi}{27}$, obtenu

pour $q = \frac{3}{2}$ et m est au plus égal à 9. Dans l'arc $|\omega| < \frac{\pi}{27}$ il ne peut y avoir qu'un sommet du polygone régulier de m côtés; $f_1(z)$ a donc un seul point singulier sur le cercle; il en est de même de $f(z)$ d'après le théorème I.

THÉORÈME VIII. — Soit $f_1(z) = \sum \frac{z^n}{a_n}$ où les a_n sont réels, où $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1. Si $f_1(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geq \frac{\pi}{27}$ du cercle de rayon 1, de deux choses l'une : ou $\sum a_n z^n$ a plus de deux points singuliers sur ce cercle, ou $f(z)$ et $f_1(z)$ n'en ont qu'un seul, le point 1.

10. Je reviens sur les énoncés de ce travail pour chercher si toutes les hypothèses qu'ils acceptent sont bien nécessaires.

Le théorème I suppose les a_n réels. Cette hypothèse est essentielle; on le voit en posant $f = \sum e^{in\beta} z^n$; f et f_1 sont réguliers sur l'arc $|\omega| > \beta$ et, si $\beta < \frac{\pi}{2}$, le double de la longueur de cet arc dépasse 2π .

Je rappelle d'ailleurs que M. Fabry (1) a construit des fonctions de la forme $\sum e^{i\omega_n} z^n$ ayant telle singularité que l'on voudra sur le cercle de rayon 1. Il est donc impossible de modifier le théorème V et de conclure par une propriété des fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ elles-mêmes.

La condition $\alpha + \alpha_1 > 2\pi$ qui figure au théorème I est nécessaire : la fonction $f = \sum (-1)^n (z^{2n} + z^{2n+1})$ ne possède que les points singuliers i et $-i$; il en est de même de f_1 .

La condition que $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'ait qu'une limite est, elle aussi, indispensable. J'ai pu construire une fonction $f(z)$ telle que $\sqrt[n]{|a_n|}$ ait pour plus grande limite 1 et pour plus petite limite un nombre a inférieur à 1, le seul point singulier de module 1 étant 1, f_1 ayant les points singuliers a et $-a$, et ceux-là seulement sur le cercle de rayon a . Je n'insiste pas sur la démonstration de ce point de détail.

Enfin, une question se pose : les cas prévus au théorème I sont-ils possibles tous les deux? Il est bien certain qu'il existe des fonc-

(1) FABRY, *Acta math.*, t. 22, p. 85.

tions f et f_1 répondant aux conditions de l'hypothèse et n'ayant que le point singulier 1 sur le cercle de convergence. Il reste à construire des fonctions telles que f n'ait que le point singulier 1 sur ce cercle et que f_1 l'admette comme coupure. Je prendrai

$$f(z) = \sum \sin \pi \sqrt{n - \frac{1}{2}} z^n = \sum a_n z^n.$$

Par l'application du lemme IV, on voit que le seul point singulier de module 1 est 1. Soit p la racine de n : écrivons

$$n = p^2 + r, \quad \sqrt{n - \frac{1}{2}} = p + \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{r - \frac{1}{2}}{\sqrt{n - \frac{1}{2} + p}},$$

$$|\alpha_n| > \frac{\frac{1}{2}}{2p+1},$$

$$a_n = \sin \pi \sqrt{n - \frac{1}{2}} = \pm \sin \alpha_n \pi = \pm (1 + \varepsilon_n) \alpha_n \pi,$$

ε_n tendant vers zéro. $\sqrt[n]{a_n}$ a même limite que $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$; cette quantité est comprise entre 1 et $\left(\frac{1}{4p+2}\right)^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{1}{4p+2}\right)^{\frac{1}{p^2}}$ qui tend vers 1. $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1. D'autre part, les a_n présentent une infinité de changements de signe, ce qui, comme je l'ai dit, entraîne que f n'a pas le seul point singulier 1 sur le cercle de convergence; on est donc dans le deuxième cas: celui où ce cercle est coupure pour f_1 .