BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. RIQUIER

Sur la recherche des cas d'intégrabilité complète et incomplète de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 174-214

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__174_0>

SUR LA RECHERCHE DES CAS D'INTÉGRABILITÉ COMPLÈTE OU INCOMPLÈTE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. CH. RIQUIER.

Les recherches exposées dans le présent travail ont pour objet de ramener, dans la mesure du possible, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales. Elles présentent avec les recherches antérieures, où les considérations géométriques prédominent, une différence essentielle quant à la méthode : celle que l'auteur a suivie, basée sur l'Analyse et sur la Théorie générale des Systèmes d'équations aux dérivées partielles, s'applique, dans sa rigoureuse unité, aux types les plus variés de l'équation envisagée, et conduit à maints résultats entièrement inédits.

Dans ce qui suit, nous examinerons tour à tour les trois équations

$$(1) \qquad r + 2A(x, y, z, p, q)s + B(x, y, z, p, q)t + C(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$(2) \qquad rt - s^2 + L(x, y, z, p, q)r + 2M(x, y, z, p, q)s \\ + N(x, y, z, p, q)t + R(x, y, z, p, q) = 0,$$

$$(3) \qquad F(x, y)r + 2H(x, y)s + K(x, y)t = S(x, y, z, p, q).$$

L'équation (1) comprend, comme cas particulier, celui de l'équation linéaire en z, p, q, r, s, t : nous commencerons par l'examen de ce dernier cas, relativement simple.

ÉQUATION LINÉAIRE EN z, p, q, r, s, t.

1. Considérons l'équation linéaire du second ordre

$$(4) \qquad r + 2A(x, y)s + B(x, y)t + 2C(x, y)p \\ + 2D(x, y)q + E(x, y)z + F(x, y) = 0,$$

et soit (x_0, y_0) un système de valeurs numériques fondamentales de x, y remplissant la double condition : 1° que les six fonctions analytiques A, B, C, D, E, F y soient régulières; 2° que la différence $A^2 - B$ ne s'y annule pas, à moins qu'elle ne soit identiquement nulle en x, y. Cela étant, la recherche d'une condition suffisante *pour que l'intégration de l'équation* (4) *avec les conditions initiales*

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = \alpha(y) \\ p = \beta(y) \end{array} \right\} \qquad \text{pour } x = x_0$$

se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires nous a conduit aux conclusions suivantes :

Si les valeurs fondamentales x_0, y_0 *de* x, y *n'annulent pas la différence* $A^2 - B$, *il suffit, en désignant par* U, V *certaines fonctions entières* (dont le calcul est aisé) *des cinq premiers coefficients* A, B, C, D, E *et de quelques-unes de leurs dérivées, que l'on ait, quels que soient* x, y,

$$U^2 - (A^2 - B)V^2 = 0.$$

Si la différence $A^2 - B$ *est identiquement nulle, il suffit que l'on ait*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial A}{\partial y} + 2(AC - D) = 0.$$

2. Pour établir ces résultats, considérons, en même temps que l'équation donnée (4), du second ordre, l'équation linéaire du premier ordre

$$(6) \qquad p + A(x, y)q + M(x, y)z + \Phi(x, y) = 0,$$

impliquant, comme (4), l'inconnue z, et où A, M, Φ désignent des fonctions analytiques, provisoirement indéterminées, de x, y, assujetties, comme de raison, à être régulières au point (x_0, y_0) : A, M, Φ étant supposés connus, l'intégration de l'équation (6) se ramène, comme on sait, à celle du système différentiel ordinaire

$$\frac{dy}{dx} = A, \qquad \frac{dz}{dx} + Mz + \Phi = 0.$$

On a, en différentiant l'équation (6) tour à tour par rapport à x et par rapport à y conformément à l'algorithme des fonctions composées,

$$(7)\qquad r + \Lambda s + \mathrm{M} p + \frac{\partial \Lambda}{\partial x} q + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} z + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

$$(8)\qquad s + \Lambda t + \left(\mathrm{M} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right) q + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} z + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0;$$

puis, en désignant par Σ, T de nouvelles fonctions provisoirement indéterminées de x, y, multipliant les équations (7), (8), (6) respectivement par 1, Σ, T, et ajoutant membre à membre,

$$\begin{aligned}(9)\qquad & r + (\Lambda + \Sigma) s + \Lambda\Sigma t + (\mathrm{M} + \mathrm{T}) p \\ & + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \mathrm{M}\Sigma + \Lambda \mathrm{T}\right) q \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \mathrm{MT}\right) z + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathrm{T}\Phi = 0.\end{aligned}$$

Si les fonctions indéterminées Λ, M, Σ, T, Φ peuvent être choisies de telle façon que l'équation (9) devienne identique à l'équation (4), cette dernière sera, au point de vue de l'intégration, une conséquence nécessaire de l'équation (6), et l'intégrale particulière de (6) qui répond à la condition initiale

$$z = \alpha(y) \qquad \text{pour } x = x_0$$

sera l'une des intégrales (en nombre infini) de l'équation (4) qui remplissent la première des deux conditions (5). Si, de plus, on a, quel que soit y, l'identité

$$(10)\qquad \beta(y) + \Lambda(x_0, y)\alpha'(y) + \mathrm{M}(x_0, y)\alpha(y) + \Phi(x_0, y) = 0,$$

l'intégrale considérée de (6) satisfera manifestement aussi à la condition

$$p = \beta(y) \qquad \text{pour } x = x_0,$$

et sera, dès lors, l'intégrale de (4) qui répond à l'ensemble des conditions (5).

Cherchons donc, si possible, à déterminer Λ, M, Σ, T, Φ de telle façon : 1° que l'équation (9) devienne identique à l'équation (4); 2° que l'on ait, quel que soit y, l'identité (10).

En identifiant les équations (9) et (4), on a les relations

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Lambda + \Sigma = 2A, \qquad \Lambda\Sigma = B, \qquad M + T = 2C,\\
&\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + M\Sigma + T\Lambda = 2D,\\
&\frac{\partial M}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial M}{\partial y} + MT = E;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(12)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y} + T\Phi = F,
$$

que doivent vérifier Λ, M, Σ, T, Φ : l'inconnue Φ ne figure d'ailleurs que dans l'équation (12), dont l'intégration, Σ et T étant supposés connus, se ramène à celle du système différentiel ordinaire

$$
\frac{dy}{dx} = \Sigma, \qquad \frac{d\Phi}{dx} + T\Phi = F.
$$

Cela posé, examinons tour à tour les deux cas spécifiés au début (n° 1).

3. Premier cas. — On suppose que les valeurs fondamentales x_0, y_0 de x, y n'annulent pas la différence $A^2 - B$: de là résulte, si l'on se reporte à la théorie analytique de la fonction radicale, que les deux déterminations opposées de $(A^2 - B)^{\frac{1}{2}}$ sont régulières au point (x_0, y_0); nous désignerons par $\mathcal{R}$ l'une de ces deux déterminations, arbitrairement choisie une fois pour toutes.

En vertu des deux premières relations (11), Λ et Σ sont les deux racines de l'équation

$$
\Omega^2 - 2A\Omega + B = 0,
$$

à l'inconnue Ω, d'où

$$
(13)\qquad \Lambda = A + \varepsilon\mathcal{R}, \qquad \Sigma = A - \varepsilon\mathcal{R} \qquad (\varepsilon = \pm 1):
$$

en supposant Λ et Σ remplacés par leurs valeurs dans la quatrième équation (11), on aura, pour déterminer M et T, les relations

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&M + T = 2C,\\
&\varepsilon\mathcal{R}(M - T) = \frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial A}{\partial y} + 2(AC - D) - \mathcal{R}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}\\
&\qquad + \varepsilon\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + A\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} - \mathcal{R}\frac{\partial A}{\partial y}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

résolubles par rapport à M et T conformément à l'algorithme de Cramer (à cause de $\mathcal{R} \neq 0$); et il faudra que, moyennant un choix convenable de ε, les valeurs obtenues pour Σ, M, T vérifient la cinquième et dernière équation (11). Or, en remplaçant $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}$ par leurs valeurs

$$\frac{1}{2\mathcal{R}}\left(2\,A\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2\mathcal{R}}\left(2\,A\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial y}\right),$$

on trouve, par un calcul exempt de toute complication théorique, que le résultat de l'élimination est de la forme

$$U = \varepsilon \mathcal{R}\, V. \tag{15}$$

où U, V désignent certaines fonctions entières des cinq coefficients A, B, C, D, E et de quelques-unes de leurs dérivées; on déduit de (15), par l'élévation au carré,

$$U^2 - (A^2 - B)\, V^2 = 0. \tag{16}$$

Réciproquement, la relation (16) étant identiquement satisfaite, la relation (15) le sera pour un choix convenable de ε (1), et A, Σ, M, T seront déterminés par (13) et (14).

Il ne restera plus maintenant, pour identifier (9) avec (4), qu'à prendre pour Φ une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (12); et, comme l'identité (10) doit être vérifiée, on choisira celle qui répond à la condition initiale

$$\Phi = -[\beta(y) + \Lambda(x_0, y)\alpha'(y) + M(x_0, y)\alpha(y)] \qquad \text{pour } x = x_0. \tag{17}$$

Après quoi, ainsi qu'il a été dit, on intégrera l'équation (6) avec la condition initiale $z = \alpha(y)$ pour $x = x_0$.

