Bulletin de la S. M. F.

B. Gambier

# Sur quelques cas méconnus de la déformation des surfaces

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 56 (1928), p. 224-239

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__224_0>

## SUR QUELQUES CAS MÉCONNUS DE LA DÉFORMATION DES SURFACES;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Exposé du sujet. — La théorie de la déformation des surfaces a fait des progrès importants depuis environ 35 ans et les travaux de Weingarten; les travaux de ce géomètre ont conduit à prendre comme prototype de certains $ds^2$, réels et représentés par des surfaces réelles, certaines surfaces imaginaires d'équation simple; il sera donc justifié de présenter ici, pour un $ds^2$ de révolution, *une* déformée de révolution, jusqu'ici oubliée, dont l'axe est *isotrope*; de même, pour les surfaces de translation à profils de translation plans et situés dans deux plans rectangulaires, je présente *deux* déformées du même type obtenus en laissant un des profils dans le plan $xOy$ et faisant tourner le plan de l'autre autour de $Oz$ jusqu'à ce que ce plan devienne *isotrope*; ces deux questions ont d'ailleurs une analogie curieuse. L'intérêt de toutes ces surfaces imaginaires résulte de ce que beaucoup d'entre elles offrent une nappe où deux coordonnées sont réelles, l'autre imaginaire pure, susceptible de s'appliquer sur une nappe réelle d'une surface de même $ds^2$ et d'engendrer ainsi des systèmes cycliques *réels*, des systèmes triples orthogonaux réels. Nous retrouverons ainsi *la surface de révolution minima algébrique de degré 4, à axe isotrope*.

Au point de vue purement analytique, les travaux de M. Gau et M. Gosse ont établi que, sans s'en douter, les géomètres avaient obtenu successivement *tous les cas* où la déformation des surfaces admet soit une solution *complète* (coordonnées du point $x$, $y$, $z$ de la surface représentative exprimées *explicitement* avec *deux* fonctions arbitraires d'une variable), soit une solution *partielle* (*une* seule fonction arbitraire d'une variable au lieu de deux). Les cas de solution explicite *générale* correspondent : 1° aux développées de surface minima; 2° au paraboloïde de révolution; 3° au paraboloïde de plan directeur isotrope et d'axe non isotrope

$$(y+iz)y+kx=0;$$

4° au paraboloïde de plan directeur isotrope, d'axe isotrope

$$x(y+iz)+k(y-iz)=0;$$

5° aux surfaces déformées de la surface de degré 3, réglée à plan, directeur isotrope (¹)

$$y-iz=2x(y+iz)+\frac{2+n-n^2}{3}(y+iz)^3,$$

où $n$ est un entier $\geq 3$; les deux premiers types sont relatifs à un $ds^2$ de révolution, mais non les trois derniers; pour le dernier type il n'existe pas de quadrique représentative. Les cas de déformation *partielle* explicitement connue sont relatifs aux surfaces réglées *sans exception*.

M. Gau, dans son Mémoire (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. **42**, 1925, p. 89-141), a obtenu ce résultat fondamental : *Le problème de la déformation ne peut admettre de solution explicite, partielle ou totale, au sens déjà employé, que si le $ds^2$ convient à une surface réglée.* Dans ses deux pages de conclusion (p. 140 et 141) M. Gau donne cette conclusion nettement démentie par l'exemple 5, déjà connu depuis longtemps grâce à MM. Baroni et Goursat : si la surface S, applicable sur une surface réglée mais non sur une quadrique, n'est pas applicable non plus sur une surface de révolution, l'équation de la déformation n'est pas intégrable par la méthode de Darboux. Le type 5 est étudié complètement par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. IV, Chap. **13** et **14**, en particulier p. 330-337 où Darboux expose l'application de la méthode qui porte son nom). Plus bas, M. Gau, pour les surfaces applicables sur une quadrique, ne cite aucun des trois paraboloïdes (types 2, 3, 4). Il importait donc de réviser et compléter le travail important de M. Gau; M. Gosse (²) l'a fait dans

(¹) $n=2$ fournit le type 4; $n=1$ donne le type 1; $n=1$, à condition d'ajouter au second membre le terme $A(y+iz)^2$, où A est une constante non nulle, donne le type 2.

(²) Les résultats de M. Gosse viennent de paraître dans un Mémoire détaillé des une première Note (*C. R.*, t. **181**, 1925, p. 1125), puis incidemment dans une seconde (*C. R.*, t. **184**, p. 266) où il cite le $ds^2$, $\frac{4V^2\,du\,dv}{(u-v)^2}$, qui convient à une *surface réglée quelconque à génératrices isotropes*, V étant fonction de $v$ seul. Il importe d'établir ici quelques propriétés importantes de ces surfaces dont aucune, sauf la sphère, ne peut être réelle. Elles ont été étudiées par M. Vessiot, dans son Traité de Géométrie supérieure sous le nom de *surface canal isotrope* (p. 171-173).

