BULLETIN DE LA S. M. F.

E. TURRIÈRE

Sur les équations de Fermat

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 181-205
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__181_0>

SUR LES ÉQUATIONS DE FERMAT;

PAR M. E. TURRIÈRE.

Les équations de Fermat

$$y^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

de l'analyse indéterminée ont été l'objet de nombreuses études sur des cas particuliers. Des formules permettant de déduire une solution nouvelle d'une solution connue ont été données sous des formes variées mais équivalentes. Le principe est le même, les méthodes proposées n'étant que des applications plus ou moins déguisées de l'addition des fonctions elliptiques. Dans certaines circonstances, les fonctions elliptiques ont été appliquées directement à des problèmes de cette nature; mais une étude d'ensemble ne paraît pas avoir été présentée sous ce point de vue.

La présente étude est destinée à rassembler les résultats de l'application systématique des fonctions elliptiques, dans la représentation de Weierstrass, aux problèmes de l'analyse indéterminée du quatrième degré.

FORMULES GÉNÉRALES DE RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES.

1. *Formules générales.* — Les formules générales de réduction de l'équation du quatrième degré de Fermat aux fonctions elliptiques pu et $p'u$ présentent les plus grandes analogies avec celles de la réduction de l'intégrale elliptique à la forme canonique. Mais dans le cas actuel de l'arithmétique, les calculs doivent être conduits en nombres rationnels et, par suite de cette circonstance spéciale, certaines des formules de la théorie générale des fonctions elliptiques peuvent perdre tout intérêt pratique en arithmogéométrie.

Étant donnée l'équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2,$$

Fermat a fait connaître une méthode simple de résolution pour le cas où l'un des deux coefficients extrêmes A ou E est carré, c'est-à-dire lorsque l'équation admet la solution particulière $x = \infty$ ou $x = 0$. Ces deux cas sont immédiatement réductibles l'un à l'autre et, par suite, l'équation correspondante sera prise sous la forme

$$x^4 + 4\alpha x^3 + 6\beta x^2 + 4\gamma x + \delta = y^2.$$

La réduction à la fonction de Weierstrass s'effectue en posant :

$$y = x^2 + 2\alpha x + \beta - 2\mathrm{p},$$

et en écrivant que l'équation

$$4(\mathrm{p} + \beta - \alpha^2)x^2 + 4(2\alpha\mathrm{p} + \gamma - \alpha\beta)x + \delta - (2\mathrm{p} - \beta)^2 = 0$$

est résoluble rationnellement en x. Les formules sont ainsi :

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}' - 2\alpha\mathrm{p} + \alpha\beta - \gamma}{\mathrm{p} + \beta - \alpha^2}, \qquad \pm y = x^2 + 2\alpha x + \beta - 2\mathrm{p},$$

$$\mathrm{p}'^2 = 4\mathrm{p}^3 - g_2\mathrm{p} - g_3;$$

$$g_2 = \delta + 3\beta^2 - 4\alpha\gamma,$$

$$g_3 = (\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \delta) - (\alpha\beta - \gamma)^2 = \delta(\beta - \alpha^2) - \beta^3 + 2\alpha\beta\gamma - \gamma^2.$$

La solution correspondante à $x = \infty$, $y = \infty$ est

$$\mathrm{p}u_0 = \alpha^2 - \beta, \qquad \mathrm{p}'u_0 = 2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma.$$

La solution générale est alors

$$x + \alpha = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'u_0}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}u_0} = \zeta(u + u_0) - \zeta u - \zeta u_0,$$

$$y = (x + \alpha)^2 - \mathrm{p}u_0 - 2\mathrm{p}u = \mathrm{p}(u + u_0) - \mathrm{p}u.$$

Élucidons la question du double signe de y pour une même valeur de x. Soient u l'argument associé à une solution (x, y) et u_1 l'argument associé à la solution $(x, -y)$. Les formules

$$(x + \alpha)^2 = \mathrm{p}(u + u_0) + \mathrm{p}u + \mathrm{p}u_0,$$

$$y = \mathrm{p}(u + u_0) - \mathrm{p}u$$

prouvent que

$$\mathrm{p}(u + u_0) + \mathrm{p}u = \mathrm{p}(u_1 + u_0) + \mathrm{p}u_1,$$

$$\mathrm{p}(u + u_0) + \mathrm{p}(u_1 + u_0) = \mathrm{p}u + \mathrm{p}u_1;$$

d'où les conditions

$$p(u+u_0)=pu_1,\qquad p(u_1+u_0)=pu,$$

et par suite

$$u+u_1+u_0=\text{période}.$$

Réciproquement, si la somme $u+u_1+u_0$ est égale à une période, les relations

$$\zeta(u+u_0)-\zeta u=\zeta(u_1+u_0)-\zeta u_1,$$
$$p(u+u_0)+p(u_1+u_0)=pu+pu_1$$

sont identiquement vérifiées : les expressions de $x+\alpha$ et $x_1+\alpha$ sont identiques; celles de y et y_1 sont symétriques.

La méthode de l'*Inventum novum* de J. de Billy consiste à remarquer que l'identité

$$(x^2+2\alpha x+3\beta-2\alpha^2)^2=x^4+4\alpha x^3+6\beta x^2+4\alpha(3\beta-2\alpha^2)x+(3\beta-2\alpha^2)^2$$

fournit la solution

$$x=\frac{(2\alpha^2-3\beta)^2-\delta}{4(2\alpha^3-3\alpha\beta+\gamma)},\qquad y=(x+\alpha)^2+3(\beta-\alpha^2);$$

elle peut être rattachée à l'argument u_0, en remarquant qu'elle n'est autre que celle

$$x+\alpha=\frac{1}{2}\frac{p''u_0}{p'u_0},\qquad y=(x+\alpha)^2-3pu_0,$$
$$x+\alpha=\zeta(2u_0)-2\zeta u_0,\qquad y=\frac{1}{4}\left(\frac{p''u_0}{p'u_0}\right)^2-3pu_0=p(2u_0)-pu_0,$$

obtenue comme limite de la solution générale lorsque l'argument u tend vers l'argument u_0. Cette nouvelle solution

$$x+\alpha=\frac{1}{2}\frac{p''u_0}{p'u_0},$$
$$y=p(2u_0)-pu_0=\frac{-12p_0^4+6g_2p_0^2+12g_3p_0+\frac{1}{4}g_2^2}{4p_0'^2}$$

devra être retenue comme solution primitive.

Le principe de la méthode d'emploi des fonctions elliptiques repose sur la remarque que la somme des arguments de trois points alignés de la cubique de Weierstrass est nulle ou égale à une période

$$u'+u''+u'''=2m\omega+2n\omega';$$

la méthode qui consiste à faire correspondre à un point M de la cubique le nouveau point d'intersection de la courbe avec la tangente en M revient à déduire de toute solution d'argument u la solution $2u$.

Connaissant donc une solution primitive u, on formera les solutions $2u$, $3u$, ..., nu.