4. Exemples. — I. Considérons l'équation

$$r - t + 2C(x, y)p + E(x, y)z + F(x, y) = 0,$$

où la différence $A^2 - B$ se réduit à la constante 1. Les équa-

(1) Dans l'espace $[[x, y \ldots]]$, pour qu'un produit de g fonctions, toutes régulières au point $(x_0, y_0, \ldots)$, soit *identiquement* nul en x, y, ..., il faut et il suffit que quelqu'un des g facteurs le soit.

tions (11) deviennent, dans le cas actuel,

$$\Lambda + \Sigma = 0, \qquad \Lambda\Sigma = 1, \qquad \mathrm{M} + \mathrm{T} = 2\mathrm{C},$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \Sigma\frac{\partial\Lambda}{\partial y} + \mathrm{M}\Sigma + \mathrm{T}\Lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \Sigma\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \mathrm{MT} = \mathrm{E},$$

et les quatre premières donnent

$$\Lambda = \varepsilon, \qquad \Sigma = -\varepsilon, \qquad \mathrm{M} = \mathrm{C}, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{C};$$

en portant ces valeurs dans la cinquième, il vient

$$\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} + \mathrm{C}^2 - \mathrm{E} = \varepsilon\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y},$$

puis, par l'élévation au carré,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x} + \mathrm{C}^2 - \mathrm{E}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y}\right)^2 = 0:$$

la méthode exposée sera donc applicable si cette dernière relation est identiquement vérifiée.

II. Considérons encore l'équation

$$r - t + 2f(y)q - \lambda^2 z + \mathrm{F}(x, y) = 0 \qquad [\lambda \text{ constante}].$$

Les quatre premières équations (11) donnent, dans le cas actuel,

$$\Lambda = \varepsilon, \qquad \Sigma = -\varepsilon, \qquad \mathrm{M} = -\varepsilon f(y), \qquad \mathrm{T} = -\varepsilon f(y),$$

et il vient, en portant ces valeurs dans la cinquième,

$$f' - f^2 + \lambda^2 = 0:$$

la méthode exposée sera donc applicable si la fonction f est de la forme

$$\lambda\,\frac{1 - \mu e^{2\lambda y}}{1 + \mu e^{2\lambda y}} \qquad [\mu \text{ constante}].$$

5. **Deuxième cas.** — On suppose que la différence $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}$ est identiquement nulle.

Des deux premières équations (11) on tire $\Lambda = \mathrm{A}$, $\Sigma = \mathrm{A}$; et comme on doit avoir, en vertu de la troisième, $\mathrm{M} + \mathrm{T} = 2\mathrm{C}$, la quatrième devient

$$\frac{\partial A}{\partial x} + A\frac{\partial A}{\partial y} + 2(AC - D) = 0 \quad (18)$$ [1].

Cette condition étant supposée satisfaite, on aura, pour déterminer M et T, les deux relations

$$M + T = 2C, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} + A\frac{\partial M}{\partial y} + MT - E = 0.$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial M}{\partial x} + A\frac{\partial M}{\partial y} - M^2 + 2CM - E = 0, \quad (19)$$

$$T = 2C - M; \quad (20)$$

on prendra pour M une intégrale quelconque de l'équation aux dérivées partielles (19), ce qui conduira à l'intégration d'un système différentiel ordinaire, et la relation (20) fournira ensuite la valeur de T. Après quoi il ne restera plus, comme dans le premier cas (n° 3), qu'à intégrer l'équation (12), c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + A\frac{\partial \Phi}{\partial y} + T\Phi - F = 0, \quad (21)$$

avec la condition initiale (17)

$$\Phi = -[\beta(y) + A(x_0, y)\alpha'(y) + M(x_0, y)\alpha(y)] \qquad \text{pour } x = x_0,$$

puis l'équation (6), c'est-à-dire

$$p + Aq + Mz + \Phi = 0. \quad (22)$$

avec la condition initiale $z = \alpha(y)$ pour $x = x_0$.

On observera, au sujet des trois équations aux dérivées partielles (19), (21), (22), que la première opération nécessitée par leur intégration consiste, pour toutes, dans l'intégration d'une même équation différentielle $\frac{dy}{dx} = A(x, y)$.

6. Il convient de signaler, en terminant, deux hypothèses qui conduisent à des conclusions particulièrement simples.

---

[1] Cette relation peut se déduire de la deuxième relation (14) en y supposant $\mathcal{R}$ identiquement nul.

I. Les coefficients A, B sont à la fois identiquement nuls.

La condition (18) se réduit alors à $D = 0$, et, en la supposant vérifiée, l'équation (4) prend la forme

$$r + 2C(x, y)p + E(x, y)z + F(x, y) = 0;$$

on voit immédiatement que, pour l'intégrer avec les conditions initiales (5), il suffit d'intégrer, avec ces mêmes conditions, le système différentiel ordinaire

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} + 2Cp + Ez - F = 0.$$

II. Les cinq coefficients A, B, C, D, E se réduisent à de simples constantes a, b, c, d, e.

Si $a^2 - b$ est différent de zéro, les quatre fonctions indéterminées Λ, M, Σ, T, inconnues des cinq équations (11), se réduisent elles-mêmes à des constantes, et leur élimination conduit à la condition

(23) $$(ac - d)^2 = (a^2 - b)(c^2 - e).$$

Si $a^2 - b$ est nul, les équations (11) donnent comme valeur commune de Λ et Σ la constante a, comme valeur de M une intégrale quelconque de l'équation

$$\frac{\partial M}{\partial x} + a\frac{\partial M}{\partial y} - M^2 + 2cM - e = 0,$$

et comme valeur de T la différence $2c - M$. En éliminant les quatre inconnues, on tombe sur la condition $ac - d = 0$, laquelle, à cause de $a^2 - b = 0$, peut manifestement s'écrire encore sous la forme (23).

OBSERVATION RELATIVE AU CHANGEMENT DES VARIABLES INDÉPENDANTES DANS LES SYSTÈMES PARTIELS DU PREMIER ORDRE.

7. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, où se trouvent engagées, avec des variables indépendantes, x, y, ..., en nombre quelconque, des fonctions inconnues, u, v, ... en nombre également quelconque, et suppo-

sons ce système résolu par rapport à diverses dérivées (premières) des inconnues. Pour en disposer nettement les diverses équations, on peut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

Cela posé, *si deux systèmes orthonomes* (¹) *du premier ordre*, S, S', *peuvent se déduire l'un de l'autre par un changement des variables indépendantes* (suivi d'une résolution convenable), *et si les Tableaux respectifs de ces systèmes* (construits comme il vient d'être dit) *se composent de colonnes comprenant les mêmes nombres respectifs d'équations, les deux systèmes sont à la fois passifs ou non passifs*.

Supposons en effet que le système S soit passif, et soient :

u, ... les fonctions inconnues;
x, ... les anciennes variables;
x', ... les nouvelles;
$\mathfrak{f}$ les formules qui lient x, ... à x', ...;
$\mathfrak{F}$ celles qui expriment les anciennes dérivées premières et secondes de u, ... à l'aide de leurs nouvelles dérivées des mêmes ordres (ou inversement);
$\mathfrak{U}$ les relations *distinctes* qui, dans le système S indéfiniment prolongé par différentiations relatives à x, ..., ont pour premiers membres les dérivées principales premières et secondes de u, ..., et qui, en vertu de la passivité supposée de S, sont *précisément en même nombre* que les dérivées dont il s'agit;
$\mathfrak{U}'$ les relations *distinctes* qui, dans le système S' indéfiniment prolongé par différentiations relatives à x', ..., ont pour premiers membres les dérivées principales premières et secondes de u, ..., et qui sont *en même nombre au moins* que ces dérivées.

Pour établir la passivité de S', il suffit de faire voir que les relations du groupe $\mathfrak{U}'$ sont *précisément en même nombre* que les

(¹) Riquier. *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. VII.

dérivées principales premières et secondes de u, ... dans le système S'.

Soit ($\mathfrak{U}$) le groupe transformé de $\mathfrak{U}$ à l'aide des formules $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{F}$, et composé, comme $\mathfrak{U}$, de relations toutes distinctes. Puisque les Tableaux respectifs des deux systèmes se composent de colonnes comprenant les mêmes nombres respectifs d'équations, le groupe des fonctions inconnues u, ... a, de part et d'autre, les mêmes nombres respectifs de dérivées principales dans chaque ordre : en désignant par N le nombre total des dérivées principales premières et secondes de u, ..., soit pour le système S, soit pour le système S', chacun des groupes $\mathfrak{U}$, ($\mathfrak{U}$) contient exactement N relations, et il faut établir que le groupe $\mathfrak{U}'$, qui en contient au moins N, n'en contient pas davantage.

Or, si l'on transforme l'une quelconque des relations $\mathfrak{U}'$ à l'aide des formules $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{F}$, la relation résultante, vérifiée pour toutes les intégrales de S, est une conséquence algébrique de $\mathfrak{U}$, car autrement la solution générale de S ne présenterait pas le degré d'indétermination qui résulte de la nature passive du système; on en conclut qu'avant sa transformation, la relation considérée du groupe $\mathfrak{U}'$ est une conséquence algébrique de ($\mathfrak{U}$). Donc le groupe $\mathfrak{U}'$, composé, par hypothèse, de relations toutes distinctes, n'en peut comprendre plus de N.

PROPOSITION AUXILIAIRE SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES DU PREMIER ORDRE.