Si l'on remarque que les cinq types donnés plus haut admettent tous une surface prototype réglée à plan directeur isotrope, il est indiqué de dire quelques mots des surfaces réglées à plan directeur isotrope et de leur déformation en nouvelle surface réglée. Darboux a laissé systématiquement de côté au tome III ces deux cas, ne prévoyant pas leur application intéressante au domaine réel, mais indique, t. III, p. 295, à l'occasion de la déformation : « la méthode très élémentaire que nous allons suivre s'appliquerait presque sans modification aux deux cas spéciaux que nous laissons de côté » ; au tome IV, Darboux traite le cas du plan directeur isotrope.

**2.** Surfaces de révolution. — L'élément linéaire de révolution (U fonction de $u$)

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2 \tag{1}$$

admet la surface représentative

$$\left\{\begin{aligned} &X + iY = iv^2 U - i\int \frac{du}{dU}\,du, \\ &X - iY = iU, \qquad Z = -vU. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

En remarquant que l'élimination de $v$ donne

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = U\int \frac{du}{dU}\,du, \qquad X - iY = iU, \tag{3}$$

---

*Acta mathematica*, t. 52, 1928; le $ds^2$, $\frac{4V^2\,du\,dv}{(u-v)^2}$, avait été laissé systématiquement de côté. Il correspond à un cas de déformation *partielle*.

l'équation de la surface est de la forme

$$(4)\qquad f(X^2+Y^2+Z^2,\ X-iY)=0,$$

et nous continuerons à dire que la surface est de *révolution autour de l'axe isotrope* $X-i$, $Y=0$, $Z=0$; le long de chaque *parallèle* $u=$ const., il y a un cône circonscrit dont le sommet est sur l'axe et une sphère inscrite dont le centre est sur l'axe; chaque parallèle est une courbe plane, les plans étant tous parallèles.

Les plans pivotant autour de l'axe donnent les *méridiens*, $\frac{Z}{X-iY}=iv$, où $v$ est une constante; chaque méridien coupe la surface orthogonalement; les méridiens et les parallèles sont lignes de courbure, système orthogonal et isotherme; toutes les normales rencontrent l'axe; le système des méridiens et parallèles forment un système conjugué au sens de Kœnigs (et même doublement). Dans l'application de la surface sur une surface de révolution réelle, les méridiens recouvrent les méridiens et les parallèles les parallèles (¹).

La représentation sphérique détermine sur la sphère précisément une série de parallèles et méridiens au sens élargi; cela revient à prendre de nouvelles variables $u$, $v$ et à écrire pour la sphère

$$(5)\qquad \begin{cases} c+ic'=\dfrac{u^2+v^2}{u}, \qquad c-ic'=\dfrac{1}{u}, \qquad c''=\dfrac{iv}{u}, \\ d\sigma^2=-\dfrac{du^2+dv^2}{u^2}. \end{cases}$$

En cherchant les surfaces *parallèles*, au sens de Peterson, à la sphère suivant ce réseau orthogonal et isotherme, on trouve les *surfaces moulures* (au sens élargi adopté ici)

$$(6)\qquad \begin{cases} X+iY=[-u^2f''+2uf'-2f+v^2f''+2v\varphi'-2\varphi]\,i, \\ X-iY=if'', \qquad Z=-vf''-\varphi', \end{cases}$$

(¹) Remplacer la surface de révolution réelle par une autre de même $ds^2$ revient à multiplier U par $m$, $v$ par $\frac{1}{m}$ où $m$ est une constante (réelle ou non). Cela revient à multiplier $X+iY$ par $\frac{1}{m}$ et $X-iY$ par $m$, ce que l'on peut obtenir par une *rotation* (réelle ou imaginaire) autour de OZ. Nous verrons plus bas que la surface imaginaire de révolution et la surface ainsi déplacée, qui sont *égales*, peuvent aussi se trouver homothétiques relativement à l'origine.

où $f(u)$ est fonction de $u$ seul, $\varphi(v)$ de $v$ seul. Les cœfficients E, F, G du $ds^2$, ceux D, D', D'' de Gauss sont :

$$(7)\quad \begin{cases} E = u^2 f'''^2(u), & G = [f''(u) + \varphi''(v)]^2, \quad F = 0, \\ D = -if'''^2(f'' + \varphi'')\,u, & D'' = if'''(f'' + \varphi'')^2, \quad D' = 0. \end{cases}$$