Connaissant deux solutions primitives u et v, on en déduira les solutions nouvelles $u \pm v$, $mu + nv$, par additions d'arguments.

Les formules à utiliser dans ces calculs seront les suivantes :

$$\begin{aligned}
p_{2u} &= \left(\frac{p''_u}{2p'_u}\right)^2 - 2p_u = \frac{(12p_u^2 - g_2)^2}{16p'^2_u} - 2pu, \\
&= \left(\frac{p_u^2 + \frac{1}{4}g_2}{p'_u}\right)^2 + 2g_3\frac{p_u}{p'^2_u}, \\
p'_{2u} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{p''_u}{p'_u}\right)^3 + 3p_u\frac{p''_u}{p'_u} - p'_u, \\
&= \frac{1}{p'^3_u}\Big[2p^6 - \frac{5}{2}g_2p^4 - 10g_3p^3 - \frac{5}{8}g_2^2p^2 \\
&\qquad - \frac{1}{2}g_2g_3p + \frac{1}{32}g_2^3 - g_3^2\Big], \\
p(u+v) &= \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 - pu - pv,
\end{aligned}$$

$p'(u+v)$ se calcule ensuite au moyen de la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & p(u+v) & -p'(u+v) \\ 1 & pu & p'u \\ 1 & pv & p'v \end{vmatrix} = 0.$$

Inversement, à toute équation cubique correspondent une infinité de polynomes de quatrième degré en x. Lorsque g_2, g_3, pu_0 et $p\,u_0$ sont imposés, la question est encore indéterminée; il existe une infinité de polynomes dépendant par exemple du coefficient α. Pour préciser, nous supposerons effectuée la suppression du terme du troisième degré en x. Alors les formules ($\alpha = 0$)

$$g_2 = \delta + 3\beta^2, \qquad g_3 = \beta(\delta - \beta^2) - \gamma^2,$$
$$p u_0 = -\beta, \qquad p' u_0 = \gamma$$

donnent inversement

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -pu_0, \qquad \gamma = p'u_0, \qquad \delta = g_2 - 3p_0^2;$$

et, par suite, l'équation correspondante de Fermat est la suivante :

$$\begin{aligned} y^2 &= x^4 - 6\,p u_0 . x^2 + 4\,p' u_0 x + g_2 - 3\,p u_0^2 \\ &= (x^2 - 3\,p u_0)^2 + 4\,x p' u_0 + g_2 - 12\,p u_0^2 \\ &= (x^2 - 3\,p u_0)^2 + 4\,x p' u_0 - 2\,p'' u_0 ; \end{aligned}$$

elle admet la solution évidente

$$x = \frac{p'' u_0}{2 p' u_0}, \qquad y = x^2 - 3\,p u_0.$$

Cette équation mise sous la forme

$$y^2 = (x^2 + \lambda\, p u_0)^2 - \varphi_2(x),$$

avec

$$\varphi_2(x) \equiv 2(\lambda + 3) p u_0 x^2 - 4\,p' u_0 x + (\lambda^2 + 3) p^2 u_0 - g_2,$$

admet pour solutions les racines en x de ce polynome du second degré $\varphi_2(x)$, lorsque celles-ci sont rationnelles ; ce qui donne la condition

$$(\lambda + 1) p u_0 = -2\,p u_1,$$

u_1 étant un nouvel argument ; on est ainsi conduit à la solution

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,\frac{p' u_1 - p' u_0}{p u_1 - p u_0}, \\ y &= x^2 - p u_0 - 2\,p u_1 ; \end{aligned}$$

cette méthode fournit donc la solution précédemment mise en lumière.

Dans le cas où u_0 est une demi-période ω_α, les formules se simplifient :

$$\beta = -\,p\,\omega_\alpha = -\,e_\alpha, \qquad \gamma = p'\omega_\alpha = 0 ;$$

le polynome du quatrième degré en x est alors bicarré et réciproquement. Les formules de résolution deviennent

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{p' u}{p u - e_\alpha}, \qquad y = x^2 - e_\alpha - 2\,p u.$$

C'est à cette équation avec polynome bicarré que se réduit le problème de la *double équation de Fermat*, constituée par une équation du premier degré en X et une équation du second degré en X

$$l\,X + m = U^2, \qquad X^2 + 2\,a X + A = V^2.$$

Par changement de variable X, ce système est réductible à la forme canonique

$$X = U^2, \qquad X^2 + 2aX + A = V^2.$$

et par suite à une équation de Fermat du type spécifié.

2. *Équations de Fermat possédant deux solutions connues.* — Lorsque l'équation générale de Fermat admet une solution connue, par un changement d'inconnue on pourra toujours rendre celle-ci infinie et par suite se ramener au cas de l'équation dans laquelle le coefficient du terme x^4 est l'unité. Lorsque deux solutions seront connues, par un changement d'inconnue on pourra les transformer en la solution infinie et la solution $x = 0$; c'est-à-dire rendre le coefficient δ carré parfait. Mais alors, dans l'hypothèse $\delta = \rho^2$, l'équation peut être résolue en cherchant une solution de la forme

$$y = \frac{1}{\rho}[(\beta - 2p)x^2 + 2\gamma x + \delta];$$

la solution est donnée par les formules

$$\frac{1}{x} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{2\rho}\,\frac{p'u - p'u_1}{pu - pu_1},$$

$$\rho y = \frac{(\gamma x + \delta)^2}{\delta} - (pu_1 + 2pu)x^2,$$

$$pu_1 = \frac{\gamma^2}{\delta} - \beta, \qquad p'u_1 = \frac{1}{\rho^3}(2\gamma^3 - 3\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2),$$

la fonction pu étant définie par la même équation cubique que précédemment.

Ainsi, dans le cas $\delta = \rho^2$, nous connaissons les solutions fondamentales $pu_0 = \alpha^2 - \beta$ et $pu_1 = \frac{\gamma^2}{\rho^2} - \beta$.

La méthode de J. de Billy donne alors les solutions

$$x_0 + \alpha = \frac{1}{2}\,\frac{p''u_0}{p'u_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{2\rho}\,\frac{p''u_1}{p'u_1}.$$

L'équation de Fermat admet aussi les solutions

$$x_2 + \alpha = \frac{1}{2}\,\frac{p'u_1 - p'u_0}{pu_1 - pu_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x_3} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{2\rho}\,\frac{p'u_1 - p'u_0}{pu_1 - pu_0},$$

ces deux dernières liées par la relation :

$$x_2 + \alpha = \rho\left(\frac{1}{x_3} + \frac{\gamma}{\delta}\right).$$

3. *Cas de trois racines rationnelles de* $p' = 0$. — Lorsque les trois racines de l'équation $p' u = 0$ sont réelles et rationnelles, il se présente des circonstances remarquables sous le point de vue arithmogéométrique. Soit alors

$$\begin{array}{lll} e_1 = p\omega_1, & e_2 = p\omega_2, & e_3 = p\omega_3, \\ p'\omega_1 = 0, & p'\omega_2 = 0, & p'\omega_3 = 0; \end{array}$$

les formules

$$p(u + \omega_1) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pu - e_1}, \qquad \ldots$$

définissent trois transformations homographiques permettant d'associer à toute solution u trois nouvelles solutions d'arguments respectifs $u + \omega_1$, $u + \omega_2$ et $u + \omega_3$. Ces quatre solutions s'échangent quand on applique les transformations à l'une quelconque d'entre elles. Elles fournissent par duplication d'argument la même valeur p_{2u}; celle-ci d'ailleurs est calculable immédiatement au moyen de l'identité

$$4 . p2u = pu + p(u + \omega_1) + p(u + \omega_2) + p(u + \omega_3);$$

ou encore

$$4 . p2u = pu + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pu - e_1} + \frac{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{pu - e_2} + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pu - e_3}.$$

LA DOUBLE ÉQUATION DE FERMAT. LE PROBLÈME DE BEHA-EDDIN.