8. Désignant par Φ une fonction inconnue des $g+h+1$ variables indépendantes

$$(24) \qquad x;\quad x_1, x_2, \ldots x_g;\quad y_1, y_2, \ldots, y_h \qquad (g>0,\ h\geq 0),$$

supposons qu'un système du premier ordre, S, à l'inconnue Φ, linéaire et homogène par rapport aux $g+h+1$ dérivées de Φ, et dont les coefficients sont indépendants de cette inconnue, comprenne au plus g équations, et se trouve résolu par rapport à tout ou partie des g dérivées

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_g};$$

supposons en outre qu'il soit *passif*. Désignons enfin par

$$\xi;\quad \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_g;\quad \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_h$$

un système de valeurs numériques fondamentales des variables (24), choisi dans les limites où les divers coefficients du système S sont tous des fonctions analytiques et régulières.

Cela étant, *le système* S *ne peut manquer d'admettre quelque intégrale remplissant la double condition suivante :*

1° *Cette intégrale se réduit à zéro lorsque les variables*

$$x;\quad x_1, x_2, \ldots x_g$$

prennent à la fois leurs valeurs fondamentales;

2° *La dérivée relative à x de l'intégrale dont il s'agit a une valeur fondamentale différente de zéro.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, $g = 3$, $h = 2$, et nous examinerons tour à tour les divers cas où le système S, composé au plus de trois équations, comprend :

ou bien une équation unique, ayant, par exemple, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ pour premier membre;

ou bien deux équations ayant, par exemple, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$ pour premiers membres;

ou bien trois équations ayant pour premiers membres $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$.

Toute fonction des variables

$$x;\quad x_1, x_2, x_3;\quad y_1, y_2$$

développable à partir des valeurs fondamentales

$$\xi;\quad \xi_1, \xi_2, \xi_3;\quad \eta_1, \eta_2$$

de ces variables, et s'annulant dans l'hypothèse numérique

$$x;\quad x_1, x_2, x_3 = \xi;\quad \xi_1, \xi_2, \xi_3,$$

peut, par un groupement convenable des termes de son développement, s'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
&(x_1-\xi_1)\,H_1(x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2)\\
+&(x_2-\xi_2)\,H_2(x,\qquad x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2)\\
+&(x_3-\xi_3)\,H_3(x,\qquad\quad x_3,\ y_1,\ y_2)\\
+&(x\ -\xi\ )\,H\ (x,\qquad\qquad y_1,\ y_2);
\end{aligned}
$$

et sa dérivée première relative à x a même valeur fondamentale que $H(x, y_1, y_2)$. Cela étant :

Si le système S comprend une équation unique résolue par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$, il suffira, pour en avoir une intégrale satisfaisant aux conditions 1° et 2°, de l'intégrer avec la condition initiale

$$
\Phi = \left\{
\begin{aligned}
&(x_2-\xi_2)H_2(x,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2)\\
+&(x_3-\xi_3)H_3(x,\ x_3,\ y_1,\ y_2)\\
+&(x\ -\xi\ )H\ (x,\ y_1,\ y_2)
\end{aligned}
\right\}\quad \text{pour } x_1 = \xi_1,
$$

les fonctions H_2, H_3, H étant arbitrairement choisies sous la seule restriction que H ait une valeur fondamentale différente de zéro.

Si le système S est résolu par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}$, il suffira de l'intégrer avec la condition initiale

$$
\Phi = \left\{
\begin{aligned}
&(x_3-\xi_3)H_3(x,\ x_3,\ y_1,\ y_2)\\
+&(x\ -\xi\ )H\ (x,\ y_1,\ y_2)
\end{aligned}
\right\}\quad \text{pour } x_1,\ x_2 = \xi_1,\ \xi_2,
$$

les fonctions H_3, H étant arbitrairement choisies sous la même restriction.

Si le système S est résolu par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$, il suffira de l'intégrer avec la condition initiale

$$
\Phi = (x-\xi)H(x,\ y_1,\ y_2)\qquad \text{pour } x_1,\ x_2,\ x_3 = \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,
$$

la fonction H étant arbitrairement choisie sous la restriction formulée.

Dans chaque cas, *l'intégration à effectuer se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires ou totales* (1).

(1) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. XIII.

ÉQUATION LINÉAIRE EN r, s, t.

9. Considérons l'équation

$$(25)\qquad \begin{aligned} r &+ 2A(x, y, z, p, q)s \\ &+ B(x, y, z, p, q)t + C(x, y, z, p, q) = 0, \end{aligned}$$

et soit $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ un système de valeurs numériques fondamentales de x, y, z, p, q remplissant la double condition : 1° que les trois fonctions analytiques A, B, C y soient régulières; 2° que la différence $A^2 - B$ ne s'y annule pas, à moins qu'elle ne soit identiquement nulle en x, y, z, p, q. Soient, en outre, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ deux fonctions analytiques de y régulières au point y_0, et telles que $\alpha(y_0)$, $\beta(y_0)$, $\alpha'(y_0)$ soient respectivement égaux à z_0, p_0, q_0. On se propose d'établir une condition suffisante pour que l'intégration de l'équation (25) avec les conditions initiales

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{l} z = \alpha(y) \\ p = \beta(y) \end{array}\right. \quad \text{pour } x = x_0$$

se ramène à l'intégration d'équation différentielles ordinaires ou totales; ou, à défaut de cette intégration *complète*, une condition suffisante pour que, par les mêmes moyens, une intégration *incomplète* soit possible, et fournisse quelque intégrale de (25) satisfaisant à la première des conditions (26).

A cet effet, considérons, en même temps que l'équation donnée (25), du second ordre, l'équation du premier ordre

$$(27)\qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

impliquant, comme (25), l'inconnue z : son premier membre est une fonction analytique, provisoirement indéterminée, de x, y, z, p, q, régulière au point $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, et, de plus, afin que l'équation (27) puisse être résolue par rapport à p, assujettie à la restriction que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro.

En différentiant l'équation (27) tour à tour par rapport à x et par rapport à y conformément à l'algorithme des fonctions composées, il vient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + p\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} + r\,\frac{\partial\Phi}{\partial p} + s\,\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} + q\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} + s\,\frac{\partial\Phi}{\partial p} + t\,\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0. \tag{29}$$

Désignant ensuite par $\Sigma(x, y, z, p, q)$ une deuxième fonction analytique, provisoirement indéterminée, de x, y, z, p, q, et multipliant les équations (28), (29) respectivement par 1, $\Sigma(x, y, z, p, q)$, nous aurons, après addition membre à membre,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial p}\,r + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)s + \Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial q}\,t \\ &\qquad + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (p + \Sigma q)\frac{\Phi\partial}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Si les fonctions indéterminées Φ, Σ peuvent, sous la restriction indiquée plus haut pour Φ, être choisies de telle façon que l'équation (30) devienne identique à l'équation (25), cette dernière sera, au point de vue de l'intégration, une conséquence nécessaire de l'équation (27), et l'intégrale particulière de (27) qui répond à la condition initiale

$$z = \alpha(y) \qquad \text{pour } x = x_0$$

sera l'une des intégrales (en nombre infini) de l'équation (25) qui remplissent la première des conditions (26). Si, de plus, la fonction Φ satisfait, quel que soit y, à l'identité

$$\Phi[x_0, y, \alpha(y), \beta(y), \alpha'(y)] = 0,$$

l'intégrale considérée de (27) satisfera manifestement aussi à la condition

$$p = \beta(y) \qquad \text{pour } x = x_0,$$

et sera, dès lors, l'intégrale de (25) qui répond à l'ensemble des conditions (26).

Cherchons donc, si possible, en vue de l'intégration complète de (25), un couple de fonctions, Σ, Φ, tel :

1° que $\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro, et que l'équation (30) soit identique à l'équation (25);

2° que Φ s'annule, quel que soit y, dans l'hypothèse

$$x = x_0, \quad z = \alpha(y), \quad p = \beta(y), \quad q = \alpha'(y).$$

10. En exprimant que l'équation (30) est identique à l'équation (25), nous aurons, entre les fonctions indéterminées Σ, Φ et les fonctions connues A, B, C, les trois relations

$$\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}}{1} = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial q} + \Sigma\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}}{2A} = \frac{\Sigma\dfrac{\partial\Phi}{\partial q}}{B}$$
$$= \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \Sigma\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + (p + \Sigma q)\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}}{C},$$

c'est-à-dire, en égalant tour à tour chacun des trois derniers rapports au premier,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (\Sigma - 2A)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

$$\Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial q} - B\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (p + \Sigma q)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - C\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0.$$

Des deux premières équations on tire $\left(\text{puisque } \dfrac{\partial\Phi}{\partial p} \text{ doit être différent de zéro}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2A - \Sigma \\ \Sigma & B \end{vmatrix} = 0,$$

ou

(31) $$\Sigma^2 - 2A\Sigma + B = 0;$$

par suite, en posant $\varepsilon = \pm 1$, et désignant par $\mathfrak{S}$ l'une des deux déterminations opposées, arbitrairement choisies une fois pour toutes, du radical $\sqrt{A^2 - B}$,

$$\Sigma = A + \varepsilon\mathfrak{S};$$

cette valeur de Σ est une fonction de x, y, z, p, q régulière au point fondamental $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, puisque, en vertu de nos hypothèses, l'expression qui figure sous le radical est, ou identiquement nulle, ou pourvue d'une valeur fondamentale différente de zéro. En supposant, dans les équations d'identification de (25) avec (30), Σ remplacé par sa valeur, il reste, pour déterminer la fonction inconnue Φ des cinq variables indépendantes x, y, z, p, q, le système

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial q}+(\Sigma-2A)\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0,\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(p+\Sigma q)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-C\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0,\end{aligned}\right.$$

linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières de Φ, et dont tous les coefficients sont fonctions connues des cinq variables : nous le désignerons par (Γ).