Les rayons de courbure principaux R ($u$ variable, $v$ constant) et R' ($u$ constant, $v$ variable) sont :

$$(8)\qquad R = iu^2 f'''(u), \qquad R' = -iu(f'' + \varphi'').$$

Nous avons un $ds^2$ réel si $f$ et $\varphi$ sont des fonctions réelles; pour $u$, $v$ réels, Y et Z sont réelles, X imaginaire pure. Nous avons notre surface de révolution pour $\varphi$ réduit à zéro. Le cas le plus simple ([1]) est manifestement $f''' = \text{const.}$; prenons, par exemple, $f''' = 6$, $f \equiv u^3$. La surface $\Sigma$ ainsi obtenue est *minima*, car $R = 6iu^2$, $R' = -6iu^2$; elle est *développée de surface minima*, car son $ds^2$ est $36u^2(du^2 + dv^2)$. Elle est algébrique et de degré 4; en effet

$$(9)\quad X + iY = (-2u^3 + 6uv^2)\,i, \qquad X - iY = 6iu, \qquad Z = -6uv.$$

Elle a pour équation

$$(10)\qquad 108(X^2 + Y^2 + Z^2) = (X - iY)^4.$$

L'une des deux nappes de la développée est l'axe isotrope de révolution; l'autre nappe donne les équations paramétriques

$$(11)\quad \xi + i\eta = i(4u^3 + 12uv^2), \qquad \xi - i\eta = 12iu, \qquad \zeta = -12uv,$$

et pour équation cartésienne

$$(12)\qquad 432(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi - i\eta)^4 = 0.$$

C'est une surface homothétique à la première; elle peut, d'ailleurs, se déduire de la première par une rotation imaginaire autour de $Oz$ (on a à résoudre l'équation $e^{i\varphi} = \sqrt[4]{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}$ pour avoir l'angle $\varphi$ de rotation).

Réalisons l'application de cette surface minima $\Sigma$ sur la développée de la surface d'Enneper. Cette dernière $\Sigma_1$ est représentée

---

([1]) La sphère correspond au cas où $\varphi$ est nulle et $f''$ égale à $\frac{-i}{u}$.

par les équations

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi = 6\alpha + 6\alpha\beta^2 + 2\alpha^3, & \eta = -4\beta^3, \\ \zeta = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 3\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$(14)\qquad ds^2 = 36(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2[d\alpha^2 + (\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta)^2].$$

On applique donc $\Sigma$ sur $\Sigma_1$, par les formules

$$(15)\qquad u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \alpha^2 + \beta^2), \qquad v = \sqrt{2}(\alpha + C),$$

où C est une constante numérique *quelconque*. Pour $\alpha$, $\beta$, C, $u$, $v$ réels, le point ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) réel de $\Sigma_1$ est recouvert par un point de $\Sigma$, Y, Z réel, X imaginaire pure : on a donc un système cyclique *réel*, de plus *algébrique* en raison de la forme des équations (15). Le système triple orthogonal correspondant est réel; il est lui-même *algébrique*, parce que le réseau conjugué commun à $\Sigma$ et $\Sigma_1$ est algébrique; fixons C; les asymptotiques de $\Sigma_1$ ont pour équation $d\alpha^2 + d\beta^2 = 0$, de sorte qu'elles ont pour image les droites isotropes du plan $\omega\alpha\beta$ et un réseau conjugué de $\Sigma_1$ est simplement un réseau *orthogonal* du plan $\omega\alpha\beta$; les asymptotiques de $\Sigma$ ont pour équation $u \pm v =$ const.; elles ont pour image, sur $\omega\alpha\beta$, les cercles $\alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha =$ const. Le réseau conjugué commun doit être, dans $\omega\alpha\beta$, orthogonal et *bissecter* les images des asymptotiques de $\Sigma$; autrement dit, les tangentes sont bissectrices des rayons vecteurs allant aux points (1, 0) et (— 1, 0) : on a donc les coniques homofocales $\frac{\alpha^2}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda - 1} = 1$; le reste s'ensuit.