4. Soit à résoudre le système de deux équations :

$$X^2 + 2aX + A = U^2, \qquad X^2 + 2bX + B = V^2.$$

La solution générale de la première de ces équations est donnée en fonction d'un nombre rationnel quelconque x par les formules

$$X = \frac{x^2 - A}{2(x + a)}, \qquad U = x - X = \frac{x^2 + 2ax + A}{2(x + a)};$$

la substitution de cette fonction X de x dans la seconde équation conduit à une équation du quatrième degré :

$$[2(x+a)V]^2 = x^4 + 4bx^3 + 2(2ab + 2B - A)x^2 + 4(aB - bA)x$$
$$+ A^2 + 4Ba^2 - 4abA,$$

avec les coefficients

$$\alpha = b, \qquad \beta = \frac{1}{3}(2ab + 2B - A),$$
$$\gamma = 2aB - bA, \qquad \delta = A^2 + 4Ba^2 - 4abA.$$

En partant de la seconde équation et portant sa solution générale dans la première, le problème dépendrait d'une équation équivalente mais différente de la précédente. Les équations ont les mêmes invariants :

$$\frac{3}{4}g_2 = A^2 - AB + B^2 + b(3b - 4a)A + a(3a - 4b)B + a^2b^2,$$

$$\frac{27}{4}g_3 = (A+B)(5AB - 2A^2 - 2B^2) + 3b(4a - 3b)A^2 + 3a(4b - 3a)B^2$$
$$- 3(3a^2 - 2ab + 3b^2)AB + 3ab^2(6b - 5a)A$$
$$+ 3ba^2(6a - 5b)B - 2a^3b^3.$$

Dans le cas le plus général, par un changement d'inconnue X, il sera toujours possible de ramener le système au cas $a + b = 0$; le problème ne dépend en fait que des seuls rapports $\frac{A}{a^2}$, $\frac{B}{a^2}$ et il est possible encore d'attribuer à a une valeur déterminée une fois pour toutes sans diminuer la généralité de la question. L'hypothèse $a + b = 0$ donne

$$\frac{3}{4}g_2 = A^2 - AB + B^2 + 7a^2(A+B) + a^4,$$

$$\frac{27}{4}g_3 = -(A+B)(2A^2 - 5AB + 2B^2) - 3a^2(7A^2 + 8AB + 7B^2)$$
$$- 33a^4(A+B) + 2a^6.$$

L'équation cubique $p'u = 0$ a toujours une racine rationnelle lorsqu'elle provient de la double équation de Fermat. Cette racine est

$$e = \frac{1}{3}(A + B - 2ab).$$

5. Introduisons dans ces expressions les discriminants D et D'

des trinomes du second degré en X, ainsi que leur résultant R ; posons :

$$D = a^2 - A, \qquad D' = b^2 - B,$$
$$R = (D - D')^2 - 2(D + D')(a - b)^2 + (a - b)^4 ;$$

posons aussi :

$$\sigma = D + D' - (a - b)^2 = 2ab - A - B,$$
$$R = \sigma^2 - 4\,DD'.$$

Les invariants de l'équation cubique prennent les formes suivantes :

$$\frac{3}{4} g_2 = \quad (D - D')^2 + DD' - 2(D + D')(a - b)^2 + (a - b)^4 ;$$
$$\frac{27}{4} g_3 = -(D + D')(2D - D')(2D' - D) - 3(a - b)^2(2D^2 + DD' + 2D'^2)$$
$$+ 6(a - b)^4(D + D') - 2(a - b)^6 ;$$
$$\frac{3}{4} g_2 = \quad \sigma^2 - 3DD' = R + DD' ;$$
$$\frac{27}{4} g_3 = \quad \sigma(2\sigma^2 - 9DD') ;$$
$$\Delta = \quad g_2^3 - 27 g_3^2 = 27\,R\,D^2 D'^2 ;$$
$$p'^2 = \quad 4\left(p + \frac{\sigma}{3}\right)\left[p^2 - \frac{\sigma}{3} p + DD' - \frac{2\sigma^2}{9}\right].$$

En outre,

$$p u_0 = \quad D' - \frac{\sigma}{3} ;$$
$$p' u_0 = \quad 2D'(b - a).$$

Il n'y a réduction des fonctions elliptiques que lorsque l'une des équations du double système est identiquement satisfaite (le trinome du second degré en X étant algébriquement carré parfait) ou lorsque les trinomes U^2 et V^2 ont une racine commune.

Par changement d'inconnue X, cette racine commune peut être prise égale à zéro. Le cas $R = o$ n'est donc autre que celui pour lequel A et B sont nuls simultanément quelles que soient d'ailleurs les valeurs de a et b.

6. Il vient alors ($A = o$, $B = o$) :

$$g_2 = \frac{4}{3} a^2 b^2, \qquad g_3 = -\frac{8}{27} a^3 b^3, \qquad \Delta = o,$$
$$p'^2 = 4\left(p - \frac{ab}{3}\right)^2\left(p + \frac{2}{3} ab\right).$$

C'est qu'alors l'équation résolvante de Fermat se réduit à

$$x^4 + 4bx^3 + 4abx^2 = [2V(x+a)]^2 = y,$$

et s'abaisse au second degré

$$x^2 + 4bx + 4ab = \square;$$

elle est donc résoluble par les formules

$$x = \frac{b\lambda^2 - a}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{b\lambda^2 - a}{(1+\lambda)^2}(b\lambda^2 + 2b\lambda + a),$$

dans lesquelles λ représente un nombre rationnel arbitraire. Les équations

$$X^2 + 2aX = U^2, \qquad X^2 + 2bX = V^2$$

sont *complètement* résolues par les formules suivantes :

$$X = \frac{1}{2}\frac{(b\lambda^2 - a)^2}{\lambda(1+\lambda)(a+b\lambda)},$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{(b\lambda^2 - a)}{\lambda(1+\lambda)(a+b\lambda)}(b\lambda^2 + 2a\lambda + a),$$

$$V = \frac{1}{2}\frac{b\lambda^2 - a}{\lambda(1+\lambda)(a+b\lambda)}(b\lambda^2 + 2b\lambda + a).$$