Pour que la considération du système (Γ) puisse conduire à l'intégration complète de l'équation (25), il faudra que, moyennant un choix convenable de $\varepsilon\,(=\pm 1)$, il admette quelque intégrale, Φ, satisfaisant à la double condition : 1° que $\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; 2° que Φ s'annule, quel que soit y, dans l'hypothèse

$$x=x_0,\qquad z=\alpha(y),\qquad p=\beta(y),\qquad q=\alpha'(y).$$

Pour que, à défaut de l'intégration complète, la considération du système (Γ) puisse conduire à une intégration incomplète, il faudra que, moyennant un choix convenable de ε, il admette quelque intégrale, Φ, telle que $\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro.

Cela posé, nous établirons tour à tour trois propositions, A, B, C, ayant pour objet l'intégration, complète ou incomplète, dont il s'agit.

11. Proposition *A*. — *Pour que l'intégration de l'équation* (25) *avec les conditions initiales* (26) *se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales, il suffit que, moyennant un choix convenable de* $\varepsilon\,(=\pm 1)$, *le système linéaire et homogène du premier ordre* (Γ) [obtenu, comme il a été dit, en remplaçant dans (32) Σ par sa valeur tirée de (31)], *soit passif.*

Effectivement, par le changement de variables

$$(33)\qquad \begin{cases} X = x, & Y = y, & Z = z - \alpha(y), \\ P = p - \beta(y), & Q = q - \alpha'(y) \end{cases}$$

(X, Y, Z, P, Q variables nouvelles), le système (Γ) devient

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial Q} + (\Sigma - 2A)\dfrac{\partial\Phi}{\partial P} = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial X} + \Sigma\dfrac{\partial\Phi}{\partial Y} + [P + \beta(Y) + \Sigma Q]\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z} \\ \qquad - \Sigma\alpha''(Y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q} - [C + \Sigma\beta'(Y)]\dfrac{\partial\Phi}{\partial P} = 0, \end{cases}$$

et la question est alors de savoir si le transformé (34) admet quelque intégrale, Φ, satisfaisant à la double condition : 1° que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial P}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; 2° que Φ s'annule, quel que soit Y, dans l'hypothèse

$$X = x_0, \qquad Z = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

Or, la passivité supposée du système (Γ) entraîne celle du système transformé (34) [n° 7], lequel, d'ailleurs, est manifestement résoluble par rapport à $\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial X}$: le système (34) admet donc, en vertu de la proposition auxiliaire qui fait l'objet du n° 8 [1], quelque intégrale satisfaisant à la double condition voulue.

12. Exemples. — I. Si l'on considère l'équation

$$r + 2S(x, y)s + S^2(x, y)t + W(x, y, z) = 0,$$

il suffit, pour que l'intégration complète en soit possible, que l'on ait, quels que soient x et y, $\dfrac{\partial S}{\partial x} + S\dfrac{\partial S}{\partial y} = 0$.

L'équation (31) devient, en effet, dans le cas actuel,

$$\Sigma^2 - 2S\Sigma + S^2 = 0 \quad \text{ou} \quad (\Sigma - S)^2 = 0,$$

[1] Pour appliquer au cas actuel la proposition auxiliaire, on devra y supposer $g = 3$, $h = 1$, puis remplacer les variables

$$x;\ x_1,\ x_2,\ x_3;\ y_1$$

respectivement par

$$P;\ X,\ Z,\ Q;\ Y.$$

d'où l'on tire $\Sigma = S$; en substituant cette valeur dans les équations (32), on aura le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial q} = S\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -S\frac{\partial\Phi}{\partial y} - (p + qS)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + W\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \end{aligned}\right.$$

pour lequel le calcul de la condition de passivité conduit à la relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} + S\frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0 :$$

or, en vertu de notre hypothèse, cette dernière est identiquement vérifiée.

II. L'intégration complète est possible pour l'équation

$$r + 2as + a^2 t + D(x, y, z, p + aq) = 0 \quad [a \text{ constante}].$$

L'équation (31) se réduit à $(\Sigma - a)^2 = 0$, d'où l'on tire $\Sigma = a$; en substituant cette valeur dans les équations (32), on aura le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial q} = a\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -a\frac{\partial\Phi}{\partial y} - (p + aq)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + C(x, y, z, p, q)\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \end{aligned}\right.$$

pour lequel le calcul de la condition de passivité conduit à la relation

$$\left(\frac{\partial C}{\partial q} - a\frac{\partial C}{\partial p}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0 :$$

Or, cette dernière sera identiquement vérifiée si la fonction C satisfait à la relation

$$\frac{\partial C}{\partial q} - a\frac{\partial C}{\partial p} = 0,$$

c'est-à-dire si elle présente la forme ci-dessus indiquée.

13. Proposition *B*. — Le système (Γ) étant supposé non passif, *pour que l'intégration de l'équation* (25) *avec les conditions initiales* (26) *se ramène à l'intégration d'équations différen-*

tielles ordinaires ou totales, il suffit que, moyennant un choix convenable de $\varepsilon (= \pm 1)$, *le système* (Γ) *soit la conséquence algébrique d'un système linéaire et homogène passif du premier ordre composé de trois équations, et tel, qu'en y opérant le changement de variables* (33), *le système transformé soit résoluble par rapport à* $\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \frac{\partial \Phi}{\partial Z}, \frac{\partial \Phi}{\partial Q}$.

Effectivement, pour que le système (Γ) admette quelque intégrale remplissant la double condition formulée au n° 10 (*in fine*) relativement à l'intégration *complète* de (25), il suffit qu'il en soit de même pour le système passif de trois équations dont (Γ) est la conséquence algébrique. Or, le système transformé de ce dernier par le changement de variables (33) est passif comme lui (n° 7), et, puisqu'on le suppose résoluble par rapport à $\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \frac{\partial \Phi}{\partial Z}, \frac{\partial \Phi}{\partial Q}$, il admet, en vertu de la proposition auxiliaire du n° 8 [1], quelque intégrale, Φ, telle : 1° que $\frac{\partial \Phi}{\partial P}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; 2° que Φ s'annule, quel que soit Y, dans l'hypothèse

$$X = x_0, \quad Z = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

14. Exemples. — I. Si l'on considère l'équation

$$r - t + 2qf(y) - \lambda^2 z + G(x, y) = 0,$$

il suffit, pour que l'intégration complète en soit possible, que la fonction $f(y)$ soit de la forme

$$\lambda \frac{1 - \mu e^{2\lambda y}}{1 + \mu e^{2\lambda y}} \quad [\lambda, \mu \text{ constantes}].$$

L'équation (31) devient en effet, dans le cas actuel, $\Sigma^2 - 1 = 0$, d'où $\Sigma = \varepsilon (= \pm 1)$; en substituant cette valeur dans les équations (32), on aura le système

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y} - (p + \varepsilon q) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (2qf - \lambda^2 z + G) \frac{\partial \Phi}{\partial p}; \end{aligned} \right.$$

(1) *Voir* la note du n° 11.

ce dernier est d'ailleurs la conséquence algébrique du suivant :

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial q} = -\varepsilon\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = \varepsilon f\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\varepsilon\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + (qf - \varepsilon pf - \lambda^2 z + G)\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}. \end{cases}$$

Or, le calcul des conditions de passivité du système (35) conduit à la relation unique

$$(f' - f^2 + \lambda^2)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

laquelle est identiquement vérifiée si la fonction $f(y)$ satisfait à l'équation différentielle $f' - f^2 + \lambda^2 = 0$, c'est-à-dire si elle présente la forme ci-dessus indiquée.

On constatera, d'autre part, que, dans le système transformé de (35) par le changement de variables (33), le déterminant formé avec les coefficients de $\dfrac{\partial\Phi}{\partial X}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q}$ se réduit (au signe près) à l'unité.

Nous retrouvons ainsi un résultat déjà exposé (n° 4, II).

II. Si l'on considère l'équation

$$r + 2as + bt + H(x, y, p, q) = 0 \quad [a, b \text{ constantes}],$$

il suffit, pour que l'intégration complète en soit possible, que la fonction $H(x, y, p, q)$ soit de la forme

$$f[x, y, p + (a + \sqrt{a^2 - b})q],$$

la détermination du radical $\sqrt{a^2 - b}$ étant choisie arbitrairement.

On a, en effet,

$$\Sigma = a - \sqrt{a^2 - b},$$

et, en posant

$$a + \sqrt{a^2 - b} = \Omega,$$

le système (32) devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial q} = \Omega\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\Sigma\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - [p + \Sigma q]\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + H\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}; \end{cases}$$

ce dernier système est d'ailleurs la conséquence algébrique du suivant :

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial q} = \Omega\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\Sigma\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathrm{H}\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Or, le calcul des conditions de passivité du système (35) conduit à la relation unique

$$\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q} - \Omega\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0,$$

laquelle est identiquement vérifiée si la fonction $\mathrm{H}(x, y, p, q)$ est de la forme $f(x, y, p + \Omega q)$, c'est-à-dire de la forme ci-dessus indiquée.