3. Surfaces de translation. — La surface de translation ($a$, $a_1$ fonction de $\alpha$, $b$ et $b_1$ de $\beta$)

$$(1)\qquad x = a + b, \qquad y = a_1, \qquad z = b_1$$

admet $\infty^1$ déformées de même définition, il est à remarquer que les équations différentielles obtenues ($m$ constante quelconque)

$$(2)\qquad dA^2 + dA_1^2 = da^2 + da_1^2, \qquad A = ma;$$

$$(3)\qquad dB^2 + dB_1^2 = db^2 + db_1^2, \qquad B = \frac{b}{m}$$

sont précisément celles que l'on obtient pour déformer en surface de révolution la surface engendrée par la courbe $(a, a_1, 0)$ tournant autour de $Oy$, ou la courbe $(b, 0, b_1)$ tournant autour de $Oz$. Cherchons maintenant à conserver le système $\alpha$ dans des plans parallèles à $y = 0$, mais à situer le système $\beta$ dans des plans isotropes perpendiculaires au premier, donc parallèles à $x + iz = 0$; on écrira avec des fonctions inconnues $A$, $B$, $A_1$, $B_1$,

$$(4) \qquad X - iZ = A + B, \qquad X + iZ = B_1, \qquad Y = A_1,$$

et l'on a immédiatement ($m$ constante)

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A = ma, & dA_1^2 = da^2 + da_1^2; \\ B_1 = 2\dfrac{b}{m}, & dB = m\dfrac{db^2 + db_1^2}{db}. \end{array} \right.$$

La quadrature qui donne B est celle qui résulte du numéro précédent pour obtenir la déformée pseudo-révolutive de la surface de révolution engendrée par $(b, 0, b_1)$ tournant autour de $Oz$. L'analogie avec les surfaces de révolution persiste donc. Pour $m$ réel, on voit que $X$, $Y$ et $iZ$ sont réels; on en tire les mêmes conclusions que plus haut. La constante $m$ n'intervient que pour réaliser une rotation autour de $OY$. On peut ensuite raisonner sur le système $\beta$ au lieu de $\alpha$. Dans ces deux déformées, le système $(\alpha, \beta)$ est resté conjugué.

**4.** Surfaces réglées. — Darboux a indiqué (*Théorie des Surfaces*, t. III, p. 293-297) comment trouver *toutes* les surfaces réglées ayant le $ds^2$

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2,$$

en supposant $A \neq 0$; supposer le coefficient de $du^2$ égal à 1 suppose que $u$ est la *longueur* comptée sur chaque génératrice, ce qui écarte le cas de génératrices isotropes; $A \neq 0$ écarte le cas de génératrices parallèles à un même plan isotrope. Je signale en passant une faute d'impression : le $ds^2$ donné par Darboux, avant toute réduction, est en réalité

$$(2) \qquad E\,du^2 + (uE' + 2D)\,du\,dv + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2,$$

tandis que le texte porte $(E' + 2D)\,du\,dv$; réduire E à 1 se fait algébriquement; le $ds^2$ *réduit* (avec $E \neq 0$ et $A \neq 0$) est, *après une quadrature*,

$$du^2 + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2,$$

et si l'on écarte le cas de surfaces développables, on peut supposer par une nouvelle quadrature $AC - B^2 = 1$ de façon à réduire le nombre de fonctions arbitraires à 2; on peut réduire autrement en égalant A à 1, puisque A est supposé non nul.

Ceci est bien conforme à la nature des choses : pour définir une surface réglée, il est nécessaire et suffisant de donner ses traces sur deux plans et la loi d'association entre les points de ces deux traces et cela se traduit par un total de *trois* fonctions d'une variable; comme la déformation d'une surface réglée en nouvelle surface réglée fait intervenir *une* fonction d'une variable, le $ds^2$ réduit ne doit contenir que *deux* fonctions d'une variable.

Si la surface est à plan directeur isotrope ou à génératrices isotropes, comme cette circonstance subsiste au cours de la déformation, il y a une fonction de moins, puisque la trace sur le plan de l'infini est donnée; il reste donc *une* fonction pour le $ds^2$ réduit.

Dans le cas de surface réglée à plan directeur isotrope, on a, dans (2), $E \neq 0$, $A = 0$; on réduit *algébriquement* à la forme

$$du^2 + 2D\,du\,dv + (2Bu + C)\,dv^2,$$

puis par deux quadratures, à la forme (¹) adoptée par Weingarten

$$(3) \qquad ds^2 = du^2 + 2[u + \psi'(v)]\,dv^2,$$

où $\psi$ est l'unique fonction arbitraire. Or Darboux (t. IV, p. 333) donne avec une fonction arbitraire $\alpha(v)$ les équations paramé-

---

(¹) Les cinq types de déformation explicite totale correspondent précisément à cette forme; pour les développées de surface minima $\psi'$ est nulle; pour le paraboloïde de révolution $\psi' \equiv Av$; pour le paraboloïde de plan directeur isotrope et d'axe non isotrope $\psi'(v) \equiv -v\sqrt{k} - 2ke^{-\frac{2v}{\sqrt{k}}}$; pour le paraboloïde de plan directeur isotrope et d'axe isotrope $\psi'(v) \equiv -v^2$; pour le cinquième et dernier cas $\psi'(v) \equiv \frac{n(1-n)v^2}{2}$ où $n$ est entier $\geqq 2$. Ces cinq cas donnent des surfaces réelles en nombre illimité.