La cubique étant unicursale, on arriverait aux mêmes conclusions en posant

$$pu + \frac{2}{3}ab = \left(\frac{a+b\lambda}{1+\lambda}\right)^2;$$

$$pu_0 = b^2 - \frac{2}{3}ab, \qquad p'u_0 = 2b^2(b-a).$$

Lorsque $a + b = 0$, par changement de variables, on peut réduire le système des équations à celui pour lequel $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$:

$$X^2 + X = U^2, \qquad X^2 - X = V^2;$$

ces équations simultanées ont été considérées par Léonard de Pise dans son *Liber quadratorum*. Il suffit donc de poser

$$X = \frac{1}{4}\frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda(1-\lambda^2)},$$

avec λ rationnel et arbitraire pour résoudre *complètement* le système. Par exemple, $\lambda = -3$ donne $X = \frac{25}{24}$, $U = \frac{35}{24}$, $V = \frac{5}{24}$.

En posant d'ailleurs $X = \frac{1}{\xi}$, le système devient

$$1 + 2a\xi = \square, \qquad 1 + 2b\xi = \square,$$

et, sous cette forme simple, la question peut immédiatement être réduite à une équation indéterminée du second degré, résoluble complètement au moyen d'une fonction rationnelle d'un paramètre arbitraire (*voir* § **14**).

7. Le cas $A + B = 0$ (avec $a + b = 0$) réduit les expressions générales à

$$\frac{3}{4} g_2 = 3A^2 + a^4, \qquad \frac{27}{8} g_3 = a^2(a^4 - 9A^2).$$

Ce même cas peut être étudié suivant une méthode plus symétrique en mettant les équations proposées sous la forme suivante :

$$2X^2 = U^2 + V^2, \qquad 2(2ax + A) = U^2 - V^2;$$

la première équation est satisfaite en posant

$$U = X(\cos\theta + \sin\theta), \qquad V = X(\cos\theta - \sin\theta),$$

le nombre $\tang \frac{1}{2}\theta = x$ étant rationnel et arbitraire. L'équation

$$2\sin\theta\cos\theta X^2 - 2aX - A = 0,$$

devant admettre des solutions rationnelles en X, il faut que l'expression

$$a^2 + 2A\sin\theta\cos\theta = \square$$

soit un carré parfait. Si donc S désigne la surface de l'arithmo-triangle pythagorique de côtés 1, $\sin\theta$ et $\cos\theta$, cette condition

$$a^2 + 4AS = \square$$

généralise la forme donnée au problème de Beha-Eddin par Édouard Lucas.

Ainsi nous obtenons les conditions suivantes :

$$x^4 - 4\frac{A}{a^2}x^3 + 2x^2 + 4\frac{A}{a^2}x + 1 = y^2,$$

$$X = \frac{a}{\sin 2\theta}[1 \pm y\cos\theta] = \frac{a}{4x}\,\frac{1 + x^2}{1 - x^2}(1 + x^2 \pm y).$$

Les coefficients sont dans le cas actuel

$$\alpha = -\frac{A}{a^2}, \qquad \beta = \frac{1}{3}, \qquad \gamma = \frac{A}{a^2}, \qquad \delta = 1.$$

La question ne dépend que d'un seul paramètre γ :

$$\alpha = -\gamma, \qquad \beta = \frac{1}{3}, \qquad \delta = 1,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}(1+3\gamma^2), \qquad g_3 = \frac{8}{27}(1-9\gamma^2),$$

$$27\frac{g_3^2}{g_2^3} = \frac{(1-9\gamma^2)^2}{(1+3\gamma^2)^3},$$

$$\frac{1}{\mathcal{J}} = \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{g_2^3} = \frac{\Delta}{g_2^3} = \frac{27\gamma^2(1-\gamma^2)^2}{(1+3\gamma^2)^3}.$$

Le cas $\gamma = \pm\frac{1}{3}$ est mis en évidence par ces formules. La cubique est alors harmonique : $g_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, $g_3 = 0$. Le problème est équivalent à celui des nombres congruents de Léonard de Pise :

$$Z^2 + \frac{2}{3} = \square, \qquad Z^2 - \frac{2}{3} = \square;$$

$$e_1 = -\frac{2}{3}, \qquad e_2 = 0, \qquad e_3 = +\frac{2}{3}.$$

Voici les solutions de cette équation cubique :

(ω_2)	$\wp = 0,$	$\wp' = 0,$
(ω_3)	$\wp = \frac{2}{3},$	$\wp' = 0,$
(ω_1)	$\wp = -\frac{2}{3},$	$\wp' = 0,$
	$\wp u = 2,$	$\wp' u = \frac{16}{3},$
$(u+\omega_1)$	$\wp = -\frac{1}{3},$	$\wp' = \frac{2}{3},$
$(u+\omega_2)$	$\wp = -\frac{2}{9},$	$\wp' = \frac{16}{27},$
$(u+\omega_3)$	$\wp = \frac{4}{3},$	$\wp' = \frac{8}{3},$
	$\wp 2u = \frac{25}{36},$	$\wp' 2u = \frac{5\times 7}{4\times 27},$
	$\wp 4u = \left(\frac{1201}{420}\right)^2,$	$\wp' 4u = \frac{1201\times 1151\times 1249}{2^5\times 3^3\times 5^3\times 7^3}.$

Elles donnent les solutions du problème des nombres congruents pour $a = 6$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{7}{2}\right)^2, \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$\left(\frac{1201}{140}\right)^2 + 6 = \left(\frac{1249}{140}\right)^2, \qquad \left(\frac{1201}{140}\right)^2 - 6 = \left(\frac{1151}{140}\right)^2.$$

8. *Généralisation des nombres congruents.* — Prenons l'équation double

$$X^2 + A = U^2, \qquad X^2 + B = V^2;$$

pour $a = 0$, $b = 0$, les expressions des invariants se réduisent à

$$g_2 = \frac{4}{3}(A^2 - AB + B^2),$$
$$g_3 = \frac{4}{27}(A + B)(A - 2B)(B - 2A),$$
$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = [4AB(A - B)]^2 > 0;$$

l'équation $p'\omega = 0$ a ses racines réelles, distinctes et rationnelles :

$$e_1 = \frac{A - 2B}{3}, \qquad e_2 = \frac{A + B}{3}, \qquad e_3 = \frac{B - 2A}{3}.$$