D'autre part, le système transformé de (36) par le changement de variables (33) donne lieu à la même constatation que le système transformé de (35).

15. Proposition *C*. — Les mêmes choses étant posées qu'au début du n° 9, sauf en ce qui concerne la fonction $\beta(y)$, qui, dans la proposition actuelle, n'a pas à intervenir, *pour que l'on puisse, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales, obtenir quelqu'une des intégrales*, en nombre infini, *de l'équation* (25) *qui satisfont à la première des deux conditions* (26), *il suffit que, moyennant un choix convenable de* $\varepsilon (= \pm 1)$, *le système* (Γ) *soit la conséquence algébrique d'un système linéaire et homogène passif du premier ordre composé de quatre équations et résolu par rapport aux quatre dérivées* $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial q}$.

Soit, en effet,

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \mathrm{U}_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \mathrm{U}_2\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = \mathrm{U}_3\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial q} = \mathrm{U}_4\dfrac{\partial\Phi}{\partial p} \end{cases}$$

le système passif dont il s'agit ; par le changement de variables

$$\mathrm{X} = x,\quad \mathrm{Y} = y,\quad \mathrm{Z} = z - \alpha(y),\quad \mathrm{P} = p,\quad \mathrm{Q} = q - \alpha'(y),$$

il devient

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial X} = U_1 \dfrac{\partial\Phi}{\partial P}, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial Y} - \alpha'(Y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z} - \alpha''(Y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial Q} = U_2 \dfrac{\partial\Phi}{\partial P}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial Z} = U_3 \dfrac{\partial\Phi}{\partial P}, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial Q} = U_4 \dfrac{\partial\Phi}{\partial P}, \end{cases}$$

et ce dernier, nécessairement passif (n° 7), est d'ailleurs résoluble par rapport à $\dfrac{\partial\Phi}{\partial X}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial Z}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial Q}$.

Pour que le système (Γ) admette quelque intégrale satisfaisant à la restriction formulée au n° 10 (*in fine*) relativement à l'intégration *incomplète* de (25), il suffit qu'il en soit de même pour le système (37) dont il est la conséquence algébrique, ou, ce qui revient au même, que le système (38), transformé de (37), admette quelque intégrale, Φ, telle que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial P}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; or, on obtient une pareille intégrale en choisissant convenablement sa détermination initiale, fonction de la seule variable P; cette recherche se ramène d'ailleurs à l'intégration d'un système passif d'équations différentielles totales.

16. Exemples. — I. Si l'on considère l'équation.

$$r + 2as + bt + K(z, p, q) = 0$$
$$[a,\ b \text{ constantes},\ a^2 - b \neq 0],$$

il suffit, pour que l'intégration incomplète en soit possible, que la fonction $K(z, p, q)$ soit de la forme

$$[p + (a - \sqrt{a^2 - b})\, q] \times F[z,\ p + (a + \sqrt{a^2 - b})\, q],$$

la détermination du radical $\sqrt{a^2 - b}$ étant choisie arbitrairement. On a, en effet, $\Sigma = a - \sqrt{a^2 - b}$, et, en posant

$$a + \sqrt{a^2 - b} = \Omega,$$

le système (32) devient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial q} = \Omega \dfrac{\partial\Phi}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\Sigma \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - (p + \Sigma q)\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + K \dfrac{\partial\Phi}{\partial p}; \end{cases}$$

ce dernier est d'ailleurs la conséquence algébrique du suivant :

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \Omega \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{K}{p + \Sigma q} \frac{\partial \Phi}{\partial p}. \end{aligned} \right.$$

Or, en posant

$$\frac{K(z, p, q)}{p + \Sigma q} = J(z, p, q) \text{ (}^1\text{)},$$

le calcul des conditions de passivité du système (39) conduit à la relation unique

$$\left(\frac{\partial J}{\partial q} - \Omega \frac{\partial J}{\partial p}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0;$$

laquelle est identiquement vérifiée si la fonction J est de la forme $F(z, p + \Omega q)$, c'est-à-dire si la fonction K est de la forme $(p + \Sigma q) F(z, p + \Omega q)$.

16. On peut toujours effectuer l'intégration incomplète de l'équation

$$r + 2A(x, y, z, p, q)s + C(x) = 0.$$

L'équation (31) se réduit en effet, dans ce cas, à $\Sigma^2 - 2A\Sigma = 0$; en prenant pour Σ la valeur $2A$, le système (32) devient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2A \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (p + 2Aq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - C \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0;$$

ce dernier est d'ailleurs la conséquence algébrique du suivant,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = C(x) \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0,$$

dont on constate immédiatement la passivité.

ÉQUATION LINÉAIRE EN $rt - s^2$, r, s, t.

17. Considérons l'équation

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} &rt - s^2 + A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s \\ &\qquad + C(x, y, z, p, q)t + D(x, y, z, p, q) = 0, \end{aligned} \right.$$

et soit $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ un système de valeurs numériques fon-

---

(1) On doit supposer $p_0 + \Sigma q_0$ différent de zéro.

damentales de x, y, z, p, q remplissant la double condition : 1° que les quatre fonctions analytiques A, B, C, D y soient régulières; 2° que l'expression $B^2 - AC + D$ ne s'y annule pas, à moins qu'elle ne soit identiquement nulle en x, y, z, p, q. Soient, en outre, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ deux fonctions analytiques de y régulières au point y_0, et telles : 1° que $\alpha(y_0)$, $\beta(y_0)$, $\alpha'(y_0)$ soient respectivement égaux à z_0, p_0, q_0; 2° que la somme

$$\alpha''(y_0) + A(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$$

soit différente de zéro, et que, par suite, l'équation (40) soit résoluble par rapport à r. On se propose d'établir une condition suffisante pour que l'intégration de l'équation (40) avec les conditions initiales

$$(41) \qquad \begin{cases} z = \alpha(y) \\ p = \beta(y) \end{cases} \quad \text{pour } x = x_0$$

se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales; ou, à défaut de cette intégration *complète*, une condition suffisante pour que, par les mêmes moyens, une intégration *incomplète* soit possible et fournisse quelque intégrale de (40) satisfaisant à la première des conditions (41).

A cet effet, considérons, en même temps que l'équation donnée (40), du second ordre, l'équation du premier ordre

$$(42) \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

impliquant, comme (40), l'inconnue z : son premier membre est une fonction analytique, provisoirement indéterminée, de x, y, z, p, q, régulière au point $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, et, de plus, afin que l'équation (42) puisse être résolue par rapport à p, assujettie à la restriction que $\frac{\partial\Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro.

En différentiant l'équation (42) tour à tour par rapport à x et par rapport à y conformément à l'algorithme des fonctions composées, nous aurons

$$(43) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + p\frac{\partial\Phi}{\partial z} + r\frac{\partial\Phi}{\partial p} + s\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0,$$

$$(44) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} + q\frac{\partial\Phi}{\partial z} + s\frac{\partial\Phi}{\partial p} + t\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0;$$

multipliant ensuite l'équation (43) par t, l'équation (44) par $-s$, et ajoutant membre à membre, il viendra

$$(45)\qquad (rt-s^2)\frac{\partial\Phi}{\partial p}-s\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+t\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0;$$

désignant enfin par $\Sigma(x, y, z, p, q)$ une deuxième fonction analytique, provisoirement indéterminée de x, y, z, p, q, et multipliant les équations (43), (44), (45) respectivement par $A(x, y, z, p, q)$, $\Sigma(x, y, z, p, q)$, 1, nous aurons, après addition, membre à membre,

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial p}(rt-s^2+Ar)+\left(\Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial p}+A\frac{\partial\Phi}{\partial q}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}-q\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)s\\ &\qquad+\left(\Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial q}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)t\\ &\qquad+A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+\Sigma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Si les fonctions indéterminées Φ, Σ peuvent, sous la restriction indiquée plus haut pour Φ, être choisies de telle façon que l'équation (46) devienne identique à l'équation (40), cette dernière sera, au point de vue de l'intégration, une conséquence nécessaire de l'équation (42), et l'intégrale particulière de (42) qui répond à la condition initiale

$$z=\alpha(y)\qquad\text{pour } x=x_0$$

sera l'une des intégrales (en nombre infini) de l'équation (40) qui remplissent la première des conditions (41). Si, de plus, la fonction Φ satisfait, quel que soit y, à l'identité

$$\Phi[x_0, y, \alpha(y), \beta(y), \alpha'(y)]=0,$$

l'intégrale considérée de (42) satisfera manifestement aussi à la condition

$$p=\beta(y)\quad\text{pour } x=x_0,$$

et sera, dès lors, l'intégrale de (40) qui répond à l'ensemble des conditions (41).