triques des surfaces réglées ayant ce $ds^2$ :

$$
(4) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& y + iz = 2\int \frac{dv}{\alpha'}, \qquad x = u - \int \frac{\alpha}{\alpha'}\,dv,\\
& y - iz = \alpha u + \int \alpha' \psi'(v)\,dv - \int \frac{\alpha^2}{2\alpha'}\,dv.
\end{aligned}
\right.
$$

Il ne reste donc plus qu'à traiter le cas des surfaces réglées à génératrices isotropes qui, jusqu'ici, a été presque totalement négligé, car, sauf la sphère, aucune de ces surfaces ne peut être réelle. Avant d'aller plus loin, remarquons que pour la forme de $ds^2$ ($\varepsilon = +1$ ou $0$),

$$
(5) \qquad ds^2 = \varepsilon\, du^2 + 2D\, du\, dv + (A u^2 + 2Bu + C)\, dv^2,
$$

obtenue ici, on a aisément, pour la courbure totale, l'expression

$$
(6) \qquad \frac{1}{RR'} = \frac{\varepsilon(B^2 - AC) + D^2 A}{[\varepsilon(A u^2 + 2Bu + C) - D^2]^2}.
$$

Dans le cas particulier que nous traitons maintenant, on a $\varepsilon = 0$ et

$$
(7) \qquad \frac{1}{RR'} = \frac{A}{D^2},
$$

A ne peut être nul, si l'on écarte le cas d'une surface développable; *la courbure totale est fonction de $v$ seulement; elle reste constante sur chaque génératrice*. Nous verrons plus bas que *réciproquement*, toute surface, telle qu'un système de lignes de longueur nulle coïncide avec les courbes d'égale courbure totale pour la surface, est applicable sur une surface réglée à génératrices isotropes : c'est le résultat que M. Gosse a signalé le premier.

Pour avoir les déformées réglées de la surface, il n'y a qu'à reprendre la méthode de Darboux, écrire

$$
(8) \qquad x = a_1 u + b_1, \qquad y = a_2 u + b_2, \qquad z = a_3 u + b_3,
$$

les $a_i$ et $b_i$ étant fonctions de $v$ satisfaisant aux équations

$$
(9) \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0, \qquad a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = A,
$$

$$
(10) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' = D,\\
& a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' = B,\\
& b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = C.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux équations (9) permettent d'écrire avec une fonction arbitraire $\lambda(v)$

(11) $$a_1 = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda'}\sqrt{\mathrm{A}} \qquad a_2 = i\,\frac{1+\lambda^2}{2\lambda'}\sqrt{\mathrm{A}}, \qquad a_3 = \frac{\lambda}{\lambda'}\sqrt{\mathrm{A}};$$

les deux premières équations (10) résolues en $b'_1$ et $b'_2$ donnent ces quantités linéairement en $b'_3$; en portant dans la dernière, on obtient $b'_3$ par une équation du premier degré, donc $b_3$, puis $b_2$ et $b_1$ par un ensemble de trois quadratures. Il reste donc à indiquer la forme réduite que l'on peut donner au $ds^2$ en jeu

(12) $$ds^2 = 2\mathrm{D}\,du\,dv + (\mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}u + \mathrm{C})\,dv^2,$$

par une substitution

(13) $$u = \lambda(\mathrm{V})\mathrm{U} + \mu(\mathrm{V}), \qquad \mathrm{V} = f(v),$$

où $\lambda$, $\mu$, $f$ sont trois fonctions inconnues. Or, remarquons que, pour la sphère, on connaît un $ds^2$ classique,

(14) $$d\sigma^2 = \frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}$$

qui, par la substitution

(15) $$\alpha - \beta = \frac{1}{u}, \qquad \beta = v,$$

devient une expression de la forme (12), où $\mathrm{D} = -2$, $\mathrm{A} = 4$, $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$

(16) $$d\sigma^2 = -4\,du\,dv + 4u^2\,dv^2.$$

On en conclut que l'on pourra réduire (12) à la forme canonique

(17) $$ds^2 = \frac{4\mathrm{B}^2\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = 4\mathrm{V}^2[-du\,dv + u^2\,dv^2].$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont liés à $u$ et $v$ par (15) et où $\mathrm{B}(\beta) \equiv \mathrm{V}(v)$ désigne une fonction du seul argument $v$; on a alors, pour cette forme réduite,