Ces équations sont à confronter avec celles qui expriment généralement les invariants g et les racines e en fonction du module K :

$$3\lambda e_1 = 2 - K^2, \qquad 3\lambda e_2 = -(1 + K^2), \qquad 3\lambda e_3 = 2K^2 - 1;$$
$$\lambda^2 g_2 = \frac{4}{3}(1 - K^2 + K^4), \qquad \lambda^3 g_3 = -\frac{4}{27}(1 + K^2)(2 - K^2)(1 - 2K^2);$$

l'identification donne :

$$\lambda = -\frac{1}{B}, \qquad K^2 = \frac{A}{B}.$$

Posons $u\sqrt{\lambda}.\varphi$; les formules

$$pu - e_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{cn}^2\varphi}{\mathrm{sn}^2\varphi}, \qquad pu - e_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{dn}^2\varphi}{\mathrm{sn}^2\varphi}, \qquad pu - e_3 = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mathrm{sn}^2\varphi}$$

donnent

$$x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\operatorname{dn}\varphi}{\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi},$$

$$X = \frac{x^2 - A}{2x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \operatorname{sn} 2\varphi},$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\operatorname{dn} 2\varphi}{\operatorname{sn} 2\varphi},$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\operatorname{cn} 2\varphi}{\operatorname{sn} 2\varphi}.$$

Les équations

$$X^2 - \frac{K^2}{\lambda} = U^2, \qquad X^2 - \frac{1}{\lambda} = V^2$$

sont identiquement vérifiées en posant

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\operatorname{sn} t}, \qquad U = X \operatorname{dn} t, \qquad V = X \operatorname{cn} t;$$

le problème peut donc être étudié assez simplement au moyen des expressions précédentes et en faisant usage des fonctions de Jacobi, si A et B sont des nombres positifs.

9. *Le problème de Beha-Eddin.* — Déjà à la fin de son traité(¹) de calcul, le mathématicien arabe Beha-Eddin (1547-1622) avait proposé entre autres « bijoux nuptiaux de l'arithmétique » la résolution du système

$$X^2 + X + 2 = U^2, \qquad X^2 - X - 2 = V^2;$$

il en avait donné la solution $X = -2$ et la solution

$$X = -\frac{17}{16}, \qquad U = \frac{23}{16}, \qquad V = \frac{7}{16}.$$

(¹) *Khelasat-al-Hisâb,* ou « *essence de calcul* » de Beha-Eddin, Mohammed ben al-Hosaïn-al-Aamouli, traduit par Aristide MARRE (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, [1], t. V, 1846, p. 263-323).

A. GENOCCHI, *Sopra tre scritti* inedite di Leonardo Pisano, pubblicate da Baltasare Boncompagni, note analitiche di Angelo Genocchi, Roma, 1855 (p. 85 et 91).

ÉDOUARD LUCAS, *Solution d'un problème de Beha-Eddin sur l'analyse indéterminée* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* [2], t. XV, 1876, p. 359).

A. Genocchi donna, en 1855, la nouvelle solution

$$X = \frac{34}{15}, \qquad U = \frac{46}{15}, \qquad V = \frac{14}{15};$$

E. Lucas montra que le problème se ramenait au suivant : trouver un triangle rectangle tel que le carré de l'hypoténuse augmenté de 32 fois l'aire soit un carré parfait.

Avec les notations précédentes : $a = \frac{1}{2}$, $A = 2$. La méthode générale ramène l'étude de la question à celle des équations

$$X = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}, \qquad x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 4x + 4 = \square,$$

$$X = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}, \qquad x^4 + 2x^3 + 11x^2 - 4x + 4 = \square,$$

auxquelles correspondent les invariants $g_2 = \frac{193}{12}$, $g_3 = -\frac{23.25}{256}$.

La méthode symétrique de l'arithmotrigonométrie conduit à l'équation

$$x^4 - 32x^3 + 2x^2 + 32x + 1 = y^2, \quad \gamma = 8,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}\,193, \qquad g_3 = -\frac{8}{27}\,23.25, \qquad e_1 = -\frac{25}{3}, \qquad e_2 = \frac{2}{3}, \qquad e_3 = \frac{23}{3},$$

$$p\,u_0 = \frac{191}{3}, \qquad p'u_0 = -7.12^2 = -1008, \qquad p''u_0 = 2^7.3^3.7.$$

La solution de la formule de J. de Billy est

$$x - 8 = \frac{p''u_0}{2p'u_0} = -12, \qquad x = -4, \qquad y = 47;$$

il lui correspond les deux solutions connues du problème de Beha-Eddin :

$$X = -\frac{17}{16}, \qquad X = \frac{34}{15}.$$

On les obtient encore avec la solution $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{47}{16}$

Comme autres solutions simples de l'équation, les suivantes sont à signaler :

$$p(u_0 + \omega_2) = -\frac{1}{3}, \qquad p' = -16,$$

$$p\,2u_0 = \frac{50}{3}, \qquad p' = 120,$$

$$p(2u_0 + \omega_2) = -\frac{157}{48}, \qquad p' = \frac{3^3.5.7}{32}, \quad \ldots.$$

LE PROBLÈME INVERSE DE LA DOUBLE ÉQUATION.

10. Il s'agit de déterminer les deux trinomes du second degré en X, connaissant g_2, g_3 et la solution fondamentale $(pu_0, p'u_0)$.

Le problème correspond à trois données. Il y a trois inconnues, puisque X n'est défini qu'à une constante additive près. Pour inconnues, D, D' et $a-b$ sont indiquées.

Tout d'abord nous établirons une proposition concernant la *relation entre le rapport anharmonique de la cubique de Weierstrass et le rapport anharmonique des racines des deux équations du second degré* $U=0$, $V=0$.

Soient (x_1, x_2) les racines de $U=0$; (x_3, x_4) celles de $V=0$. Soit λ l'un des rapports anharmoniques de ces quatre racines

$$\lambda = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2};$$

$$\frac{\lambda-1}{\lambda+1} = 2\frac{\sqrt{DD'}}{A+B-2ab};$$

nous poserons

$$\omega = \frac{4DD'}{\sigma^2} = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2, \qquad \omega = \frac{4}{3(1+\zeta)};$$

d'où

$$3\frac{g_2}{\sigma^2} = 4-3\omega, \qquad 27\frac{g_3}{\sigma^3} = 8-9\omega,$$

$$\frac{3}{4}\frac{g_2}{\sigma^2} = \frac{\zeta}{1+\zeta}, \qquad \frac{27}{4}\frac{g_3}{\sigma^3} = \frac{2\zeta-1}{1+\zeta},$$

$$3(\lambda+1)^2\frac{g_2}{\sigma^2} = \lambda^2+14\lambda+1,$$

$$27(\lambda+1)^3\frac{g_3}{\sigma^3} = -(\lambda^2-34\lambda+1);$$

$$\frac{g_2^3}{(4-3\omega)^3} = \frac{27g_3^2}{(8-9\omega)^2} = \frac{\Delta}{27\omega^2(1-\omega)};$$

$$\mathcal{J} = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4\zeta^3}{3\zeta-1},$$

Δ est positif, nul ou négatif en même temps que $1-\omega$.