Cherchons donc, si possible, en vue de l'intégration complète de (40) un couple de fonctions, Σ, Φ, tel :

1° Que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro, et que l'équation (46) soit identique à l'équation (40);

2° Que Φ s'annule, quel que soit y, dans l'hypothèse

$$x = x_0, \quad z = \alpha(y), \quad p = \beta(y), \quad q = \alpha'(y).$$

18. En exprimant que l'équation (46) est identique à l'équation (40), nous aurons, entre les fonctions indéterminées Σ, Φ et les fonctions connues A, B, C, D, les relations

$$(47) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \dfrac{\partial \Phi}{\partial p} + A \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} - \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + q \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 2 B \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}, \\ \Sigma \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + p \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = C \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}, \end{array} \right.$$

$$A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \Sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = D \frac{\partial \Phi}{\partial p};$$

la dernière devient, en vertu des deux précédentes,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} (\Sigma^2 - 2 B \Sigma + A C - D) = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$, dont la valeur fondamentale est assujettie à être différente de zéro,

$$(48) \qquad \Sigma^2 - 2 B \Sigma + A C - D = 0.$$

En posant $\varepsilon = \pm 1$, et désignant par $\mathfrak{T}$ l'une des deux déterminations opposées, arbitrairement choisie une fois pour toutes, du radical $\sqrt{B^2 - AC + D}$, on tire de l'équation (48)

$$\Sigma = B + \varepsilon \mathfrak{T};$$

cette valeur de Σ est une fonction de x, y, z, p, q régulière au point $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, puisque, en vertu de nos hypothèses, l'expression qui figure sous le radical est, ou identiquement nulle, ou pourvue d'une valeur fondamentale différente de zéro. En supposant, dans les équations d'identification de (40) avec (46), Σ remplacé par sa valeur, il reste, pour déterminer la fonction inconnue Φ des cinq variables indépendantes x, y, z, p, q, le système des deux équations (47), linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières de Φ, et dont tous les coefficients sont fonctions connues des cinq variables : nous le désignerons par (Γ *bis*).

Pour que la considération du système (Γ *bis*) puisse conduire à l'intégration complète de l'équation (40), il faudra que, moyennant un choix convenable de $\varepsilon (= \pm 1)$, il admette quelque intégrale, Φ, satisfaisant à la double condition : 1° que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; 2° que Φ s'annule, quel que soit y, dans l'hypothèse

$$x = x_0, \quad z = \alpha(y), \quad p = \beta(y), \quad q = \alpha'(y).$$

Pour que, à défaut de l'intégration complète, la considération du système (Γ *bis*) puisse conduire à une intégration incomplète, il faudra que, moyennant un choix convenable de ε, il admette quelque intégrale, Φ, telle que $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro.

Cela posé, nous établirons tour à tour trois propositions, *A bis*, *B bis*, *C bis*, ayant pour objet l'intégration, complète ou incomplète, dont il s'agit.

19. Proposition *A bis*. — *Pour que l'intégration de l'équation* (40) *avec les conditions initiales* (41) *se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales, il suffit que, moyennant un choix convenable de* $\varepsilon (= \pm 1)$, *le système linéaire et homogène du premier ordre* (Γ *bis*) [obtenu, comme il a été dit, en remplaçant, dans (47), Σ par sa valeur tirée de (48)] *soit passif.*

Effectivement, par le changement de variables

$$(49) \quad \begin{cases} X = x, \quad Y = y, \quad Z = z - \alpha(y), \\ P = p - \beta(y), \quad Q = q - \alpha'(y), \end{cases}$$

le système (Γ *bis*) devient

$$(50) \quad \begin{cases} [\Sigma - 2B + \beta'(Y)] \dfrac{\partial \Phi}{\partial P} + [A + \alpha''(Y)] \dfrac{\partial \Phi}{\partial Q} \\ \qquad\qquad - Q \dfrac{\partial \Phi}{\partial Z} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial X} - C \dfrac{\partial \Phi}{\partial P} + \Sigma \dfrac{\partial \Phi}{\partial Q} + [P + \beta(Y)] \dfrac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0, \end{cases}$$

et la question est alors de savoir si le transformé (50) admet quelque intégrale, Φ, satisfaisant à la double condition : 1° que $\frac{\partial\Phi}{\partial P}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; 2° que Φ s'annule, quel que soit Y, dans l'hypothèse

$$X = x_0,\quad Z = 0,\quad P = 0,\quad Q = 0.$$

Or, la passivité supposée du système (Γ *bis*) entraîne celle du système transformé (50) [n° 7], et ce dernier, à cause de la restriction numérique $A_0 + \alpha''(y_0) \neq 0$, à laquelle satisfont les valeurs fondamentales de $\alpha''(Y)$ et du coefficient A, est résoluble par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial X}, \frac{\partial\Phi}{\partial Q}$: le système (50) admet donc, en vertu de la proposition auxiliaire du n° 8 [1], quelque intégrale satisfaisant à la double condition voulue.

20. Proposition *B bis*. — Le système (Γ *bis*) étant supposé non passif, *pour que l'intégration de l'équation* (40) *avec les conditions initiales* (41) *se ramène à l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales, il suffit que, moyennant un choix convenable de* $\varepsilon (= \pm 1)$, *le système* (Γ *bis*) *soit la conséquence algébrique d'un système linéaire et homogène passif du premier ordre composé de trois équations, et tel, qu'en y opérant le changement de variables* (49), *le système transformé soit résoluble par rapport à* $\frac{\partial\Phi}{\partial X}, \frac{\partial\Phi}{\partial Z}, \frac{\partial\Phi}{\partial Q}$.

Effectivement, pour que le système (Γ *bis*) admette quelque intégrale remplissant la double condition formulée au n° 18 (*in fine*) relativement à l'intégration *complète* de (40), il suffit qu'il en soit de même pour le système passif de trois équations dont (Γ *bis*) est la conséquence algébrique : or, le système transformé de ce dernier par le changement de variables (49) est passif comme lui, et, puisqu'on le suppose résoluble par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial Z}, \frac{\partial\Phi}{\partial Q}$, il admet, en vertu de la proposition auxiliaire du n° 8 [1],

[1] *Voir* la note du n° 11.

quelque intégrale, Φ, remplissant la double condition : 1° que $\frac{\partial\Phi}{\partial P}$ ait une valeur fondamentale différente de zéro; 2° que Φ s'annule, quel que soit Y, dans l'hypothèse

$$X = x_0, \quad Z = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

21. Exemples. — I. Les coefficients A, B, C, D de l'équation (40) étant supposés ne dépendre que de x et de y, et par suite aussi la valeur de Σ tirée de (48), on trouve, pour la condition de passivité du système (Γ *bis*), la relation

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &2(\Sigma - B)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial\Sigma}{\partial x}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p} \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial\Sigma}{\partial y}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0. \end{aligned}\right.$$

En vertu de la proposition *A bis*, l'intégration complète de l'équation (40) est donc possible, si l'on a à la fois, quels que soient x et y,

$$\Sigma = B, \quad \frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial\Sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial\Sigma}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire

$$B^2 - AC + D = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = 0.$$

II. Dans le cas où A, B, C, D se réduisent à de simples constantes a, b, c, d, l'intégration complète de l'équation (40) est possible pour toutes valeurs de ces constantes. Si l'on pose, en effet, $\varepsilon = \pm 1$, et que l'on désigne par ρ l'une des deux valeurs opposées, choisie à volonté, du radical numérique $\sqrt{b^2 - ac + d}$, l'équation (48) donne $\Sigma = b + \varepsilon\rho$, et la relation (51) devient $\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$.

Si $b^2 - ac + d$ est nul, d'où $\rho = 0$, la condition de passivité du système (Γ *bis*) est identiquement vérifiée et la proposition *A bis* est applicable.

Si $b^2 - ac + d$ est différent de zéro, on considérera le système des trois équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= c\frac{\partial\Phi}{\partial p} - (b + \varepsilon\rho)\frac{\partial\Phi}{\partial q}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= (\varepsilon\rho - b)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + a\frac{\partial\Phi}{\partial q}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Ce dernier a pour conséquence algébrique le système (Γ *bis*); il est d'ailleurs passif, et, en y opérant le changement de variables (49), il devient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial X} - c\frac{\partial\Phi}{\partial P} + (b + \varepsilon\rho)\frac{\partial\Phi}{\partial Q} = 0,\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial Y} + [b + \varepsilon\rho - \beta'(Y)]\frac{\partial\Phi}{\partial P} - [a + \alpha''(Y)]\frac{\partial\Phi}{\partial Q} = 0,\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial Z} = 0;
\end{aligned}$$

comme on doit avoir (n° 17) l'inégalité numérique

$$a + \alpha''(y_0) \neq 0,$$

le système transformé est résoluble par rapport à $\frac{\partial\Phi}{\partial X}, \frac{\partial\Phi}{\partial Z}, \frac{\partial\Phi}{\partial Q}$, et la proposition *B bis* est applicable.

III. Considérons l'équation

$$rt - s^2 - zr + p^2 = 0;$$

on a, dans le cas actuel, $A = -z$, $B = 0$, $C = 0$, $D = p^2$, $\Sigma = \varepsilon p$, ce qui donne, pour le système (Γ *bis*),

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -p\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \varepsilon p\frac{\partial\Phi}{\partial q},\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -q\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \varepsilon p\frac{\partial\Phi}{\partial p}.
\end{aligned}$$

En calculant la condition de passivité, on trouve

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0;$$

et, comme cette relation n'est pas identiquement vérifiée, on est conduit à l'adjoindre au système (Γ *bis*) et à considérer les trois équations simultanées

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (\varepsilon q - z)\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \varepsilon p\frac{\partial\Phi}{\partial p},\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial q}.
\end{aligned}$$

Ce dernier système a pour conséquence algébrique (Γ *bis*); il est d'ailleurs passif, et, en y opérant le changement de variables (49), il devient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} - \alpha'(Y)\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + [Z - \varepsilon Q - \alpha(Y) - \varepsilon\alpha'(Y) - \alpha''(Y) + \beta'(Y)]\frac{\partial \Phi}{\partial Q}$$
$$- [\varepsilon P - \varepsilon\beta(Y) + \beta'(Y)]\frac{\partial \Phi}{\partial P} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} + \varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = 0;$$

comme on doit avoir l'inégalité numérique $- z_0 + \alpha''(y_0) \neq 0$, c'est-à-dire $\alpha''(y_0) - \alpha y_0) \neq 0$, le système transformé est résoluble par rapport à $\frac{\partial \Phi}{\partial X}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial Z}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial Q}$, et la proposition *B bis* est applicable.