(18) $$\mathrm{D} = -2\mathrm{V}^2, \qquad \mathrm{A} = 4\mathrm{V}^2, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0, \qquad \frac{1}{\mathrm{RR}'} = \frac{1}{\mathrm{V}^2}.$$

On a, du même coup, obtenu une représentation conforme de la surface sur la sphère. Achevons le calcul des fonctions $a_i$ et $b_i$;

on a, avec une fonction *arbitraire* $\lambda(v)$,

$$(19) \qquad a_1 = \frac{(1-\lambda^2)V}{\lambda'}, \qquad a_2 = \frac{i(1+\lambda^2)V}{\lambda'}, \qquad a_3 = \frac{2\lambda V}{\lambda'}.$$

On doit ensuite résoudre

$$(20) \qquad \begin{cases} b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = 0, \\ a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' = -2V^2, \\ a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' = 0. \end{cases}$$

La première permet de poser, avec deux fonctions inconnues $l$ et $m$ de $v$,

$$(21) \qquad b_1' = \frac{1-l^2}{2} m, \qquad b_2' = i\,\frac{1+l^2}{2} m, \qquad b_3' = lm.$$

La seconde donne

$$(22) \qquad (l-\lambda)^2 m = 2V\lambda'.$$

La troisième donne

$$(23) \qquad (l-\lambda)m = V' - \frac{V\lambda''}{\lambda'}.$$

Finalement on a, avec une fonction arbitraire $\lambda(v)$ unique,

$$(24) \qquad \begin{cases} l = \lambda + \dfrac{2V\lambda'}{V' - V\dfrac{\lambda''}{\lambda'}}, \qquad m = \dfrac{\left(V' - V\dfrac{\lambda''}{\lambda'}\right)^2}{2V\lambda'}, \\ x + iy = -\dfrac{2\lambda^2}{\lambda'} Vu - \displaystyle\int l^2 m\, dv, \\ x - iy = \dfrac{2}{\lambda'} Vu + \displaystyle\int m\, dv, \\ z = \dfrac{2\lambda}{\lambda'} Vu + \displaystyle\int lm\, dv. \end{cases} \qquad ds^2 = 4V^2[u^2 dv^2 - du\, dv].$$

5. Surfaces réglées a génératrices isotropes. — Je signale maintenant le résultat important, dû à M. Gosse : *si une surface* S *admet comme lignes où la courbure totale reste constante un de ses systèmes de longueur nulle, elle est applicable sur une surface réglée à génératrices isotropes, les lignes de longueur nulle du système en jeu correspondant aux génératrices.*

Représentons en effet le $ds^2$ de la surface, rapportée à ses lignes de longueur nulle, par

$$(1) \qquad ds^2 = 2\,F\,du\,dv.$$

On a

$$(2) \qquad -\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\log F) = \frac{1}{V^2},$$

où V est une fonction connue de $v$. Remarquons que si $v$ est une fonction *quelconque* de $v$, le nouveau $d\bar{s}^2$,

$$(1') \qquad d\bar{s}^2 = 2\,F\,du\,d\bar{v},$$

où F est le même que pour (1), donne la relation

$$(2') \qquad -\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial \bar{v}}(\log F) = \frac{1}{V^2}\frac{dv}{d\bar{v}},$$

de sorte que le nouvel élément jouit de la même propriété. Si donc on choisit $\bar{v}$ par la relation

$$(3) \qquad d\bar{v} = \frac{dv}{V^2},$$

le nouveau $d\bar{s}^2$ est à courbure totale constante égale à 1 et à la forme réduite (obtenue en écrivant $v$ au lieu de $\bar{v}$),

$$(4) \qquad d\sigma^2 = \frac{4\,du\,dv}{(u-v)^2},$$

qui convient à une sphère de rayon unité; le $ds^2$ primitif, qui est en représentation conforme sur $d\sigma^2$, avec un rapport de similitude local fonction de $v$ seul, est donc de la forme obtenue plus haut,

$$(5) \qquad ds^2 = \frac{4\,V^2\,du\,dv}{(u-v)^2}.$$

En tout cas, si l'on ne songeait pas à cet artifice, basé sur une correspondance conforme commune à toutes ces surfaces, l'équation du second ordre

$$(6) \qquad s\,V^2 + e^z = 0, \qquad F = e^z$$

s'intégrerait, que V soit égal à 1 ou fonction de $v$, par la méthode indiquée par M. Goursat (*Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 97) : on prend pour nouvelle inconnue

$$Z = p, \tag{7}$$

de sorte que (6) s'écrit

$$QV^2 + e^z = 0 \tag{8}$$

et en dérivant en $u$ cette équation (8), on a

$$0 = S - QZ = \frac{\partial}{\partial v}\left(P - \frac{Z^2}{2}\right). \tag{9}$$

Une autre remarque intéressante est la suivante : *si une surface admet un système de lignes de longueur nulle formé d'asymptotiques, cette surface est réglée et à génératrices isotropes;* en effet le plan tangent à la surface est osculateur à l'asymptotique; donc si l'asymptotique n'est pas rectiligne, le plan tangent est toujours isotrope, et la surface est développable; si ce cas est écarté, il ne reste donc que le cas de la génératrice toujours isotrope.