Lorsque Δ est positif, $\omega < 1$, ces équations permettent d'établir la relation

$$\frac{2}{\sqrt{\omega}} = K + \frac{1}{K},$$

entre ω et le module K des fonctions elliptiques. Par suite

$$\omega = \left(\frac{2K}{1+K^2}\right)^2, \qquad \lambda = \left(\frac{1+K}{1-K}\right)^2.$$

Telle est la relation qui existe entre une des valeurs anharmoniques λ des quatre racines des deux équations du double système et l'un des rapports anharmoniques K^2 de la cubique de Weierstrass.

11. Connaissant donc les invariants des fonctions elliptiques ainsi que $p u_0$ et $p' u_0$, il faut déterminer les polynomes du second degré en X.

Une condition nécessaire se pose. *C'est que l'une au moins des racines de l'équation cubique soit rationnelle.*

Soit e cette racine ; elle fait connaître σ, D' et $b-a$:

$$\sigma = -3e, \qquad D' = p u_0 - e, \qquad b - a = \frac{1}{2}\,\frac{p' u_0}{p u_0 - e};$$

les formules

$$3 g_2 = \sigma^2(4 - 3\omega), \qquad 27 g_3 = \sigma^3(8 - 9\omega)$$

font connaître alors ω et par suite D :

$$D = \frac{\omega \sigma^2}{4 D'}.$$

Le problème est donc résoluble sans difficulté si l'équation cubique $p' u = 0$ admet une racine rationnelle.

On peut encore rechercher les racines rationnelles de l'équation cubique en ζ

$$4\zeta^3 - 3\mathcal{J}\zeta + \mathcal{J} = 0,$$

d'invariants $3\mathcal{J}$ et $-\mathcal{J}$ et de discriminant

$$27\mathcal{J}^2(\mathcal{J} - 1) = 729\,\frac{g_2^6 g_3^2}{\Delta^3},$$

et poser ensuite

$$\omega = \frac{4}{3(1+\zeta)}, \qquad \sigma = \frac{9\zeta}{2\zeta - 1}\,\frac{g_3}{g_2}.$$

12. *Cas de la cubique harmonique* ($g_3 = 0$). — Le produit $\sigma(2\sigma^2 - 9DD')$ devant être nul, deux cas peuvent se présenter.

Tout d'abord $\sigma = 0$, $\omega = \infty$, $\lambda = -1$,

$$g_2 = -4\,\mathrm{DD}', \qquad g_3 = 0, \qquad p u_0 = \mathrm{D}', \qquad p' u_0 = 2\mathrm{D}'(b - a).$$

Le problème est toujours possible

$$b - a = \frac{p' u_0}{2 p u_0}, \qquad \mathrm{D} = -\frac{1}{4}\frac{g_2}{p u_0}, \qquad \mathrm{D}' = p u_0.$$

Aucune discussion ne s'impose. Les racines des équations du second degré sont conjuguées harmoniques.

Mais, pour

$$2\sigma^2 = 9\,\mathrm{DD}', \qquad \omega = \frac{8}{9}, \qquad \lambda = 17 \pm 12\sqrt{2}, \qquad \mathrm{K}^2 = \frac{1}{2},$$

la condition

$$g_2 = \frac{4}{9}\sigma^2$$

montre que g_2 doit nécessairement être un carré. Les racines de l'équation cubique doivent être réelles et $\sigma = 3e_\alpha$, e_α étant l'une des deux racines différentes de zéro.

Soit $\sigma = 3e_3$; il vient :

$$\mathrm{D}' = p u_0 - e_1, \qquad \mathrm{D} = \frac{2e_1^2}{9(p u_0 - e_1)}, \qquad b - a = \frac{1}{2}\frac{p' u_0}{p u_0 - e_1}.$$

13. *Cas de la cubique équianharmonique* ($g_2 = 0$). — Pour $\sigma^2 = 3\,\mathrm{DD}'$

$$\omega = \frac{4}{3}, \qquad \lambda = -7 \pm 4\sqrt{3}, \qquad \sigma^3 = -\frac{27}{4}g_3.$$

La condition est que g_3 soit moitié d'un cube ; ou encore que la racine réelle unique e_1 de $p' u = 0$ soit rationnelle :

$$e_1 = -\frac{\sigma}{3},$$

$$\mathrm{D}' = p u_0 - e_1, \qquad \mathrm{D} = \frac{3e^2}{p u_0 - e_1}, \qquad b - a = \frac{1}{2}\frac{p' u_0}{p u_0 - e_1}.$$

LA TRIPLE ÉQUATION DE FERMAT.

14. Reprenons tout d'abord le système de deux équations simultanées du premier degré :

$$1 + ax = u^2, \qquad 1 + bx = v^2;$$

la considération de l'arithmoconique $b(u^2-1)=a(v^2-1)$, passant par les quatre arithmopoints $u=\pm 1$, $v=\pm 1$, permet d'obtenir la solution générale du système sous la forme paramétrique suivante :

$$x = 4\lambda\frac{(1+a\lambda)(1+b\lambda)}{(ab\lambda^2-1)^2},$$

$$u = \frac{1+2a\lambda+ab\lambda^2}{ab\lambda^2-1}, \qquad v = \frac{1+2b\lambda+ab\lambda^2}{ab\lambda^2-1},$$

$$u-1 = 2\frac{1+a\lambda}{ab\lambda^2-1}, \qquad v-1 = 2\frac{1+b\lambda}{ab\lambda^2-1},$$

$$u+1 = 2a\lambda\frac{1+b\lambda}{ab\lambda^2-1}, \qquad v+1 = 2b\lambda\frac{1+a\lambda}{ab\lambda^2-1}.$$

Toutes les solutions du système sont ainsi représentées. Lorsque l'une (x_0, u_0, v_0) des solutions est connue, $(x_0, \pm u_0, \pm v_0)$ sont trois nouvelles solutions. En d'autres termes, l'équation du quatrième degré en λ, associée à une valeur de x, admet quatre racines rationnelles dès que l'une d'elles est rationnelle. Par les formules

$$\lambda = \frac{1}{a}\cdot\frac{u+1}{v-1} = \frac{1}{b}\cdot\frac{v+1}{u-1},$$

il est possible de résoudre l'équation du quatrième degré, connaissant une de ses racines ; il suffit de combiner les signes des u_0 et v_0.

15. Considérons maintenant la triple équation linéaire

$$Ax + A' = U^2, \qquad Bx + B' = V^2, \qquad Cx + C' = W^2,$$

la plus générale de Fermat et supposons connue une solution primitive x_0. Par un changement d'inconnue, le système peut être transformé, sans restriction de généralité, en un système pour lequel cette solution primitive est $x=0$; A', B', C' sont alors des carrés. Si ces trois carrés sont différents de zéro, par simples multiplications on peut les rendre égaux et transformer le système en le suivant :

$$1+ax=u^2, \qquad 1+bx=v^2, \qquad 1+cx=w^2.$$

A la réduction à cette forme canonique échappent les systèmes pour lesquels l'un au moins des carrés A', B', C' de la première transformation est nul. Le cas des trois carrés nuls à la fois, ou de deux carrés nuls est sans intérêt pour la discussion actuelle, soit qu'il y ait impossibilité, soit qu'il y ait indétermination. Il reste donc le seul cas à examiner où l'un des carrés seulement est nul ; le système est alors réductible à la forme

$$1 + ax = u^2, \qquad 1 + bx = v^2, \qquad x = w^2.$$

c'est-à-dire encore au système double

$$z^2 + A = U^2, \qquad z^2 + B = V^2.$$

Ce dernier système, généralisation des équations aux nombres congruents, a été étudié précédemment (§ 6) et ramené simplement aux fonctions de Jacobi.