22. Proposition *C bis.* — Les mêmes choses étant posées qu'au début du n° **17**, sauf en ce qui concerne la fonction $\beta(y)$, qui, dans la proposition actuelle, n'a pas à intervenir, *pour que l'on puisse, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires ou totales, obtenir quelqu'une des intégrales*, en nombre infini, *de l'équation* (40) *qui satisfont à la première des conditions* (41), *il suffit que, moyennant un choix convenable de* $\varepsilon (= \pm 1)$, *le système* (Γ *bis*) *soit la conséquence algébrique d'un système linéaire et homogène passif du premier ordre composé de quatre équations, et résolu par rapport aux quatre dérivées* $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial q}$.

On répétera, *mutatis mutandis*, la démonstration du n° **15**.

23. Exemples. — I. Supposons que les coefficients A, B, C, D de l'équation (40) ne dépendent que de x et de y, et que, moyennant un choix convenable de ε, ils vérifient l'identité

$$(52) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\sqrt{B^2 - AC + D}\right) = 0$$

(c'est ce qui a lieu, notamment, quel que soit ε, si l'on a à la fois $\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$, $B^2 - AC + D = 0$). Le système des quatre équations

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = C\frac{\partial\Phi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = (\Sigma - 2B)\frac{\partial\Phi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

a pour conséquence algébrique le système (Γ *bis*); il est d'ailleurs passif en vertu de l'identité (52): la proposition *C bis* est donc applicable.

II. Considérons l'équation

$$rt - s^2 + A(x, y, z, p, q)r + H^2(p) = 0:$$

l'équation (48) donne, dans le cas actuel,

$$\Sigma = \varepsilon H(p) \qquad [\varepsilon = \pm 1],$$

et le système (Γ *bis* devient

$$\varepsilon H\frac{\partial\Phi}{\partial p} + A\frac{\partial\Phi}{\partial q} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} - q\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,$$
$$\varepsilon H\frac{\partial\Phi}{\partial q} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + p\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

Or, le système des quatre équations

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \varepsilon H\frac{\partial\Phi}{\partial p}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

est passif et a pour conséquence algébrique le précédent : la proposition *C bis* est donc applicable.

III. Considérons l'équation

$$rt - s^2 + A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s = 0;$$

l'équation (48) devient, dans le cas actuel, $\Sigma^2 - 2B\Sigma = 0$; en choisissant pour Σ la valeur $2B$, on a, pour le système (Γ *bis*),

$$A\frac{\partial\Phi}{\partial q} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + q\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + p\frac{\partial\Phi}{\partial z} + 2B\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0.$$

Or, le système des quatre équations $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$ est passif et a pour conséquence algébrique le précédent ; la proposition *C bis* est donc applicable.

ÉQUATION LINÉAIRE EN r, s, t DANS LE CAS OU LES COEFFICIENTS DE CES TROIS DÉRIVÉES SECONDES NE DÉPENDENT QUE DES VARIABLES x, y.

24. Les fonctions $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$, $f(x, y, z, p, q)$ étant supposées analytiques, on considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$A(x, y)r + 2B(x, y)s + C(x, y)t = f(x, y, z, p, q). \tag{53}$$

Si l'expression $AC - B^2$ *est différente de zéro, l'équation* (53) *peut être intégrée complètement, c'est-à-dire avec deux fonctions arbitraires d'une seule variable; si* $AC - B^2$ *est identiquement nul, l'équation* (53) *peut être intégrée incomplètement, c'est-à-dire avec une seule fonction arbitraire.*

I. Nous avons formulé plus haut diverses règles, assurant, pour des types variés de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, la possibilité d'une intégration *complète* ou *incomplète;* l'une de ces règles, relative à l'intégration incomplète, s'applique, notamment, à l'équation

$$r + 2A(x, y, z, p, q)s + C(x) = 0 \tag{54}$$

(n° 16, II), qui joue un rôle essentiel dans la question suivante :

Déterminer la fonction $\mu(\alpha)$ du paramètre α et la fonction $\lambda(x, \alpha)$ par la condition que les surfaces cylindriques

$$z = \alpha y + \lambda(x, \alpha) + \mu(\alpha) \tag{55}$$

aient pour enveloppe une surface intégrale de l'équation

$$s = f(x, y, z, q).$$

Considérons à cet effet les fonctions z, q de x, y définies par le couple des relations

$$z = qy + \lambda(x, q) + \mu(q), \tag{56}$$

$$0 = y + \frac{\partial\lambda}{\partial q} + \mu'(q), \tag{57}$$

où les fonctions $\lambda(x, q)$, $\mu(q)$ sont quelconques, sous la seule restriction que l'équation (57) puisse être résolue par rapport à q conformément au principe général des fonctions implicites; on tire de (56) par une différentiation relative à y,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q + \left[y + \frac{\partial \lambda}{\partial q} + \mu'(q)\right]\frac{\partial q}{\partial y},$$

d'où, en tenant compte de (57), $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Pour exprimer que les fonctions z, q, définies par (56) et (57), vérifient l'équation

$$s = f(x, y, z, q),$$

il suffit d'éliminer $\frac{\partial q}{\partial x}$ entre les deux relations

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f(x, y, z, q), \qquad 0 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q\, \partial x} + \left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} + \mu''(q)\right]\frac{\partial q}{\partial x},$$

dont la seconde se déduit de (57) par une différentiation relative à x; la relation résultante,

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} + \frac{1}{f(x, y, z, q)}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial x} + \mu''(q) = 0$$

devra, après substitution à z, q de leurs valeurs tirées de (56) et (57), être satisfaite quels que soient x et y; ou, ce qui revient au même, elle devra, après substitution à y, z de leurs valeurs tirées des mêmes équations, être satisfaite quels que soient x et q; il vient ainsi

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} + \frac{1}{f\left\{x, -\left[\frac{\partial \lambda}{\partial q} + \mu'(q)\right], -q\left[\frac{\partial \lambda}{\partial q} + \mu'(q)\right] + \lambda(x, q) + \mu(q) \cdot q\right\}}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial x} + \mu''(q) = 0.$$

Si, dans cette dernière relation, on suppose connue la fonction $\mu(q)$, elle devient $\left(\text{le coefficient de } \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q\, \partial x} \text{ étant lui-même une fonction connue de } q, x, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial q}\right)$ une équation aux dérivées partielles

$$(58) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} + 2\, \mathrm{G}\left(q, x, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial x} + \mu''(q) = 0,$$

impliquant la fonction inconnue λ des variables indépendantes q, x. Or, l'équation (58) est de même forme que l'équation (54), où les notations

$$x,\quad y,\quad z,\quad p,\quad q,\quad r,\quad s$$

se trouveraient remplacées par les notations respectives

$$q,\quad x,\quad \lambda,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial q},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2},\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial q\,\partial x}$$

En conséquence :

La fonction $\mu(q)$ étant choisie arbitrairement, on pourra, en vue de l'intégration incomplète de l'équation (58), former une équation du premier ordre, impliquant comme celle-ci la fonction inconnue λ des variables indépendantes q, x et dont l'équation (58) soit, au point de vue de l'intégration, une conséquence nécessaire; cette équation du premier ordre, résoluble par rapport à $\frac{\partial\lambda}{\partial q}$, sera ensuite intégrée avec la condition initiale, arbitrairement choisie,

$$\lambda = \rho(x) \quad \text{pour } q = \text{une valeur numérique donnée.}$$

La fonction résultante, $\lambda(x, q)$, qui vérifie l'équation (58), se trouvera ainsi dépendre :

1° Du choix de la fonction arbitraire $\mu(q)$;

2° La fonction $\mu(q)$ étant fixée, du choix de la fonction arbitraire $\rho(x)$.

Et il en sera de même pour la fonction z des variables x, y définie, conjointement avec q, par les relations (56) et (57).