Cette propriété que le système des lignes minima et des lignes asymptotiques ont une famille commune, entraîne que les *lignes de courbure se confondent entre elles et avec cette famille de génératrices isotropes;* les rayons de courbure principaux sont donc réduits à un seul, égal à V; si l'on calcule les cosinus ($c$, $c'$, $c''$) de la normale d'après les formules (24) du numéro précédent, on trouve que l'on peut prendre

$$\left\{\begin{aligned} c + ic' &= \frac{2\lambda^2 u}{\lambda'} + \frac{l\lambda}{V}\frac{d}{dv}\left(\frac{V}{\lambda'}\right), \\ c - ic' &= -\frac{2u}{\lambda'} - \frac{1}{V}\frac{d}{dv}\left(\frac{V}{\lambda'}\right), \\ c'' &= -\frac{2\lambda u}{\lambda'} - \frac{l+\lambda}{2V}\frac{d}{dv}\left(\frac{V}{\lambda'}\right), \end{aligned}\right. \tag{10}$$

la détermination étant adoptée pour que $R = V$; la développée de la surface S n'a qu'une nappe, engendrée par le point $X = x + Rc$,

$Y = y + Rc'$, $Z = z + Rc''$; on constate aussitôt que l'on a

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} X + iY &= \frac{l\lambda}{V} \frac{d}{dv}\left(\frac{V}{\lambda'}\right) - \int l^2 m\, dv, \\ X - iY &= -\frac{1}{V} \frac{d}{dv}\left(\frac{V}{\lambda'}\right) + \int m\, dv, \\ Z &= -\frac{l+\lambda}{2V} \frac{dv}{d}\left(\frac{V}{\lambda'}\right) + \int lm\, dv, \end{aligned} \right.$$

de sorte *que la développée se réduit à une courbe* $\Gamma$ : le long de chaque génératrice isotrope, la normale à la surface passe par le point correspondant à cette valeur de $v$, de sorte que la sphère $\Sigma$, qui a son centre en ce point et contient la génératrice, est tangente à la surface en tous les points de la génératrice; le rayon V est l'arc de $\Gamma$ compté à partir d'une origine convenable; la développante C de $\Gamma$, relative à cette valeur V de l'arc, est ligne double de l'enveloppe de cette sphère $\Sigma$ : cette enveloppe comprend la surface proposée, puis une autre, lieu de la seconde génératrice isotrope de $\Sigma$ issue du point où $\Sigma$ touche C. Nous retrouvons ainsi les résultats donnés par M. Vessiot (*Leçons de Géométrie supérieure*, p. 171-173).

La transformation de Sophus Lie change la surface réglée à génératrices isotropes en surface développable, puisque les asymptotiques seront confondues sur la transformée; cela tient d'ailleurs à ce que les sphères étudiées rencontrent chacune la sphère infiniment voisine et qu'elles ont pour homologue des droites dont chacune rencontre la droite infiniment voisine. Ceci explique pourquoi, quand on n'a pas réduit le $ds^2$, *les lignes de longueur nulle non rectilignes s'obtiennent par une équation de Riccati* $2D\,du + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv = 0$; en effet sur la développable transformée, on a à chercher les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire connu.

La ligne C est ligne ombilicale de notre surface réglée S; l'enveloppe de la sphère $\Sigma$ comprend outre S une autre nappe $S_1$ admettant aussi C pour ombilicale. Remarquons que la connaissance de $\Gamma$ suffit pour obtenir S et $S_1$; si l'on appelle $s$ l'arc de $\Gamma$, $(x, y, z)$ les coordonnées courantes du point de $\Gamma$, et $(a, a', a'')$ les cosinus directeurs de la tangente, $(b, b', b'')$ et $(c, c', c'')$ de la normale principale et binormale, le point courant de S a ses coordonnées exprimées par

(12) $x = as + \rho(b + ic)$, $y = a's + \rho(b' + ic')$, $z = a''s + \rho(b'' + ic'')$.