16. Soit le système des trois équations

$$1 + ax = u^2, \qquad 1 + bx = v^2, \qquad 1 + cx = w^2,$$

dans lesquelles a, b, c sont trois nombres rationnels donnés. Nous poserons

$$a + b + c = 3L, \qquad ab + bc + ca = 3M, \qquad abc = N,$$

en considérant l'équation cubique

$$\varphi^3 - 3L\varphi^2 + 3M\varphi - N = 0,$$

d'invariants

$$\gamma_2 = 12(L^2 - M), \qquad \gamma_3 = 4(2L^3 - 3LM + N),$$

dont ces nombres a, b et c sont précisément les racines.

Pour résoudre la triple équation de Fermat, il suffit de chercher à satisfaire à la troisième, par exemple, en utilisant la solution générale

$$x = 4\lambda \frac{(1 + \lambda a)(1 + \lambda b)}{(ab\lambda^2 - 1)^2}$$

du système formé par les deux premières. Le nombre λ doit être solution d'une équation du quatrième degré

$$(ab\lambda^2 - 1)^2 + 4c\lambda(1 + a\lambda)(1 + b\lambda) = [(ab\lambda^2 - 1)w]^2,$$

qui se transforme successivement en

$$z^4 + 4cz^3 + 2[2c(a + b) - ab]z^2 + 4abcz + a^2b^2 = Y^2,$$

$$\begin{aligned} X^4 - 2[3c^2 - 2(a + b)c + ab]X^2 + 8c(c - a)(c - b) \\ + a^2b^2 - 6abc^2 + 4(a + b)c^3 - 3c^4 = Y^2, \end{aligned}$$

en posant

$$\lambda = \frac{1}{z}, \qquad z = X - c, \qquad Y = \left(ab - \frac{1}{\lambda^2}\right) w.$$

La question dépend ainsi d'une équation du quatrième ordre avec

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -\frac{1}{3}[3c^2 - 2(a+b)c + ab], \qquad \gamma = 2c(c-a)(c-b),$$
$$\delta = a^2b^2 - 6abc^2 + 4(a+b)c^3 - 3c^4.$$

Ces expressions donnent

$$g_2 = 12(M^2 - LN) = \frac{4}{3}[ab + bc + ca)^2 - 3abc(a+b+c] \geqq 0,$$
$$g_3 = 4(3LMN - 2M^3 - N^2),$$
$$\frac{\Delta}{D} = \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2} = a^2b^2c^2 = N^2,$$
$$D = a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2,$$
$$e_1 = M - bc = \frac{1}{3}(ab + ac - 2bc),$$
$$e_2 = M - ca,$$
$$e_3 = M - ab,$$
$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = bc(a-b)(a-c),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

On a quatre solutions :

$$pu_0 = \frac{1}{3}[3c^2 - 2(a+b)c + ab] = -\beta, \qquad p'u_0 = 2c(c-a)(c-b) = \gamma,$$
$$p(u_0+\omega_1) = \frac{1}{3}[3b^2 - 2(b+c)b + bc], \qquad p'(u_0+\omega_1) = 2b(b-a)(b-c),$$
$$p(u_0+\omega_2) = \frac{1}{3}[3a^2 - 2(c+a)a + ca], \qquad p'(u_0+\omega_2) = 2a(a-b)(a-c),$$
$$p(u_0+\omega_3) = M, \qquad p'(u_0+\omega_3) = 2abc.$$

Elles donnent lieu à des identités telles que les suivantes :

$$pu_0 - e_1 = c(c-a), \qquad pu_0 - e_2 = c(c-b),$$
$$pu_0 - e_3 = (c-a)(c-b),$$
$$p(u_0+\omega_1) - e_1 = b(b-a), \qquad p(u_0+\omega_1) - e_2 = (b-a)(b-c),$$
$$p(u_0+\omega_1) - e_3 = b(b-c),$$
$$p(u_0+\omega_2) - e_1 = (a-b)(a-c), \qquad p(u_0+\omega_2) - e_2 = a(a-b),$$
$$p(u_0+\omega_2) - e_3 = a(a-c),$$
$$p(u_0+\omega_3) - e_1 = bc, \qquad p(u_0+\omega_3) - e_2 = ca,$$
$$p(u_0+\omega_3) - e_3 = ab;$$

d'où résultent

$$\mathrm{p}\,2u_0 = \frac{9}{4}\mathrm{L}^2 - 2\mathrm{M}, \qquad \mathrm{p}\,2u_0 + 2\mathrm{p}(u_0+\omega_3) = \frac{9}{4}\mathrm{L}^2,$$

$$\mathrm{p}\,2u_0 - e_1 = \frac{1}{4}(b+c-a)^2, \qquad \mathrm{p}\,2u_0 - e_2 = \frac{1}{4}(c+a-b)^2,$$

$$\mathrm{p}\,2u_0 - e_3 = \frac{1}{4}(a+b-c)^2,$$

$$\mathrm{p}'2u_0 = \frac{1}{4}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = -\frac{1}{4}(27\mathrm{L}^3 - 36\mathrm{LM} + 8\mathrm{N}].$$

17. Cette dernière formule met en évidence le cas où l'un des nombres a, b, c est somme des deux autres : $c = a + b$, par exemple. $\mathrm{p}'2u_0$ est nul et u_0 est quart de période. Il s'agit alors d'équations spéciales qui échappent à la méthode générale de Fermat, soit qu'il s'agisse d'équations à la fois impossibles dans leur essence et sous le point de vue de la méthode, comme

$$1 + x = u^2, \qquad 1 + 2x = v^2, \qquad 1 + 3x = w^2,$$

soit qu'il s'agisse d'équations pourtant résolubles telles que

$$1 + 5x = u^2, \qquad 1 + 16x = v^2, \qquad 1 + 21x = w^2 \qquad (\text{solution } x = 3).$$

Pour les équations impossibles de Fermat : $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$,

$$\mathrm{L} = 2, \qquad \mathrm{M} = \frac{11}{3}, \qquad \mathrm{N} = 6,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}13, \qquad g_3 = -\frac{8.5.7.}{27},$$

$$e_1 = -\frac{7}{3}, \qquad e_2 = \frac{2}{3}, \qquad e_3 = \frac{5}{3},$$

$$\mathrm{p}\,u_0 = \frac{11}{3}, \qquad \mathrm{p}(u_0+\omega_1) = -\frac{1}{3}, \qquad \mathrm{p}(u_0+\omega_2) = -\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{p}(u_0+\omega_3) = \frac{11}{3}, \qquad \mathrm{p}\,2u_0 = \frac{5}{3} = \mathrm{p}\,\omega_3.$$