II. Une autre règle formulée plus haut, et relative également à l'intégration incomplète, s'applique, notamment, à l'équation

$$(59)\qquad rt - s^2 + \mathrm{A}(x, y, z, p, q)\,r + 2\mathrm{B}(x, y, z, p, q)\,s = 0$$

(n° 23, III), qui joue un rôle essentiel dans la question suivante :

Déterminer la fonction $\mu(\alpha)$ du paramètre α et la fonction $\lambda(\beta, \alpha)$ des paramètres β, α par la condition que le plan mobile

$$(60)\qquad z = \alpha y + \beta x + \lambda(\beta, \alpha) + \mu(\alpha)$$

ait pour enveloppe une surface intégrale de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

Considérons à cet effet les fonctions z, p, q de x, y définies par le système des relations

$$z = qy + px + \lambda(p, q) + \mu(q), \tag{61}$$

$$o = y + \frac{\partial\lambda}{\partial q} + \mu'(q), \tag{62}$$

$$o = x + \frac{\partial\lambda}{\partial p}, \tag{63}$$

où les fonctions $\lambda(p, q)$ et $\mu(q)$ sont quelconques, sous la seule restriction que les relations (62) et (63) puissent être résolues par rapport à p et q conformément au principe général des fonctions implicites; on tire de (61), par différentiations,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + \left[x + \frac{\partial\lambda}{\partial p}\right]\frac{\partial p}{\partial x} + \left[y + \frac{\partial\lambda}{\partial q} + \mu'(q)\right]\frac{\partial q}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = q + \left[x + \frac{\partial\lambda}{\partial p}\right]\frac{\partial p}{\partial y} + \left[y + \frac{\partial\lambda}{\partial q} + \mu'(q)\right]\frac{\partial q}{\partial y},$$

d'où, en tenant compte de (62) et (63),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Pour exprimer que la fonction z et ses deux dérivées premières p, q, définies par (61), (62) et (63), vérifient l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

ou

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f(x, y, z, p, q), \tag{64}$$

il suffit de former, en appliquant la règle des fonctions implicites, les équations qui fournissent $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$, savoir :

$$o = \frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2} + \mu''(q)\right]\frac{\partial q}{\partial x}, \tag{65}$$

$$o = 1 + \frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}, \tag{66}$$

puis d'éliminer $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial x}$ entre les trois équations (64), (65), (66), ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -f \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} + \mu''(q) & 0 \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière relation devra, après substitution à z, p, q de leurs valeurs tirées de (61), (62), (63), être satisfaite quels que soient x et y; ou, ce qui revient au même, elle devra, après substitution à x, y, z de leurs valeurs tirées des mêmes équations, être satisfaite quels que soient p et q; cette substitution n'affecte d'ailleurs que la quantité $f(x, y, z, p, q)$. Si, dans la relation qui en résulte, on suppose connue la fonction $\mu(q)$, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(67) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q}\right)^2 + \mu''(q)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + G\left(p, q, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial p}, \frac{\partial \lambda}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q} = 0,$$

impliquant la fonction inconnue λ des variables indépendantes p, q, et où G désigne une composante connue. Or, l'équation (67) est de même forme que l'équation (59), où x, y, z, p, q, r, s, t, A, B se trouveraient remplacés respectivement par p, q, λ, $\frac{\partial \lambda}{\partial p}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial q}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2}$, $\mu''(q)$, G.

En conséquence :

La fonction $\mu(q)$ étant choisie arbitrairement, on pourra, en vue de l'intégration incomplète de l'équation (67), former une équation du premier ordre impliquant comme elle la fonction inconnue λ des variables indépendantes p, q, et dont l'équation (67) soit, au point de vue de l'intégration, une conséquence nécessaire: cette équation du premier ordre, résoluble par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial p}$, sera ensuite intégrée avec la condition initiale, arbitrairement choisie,

$$\lambda = \rho(q) \qquad \textbf{pour } p = \textbf{une valeur numérique donnée.}$$

La fonction résultante $\lambda(p, q)$, qui vérifie l'équation (67), se trouvera ainsi dépendre :

1° Du choix de la fonction arbitraire $\mu(q)$;
2° La fonction $\mu(q)$ étant fixée, du choix de la fonction arbitraire $\rho(q)$.

Et il en sera de même pour la fonction z des variables x, y définie, conjointement avec p et q, par les relations (61), (62) et (63).

III. *L'équation*

$$r = \mathrm{H}(x, y, z, p, q) \tag{68}$$

peut être intégrée incomplètement.

Considérons une fonction z de x, y définie, conjointement avec ses deux dérivées premières p, q, par le système des relations

$$z = qy + px + \lambda(p, q) + aq + b, \tag{69}$$

$$0 = y + \frac{\partial\lambda}{\partial q} + a, \tag{70}$$

$$0 = x + \frac{\partial\lambda}{\partial p}, \tag{71}$$

où la fonction $\lambda(p, q)$ et les constantes a, b sont quelconques, sous la seule restriction que les relations (70) et (71) puissent être résolues par rapport à p et q conformément au principe général des fonctions implicites. Pour exprimer que la fonction z et ses deux dérivées premières p, q vérifient l'équation

$$r = \mathrm{H}(x, y, z, p, q);$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{H}(x, y, z, p, q), \tag{72}$$

il suffit de calculer par la règle des fonctions implicites la valeur de $\frac{\partial p}{\partial x}$, et de la porter dans l'équation (72), ce qui donne

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\partial q}\right)^2 + \frac{1}{\mathrm{H}(x, y, z, p, q)}\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2} = 0.$$

Cette dernière relation devra, après substitution à z, p, q de leurs valeurs tirées de (69), (70), (71), être satisfaite quels que soient x et y; ou, ce qui revient au même, elle devra, après substitution à x, y, z de leurs valeurs tirées des mêmes équations, être satisfaite quels que soient p et q. Si, dans la relation résultante, on suppose connues les constantes a et b, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(73) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q}\right)^2 + K\left(p, q, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial p}, \frac{\partial \lambda}{\partial q}\right)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} = 0,$$

impliquant la fonction inconnue λ des variables indépendantes p, q, et où K désigne une composante connue. Or, l'équation (73) est de même forme que l'équation

$$(74) \qquad rt - s^2 + M(x, y, z, p, q)r = 0,$$

où x, y, z, p, q, r, s, t, M se trouveraient remplacées respectivement par q, p, λ $\frac{\partial \lambda}{\lambda q}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial p}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial p}$, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}$, K; d'ailleurs, ainsi que nous l'avons fait observer plus haut (n° **23**, II), l'équation (74) peut être intégrée incomplètement.

En conséquence, les constantes a et b étant choisies arbitrairement, on pourra, en vue de l'intégration incomplète de l'équation (73), former une équation du premier ordre, impliquant, comme elle, la fonction inconnue λ des variables indépendantes p, q, et dont l'équation (73) soit, au point de vue de l'intégration, une conséquence nécessaire; cette équation du premier ordre, résoluble par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial q}$, sera ensuite intégrée avec la condition initiale, arbitrairement choisie,

$$\lambda = \rho(q) \qquad \text{pour } q = \text{une valeur numérique donnée.}$$

La fonction résultante $\lambda(p, q)$, qui vérifie l'équation (73), se trouvera ainsi dépendre : 1° du choix des constantes arbitraires a, b; 2° les constantes a, b étant fixées, du choix de la fonction arbitraire $\rho(p)$. Et il en sera de même pour la fonction z des variables x, y définie, conjointement avec p et q, par les relations (69), (70), (71).

IV. Revenons à notre énoncé général, relatif à l'équation (53).

La propriété qu'il formule résulte du simple rapprochement des trois faits suivants :

Premier fait. — *L'équation* $s = f(x, y, z, p, q)$ *peut être intégrée complètement* (I et II).

Deuxième fait. — *L'équation* $r = \mathrm{H}(x, y, z, p, q)$ *peut être intégrée incomplètement* (III).

Troisième fait. — A l'aide d'un changement de variables défini par des formules dont la construction n'exige que l'intégration d'équations différentielles ordinaires, *l'équation* (53) *peut être ramenée à la forme*

$$s = f(x, y, z, p, q) \tag{75}$$

si $AC - B^2$ *est différent de zéro et à la forme*

$$r = \mathrm{H}(x, y, z, p, q) \tag{76}$$

si $AC - B^2$ *est identiquement nul,*

Premier cas : $AC - B^2 \neq 0$. — Si A et C sont à la fois identiquement nuls, B est différent de zéro et l'équation (53) a d'elle-même la forme (75). Si quelqu'une des fonctions A et C, par exemple A, est différente de zéro, opérons sur l'équation (53) le changement de variables, provisoirement indéterminé,

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y),$$

et désignons par p', q', r', s', t' les nouvelles dérivées premières et secondes de l'inconnue z ; en écrivant que l'équation transformée ne contient ni r', ni t', on obtient deux relations qui assujettissent les rapports $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, $\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$ à vérifier l'équation quadratique

$$AU^2 + 2BU + C = 0 :$$

les racines de cette équation étant distinctes, on pourra assigner pour φ, ψ un couple de fonctions dont le déterminant différentiel soit différent de zéro.

Deuxième cas : $AC - B^2 = 0$ (identiquement). — Les deux fonctions A et C ne peuvent être à la fois identiquement nulles, car alors B le serait aussi; supposons, par exemple, $A \neq 0$. En écrivant que l'équation transformée de (53) ne contient ni s', ni t', on obtient les deux relations

$$A\left(\frac{\psi'_x}{\psi'_y}\right)^2 + 2B\frac{\psi'_x}{\psi'_y} + C = 0, \tag{77}$$

$$A\frac{\psi'_x}{\psi'_y}\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} + B\left(\frac{\psi'_x}{\psi'_y} + \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) + C = 0; \tag{78}$$

l'équation (77), quadratique en $\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$, admettant la racine unique $-\frac{B}{A}$, et celle-ci, transportée dans l'équation (78), la vérifiant identiquement, on pourra, comme dans le premier cas (et avec un degré de généralité plus grand), assigner pour φ, ψ un couple de fonctions dont le déterminant différentiel soit différent de zéro.