Le $ds^2$ de S est, en appelant $r$ et $t$ la courbure de $\Gamma$ et sa torsion,

$$(13) \qquad dS^2 = -2rs\,ds\,d\rho + ds^2[\rho^2 r^2 - 2i\rho rst + r^2 s^2].$$

Si l'on cherche à avoir un $ds^2$ applicable sur le premier, en partant d'une autre courbe $\Gamma_1$,

$$(14) \qquad dS_1^2 = -2r_1 s\,ds\,d\rho_1 + ds^2[\rho_1^2 r_1^2 - 2i\rho_1 r_1 s t_1 + r_1^2 s^2],$$

on rencontre un cas singulier de la déformation : aux points correspondants $s$ est le même, puisque la courbure totale est $\frac{1}{s^2}$, mais les deux paramètres $\Delta s$ et $\Delta_2 s$ de Beltrami sont nuls tous deux : on arrive aisément à identifier en supposant $\rho_1$ fonction de $\rho$ et $s$ et l'on trouve les relations nécessaires et suffisantes

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & s\left[\frac{3r'^2}{r^2} - \frac{2r''}{r} - t^2 - r^2 + 2it' - 2it\frac{r'}{r}\right] + 2it - \frac{2r'}{r} \\ & \quad = s\left[\frac{3r_1'^2}{r_1^2} - \ldots\right] + 2it_1 - \frac{2r_1'}{r_1}, \\ & r\rho - ist + s\frac{r'}{r} = r_1\rho_1 - ist_1 + s\frac{r_1'}{r_1}, \end{aligned} \right.$$

dont la première lie les courbures et torsions de $\Gamma$ et $\Gamma_1$ aux points de même arc et dont la seconde donne $\rho_1$ en fonction de $\rho$ et $s$. Ce calcul fait retrouver les surfaces réglées, dépendant d'une fonction arbitraire, applicables sur S.

Ceci permet de trouver dans quel cas les deux portions de l'enveloppe de $\Sigma$ sont applicables : la seconde nappe se déduit de (12) en changeant $i$ en $-i$, ce qui, dans l'élément (13), reviendrait à changer $t$ en $t_1 = -t$, en laissant $r$. La première relation (15) entraîne alors

$$(16) \qquad \frac{ts}{r} = \mathrm{K},$$

où K est une constante. On a ensuite

$$(17) \qquad \rho_1 - \rho = -2i\mathrm{K}.$$

En particulier, pour $t = 0$, on a $\mathrm{K} = 0$, la courbe $\Gamma$ est plane et les deux nappes sont symétriques l'une de l'autre.

On remarquera encore que, dans le $ds^2$ étudié, $\frac{4V^2\,du\,dv}{(u-v)^2}$ ou dans les formules (24) du paragraphe précédent, si V et Z sont des fonctions réelles de $v$, les coordonnées $(x, y, z)$ sur la surface sont : $x$ et $z$ réelles, $y$ imaginaire pure; la surface satisfait donc à une équation $f(x, y^2, z) = 0$ à coefficients réels. Deux surfaces applicables de cette espèce $(x, y, z)$ et $(x_1, y_1, z_1)$ fournissent un couple *réel* $(x, iy_1, z)$ et $(x_1, iy, z_1)$ de deux surfaces applicables.

Pour avoir les déformées réglées de la sphère réelle, il suffit de supposer $V = 1$ : la remarque qui précède s'applique donc. Il est commode aussi de construire une courbe de torsion constante $i$ et de mener, par chaque point de la courbe, dans le plan osculateur, l'une des deux droites isotropes du plan : la courbe à torsion constante est asymptotique de la surface; pour cela, si $c$, $c'$, $c''$ sont trois fonctions de $v$ telles que $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ on écrira les équations paramétriques de la surface réglée ($\rho$, $v$ paramètres curvilignes)

$$(18) \qquad \begin{cases} X = i\displaystyle\int c''\,dc' - c'\,dc'' + \rho(-cc' + ic''), \\ Y = i\displaystyle\int c\,dc'' - c''\,dc + \rho(1 - c''), \\ Z = i\displaystyle\int c'\,dc - c\,dc' - \rho(ic + c'c''). \end{cases}$$

En se reportant à mon Mémoire sur les courbes à torsion constante (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. 36 et 37, 1919 et 1920), on trouvera un grand nombre de courbes à torsion constante algébriques où $c$, $c'$ sont réelles, $c''$ imaginaire pure, de sorte que X, Y sont réels et Z imaginaire pure. On obtient ainsi une infinité de surfaces algébriques, réglées, d'équation réelle, mais entièrement imaginaires, applicables sur la sphère réelle; une homothétie de rapport $i$ donne des surfaces de même nature applicables sur la pseudo-sphère.