D'une manière générale, lorsque $c = a + b$,

$$\mathrm{p}(u_0+\omega_1) = \mathrm{p}(u_0+\omega_2), \qquad \mathrm{p}(u_0+\omega_3) = \mathrm{p}\,u_0 = \mathrm{M},$$

$$\mathrm{p}\,2u_0 = \mathrm{p}\,\omega_3, \qquad \mathrm{p}'2u_0 = 0, \qquad u_0 = -\frac{1}{2}\omega_3.$$

18. Pour $a = 5$, $b = 16$, $c = 21$,

$$L = 14, \qquad M = \frac{521}{3}, \qquad N = 1680,$$

$$e_1 = -\frac{487}{3}, \qquad e_2 = \frac{206}{3}, \qquad e_3 = \frac{281}{3},$$

$$\wp u_0 = \wp(u_0 + \omega_3) = M = \frac{521}{3}, \qquad \wp' u_0 = 160 \times 21,$$

$$\wp(u_0 + \omega_1) = \wp(u_0 + \omega_2) = \frac{41}{3}, \qquad \wp'(u_0 + \omega_1) = 32 \times 5 \times 11,$$

$$\wp 2u_0 = e_3 = \frac{281}{3}, \qquad \wp' 2u_0 = 0.$$

L'équation possède en outre les solutions $\wp u$ des deux systèmes suivants :

$$(u_1) \qquad \frac{161}{3}, \quad \frac{1003}{9}, \quad \frac{1361}{3}, \quad -\frac{199}{3},$$

$$(u_2) \qquad -\frac{319}{3}, \quad \frac{2681}{3}, \quad \frac{305}{3}, \quad \frac{185}{3},$$

qui donnent les valeurs $X = 11$, 13, 27 et $\frac{103}{3}$; il leur correspond quatre valeurs de $\frac{1}{\lambda} = -10$, -8, $+6$, $+\frac{40}{3}$ conduisant toutes à $x = 3$ et à $x = -\frac{3}{64}$.

La duplication d'argument des solutions précédentes donne respectivement les nouvelles valeurs :

$$\wp 2u_1 = \frac{1243}{9}, \qquad \wp' 2u_1 = \frac{52000}{27};$$

$$\wp 2u_2 = \frac{713}{3}, \qquad \wp' 2u_2 = 480 \times 13.$$

19. Dans l'équation cubique résolvante de la triple équation linéaire de Fermat, l'invariant g_2 est positif, puisque les racines sont réelles toutes trois. Quant à l'invariant g_3, son signe est quelconque.

g_3 s'annule et la cubique est harmonique, lorsque l'un des nombres a, b, c est la moyenne harmonique des deux autres et dans ce cas seul. Soit, pour fixer les idées,

$$c(a + b) = 2ab.$$

Les formules algébriques donnent alors

$$M = ab, \qquad e_1 = ab\frac{a-b}{a+b}, \qquad e_2 = -e_1, \qquad e_3 = 0,$$

$$g_2 = (2e_1)^2, \qquad g_3 = 0;$$

l'invariant g_2 est carré ; on peut poser $g_2 = 4A^2$, avec $A = e_1$ à un facteur carré près, le nombre A est de la forme

$$ab(a-b)(a+b),$$

précisément caractéristique des nombres susceptibles de mesurer l'aire d'un arithmotriangle pythagorique, c'est-à-dire de *nombres congruents* de Léonard de Pise.

Ainsi l'étude de la triple équation linéaire de Fermat, dans ce cas spécial, est identique à celle d'un double système d'équations rattachées au nombre congruent $A = \frac{1}{2}c(a-b)$.

20. Revenons au système spécial

$$1 + ax = u^2, \qquad 1 + bx = v^2, \qquad x = w^2,$$

mis en évidence dans la discussion du paragraphe 15 ; il s'agit indépendamment des considérations antérieures (§ 15) d'examiner comment se présente la question avec les formules propres à l'étude générale de la double équation. L'expression

$$x = 4\lambda \frac{(1+\lambda a)(1+\lambda b)}{(ab\lambda^2 - 1)^2}$$

étant celle de la solution générale des deux premières équations du triple système envisagé, la troisième équation exige que le nombre rationnel λ soit tel que

$$\lambda(1+\lambda a)(1+\lambda b) = \square;$$

la réduction à la forme canonique est immédiate en posant

$$\frac{1}{\lambda} = p - \frac{a+b}{3};$$

$$4\left(p - \frac{a+b}{3}\right)\left(p + \frac{2a-b}{3}\right)\left(p + \frac{2b-a}{3}\right) = Y^2,$$

$$e_1 = \frac{a-2b}{3}, \qquad e_2 = \frac{a+b}{3}, \qquad e_3 = \frac{b-2a}{3};$$

$$g_2 = \frac{4}{3}(a^2 - ab + b^2),$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(a+b)(a-2b)(b-2a).$$

Ce sont les expressions mises en lumière antérieurement.

21. Indépendamment des considérations précédentes, il y a lieu de signaler une méthode spéciale de détermination de solutions particulières des équations linéaires pour lesquelles les rapports mutuels des coefficients A, B et C de l'inconnue sont carrés parfaits. Par changement d'inconnue, il sera toujours possible de réduire à l'unité A, B et C et, en outre, de supposer nulle la somme $A' + B' + C' = 0$. Dans ces conditions, le système triple se trouvera réduit à la forme

$$x - e_1 = u^2, \qquad x - e_2 = v^2, \qquad x - e_3 = w^2,$$

avec $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

On pourra procéder de la manière suivante : on formera l'équation cubique

$$\mathrm{p}'^2 = 4(\mathrm{p} - e_1)(\mathrm{p} - e_2)(\mathrm{p} - e_3),$$

admettant précisément pour racines de $\mathrm{p}' = 0$ les nombres e_1, e_2 et e_3. Soit $\mathrm{p}u$ une solution, abscisse d'un arithmopoint de cette cubique de Weierstrass. Comme les différences

$$\mathrm{p}2u - e_1, \quad \mathrm{p}2u - e_2, \quad \mathrm{p}2u - e_3$$

sont toujours des carrés parfaits, il suffira donc de poser

$$x = \mathrm{p}(2nu)$$

pour déduire de cette solution primitive une infinité de solutions, dépendant du nombre entier arbitraire n, du système triple considéré.

Étant données deux solutions d'arguments u et v, la formule d'addition, mise sous la forme générale

$$\sqrt{\mathrm{p}(u+v) - e_1} = \frac{\sqrt{(\mathrm{p}u - e_1)(\mathrm{p}v - e_2)(\mathrm{p}v - e_3)} - \sqrt{(\mathrm{p}v - e_1)(\mathrm{p}u - e_2)(\mathrm{p}u - e_3)}}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v},$$

montre que $u \pm v$ sont de nouvelles solutions du triple système.