Bulletin de la S. M. F.

A. Gay

Sur un torseur attaché à une courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 143-150
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__143_0>

SUR UN TORSEUR ATTACHÉ A UNE COURBE

PAR M. A. GAY.

TORSEUR T. — Considérons un arc de courbe gauche $\widehat{M_0M}$ sur lequel le sens de M_0 vers M est le sens positif. Si l'on inscrit dans cet arc une ligne brisée de n côtés, l'ensemble des n vecteurs portés par ces côtés définit un torseur T_n qui a une limite T lorsque la ligne a pour limite l'arc $\widehat{M_0M}$.

Si O est un point de l'espace, la réduction de T en O est définie par :

$$(1) \qquad \lambda = \overline{M_0M}, \qquad a = \int_{\widehat{M_0M}} r \wedge ds$$

où r est le rayon vecteur d'un point quelconque P de $\widehat{M_0M}$ et ds l'élément d'arc d'origine P; a représente le double de l'axe aréolaire du contour OM_0M [1]. La longueur de a représente le double de l'aire latérale de la surface conique de sommet O et de base $\widehat{M_0M}$.

La théorie des vecteurs permet de définir aussitôt l'axe aréolaire d'un contour $O'M_0M$, si O′ est un point de l'espace distinct de O.

Les deux invariants de T sont la corde M_0M et le produit scalaire $a \times \lambda$ qui représente le double du volume algébrique du cylindre qui a pour base la projection de l'arc $\widehat{M_0M}$ sur le plan dont l'axe est $\overline{M_0M}$ et pour hauteur λ.

Si la courbe $\widehat{M_0M}$ est fermée, T se réduit à un couple.

AXE CENTRAL. — L'axe central de T est parallèle à l'axe λ. Si l'on désigne par α le vecteur particulier a défini en faisant coïncider O avec M_0, on voit immédiatement que l'axe central δ passe par l'extrémité du vecteur :

$$\mu = \frac{\lambda \wedge \alpha}{\lambda^2},$$

---

[1] KŒNIGS, Volume engendré par un contour, *Journal de Mathématiques*, t. 1. 1889.

et l'on a

$$|\mu| = \frac{|\alpha|}{|\lambda|}.$$

SURFACE R. — Supposons que M décrive une courbe C; l'axe central δ engendre une surface réglée R sur laquelle nous prendrons comme directrice la courbe Γ, lieu du point μ.

Si l'on désigne par V l'angle que fait M_0M avec la tangente en M à la courbe C, par p la distance de M_0 à cette tangente, un calcul simple donne, pour le paramètre de distribution,

$$k = \frac{\alpha'}{p},$$

α' étant la projection de α sur l'axe que l'on obtient en faisant tourner MT dans le plan M_0MT de $\frac{\pi}{2} - 2V$.

Le point central σ est défini par le vecteur $\mu\sigma$ dont la valeur algébrique sur λ est

$$h = \frac{p}{\sin^3 V} - \frac{|\alpha|.\cos V}{2p} \quad [1].$$

COURBE ASSOCIÉE. — On peut appeler courbe associée à la courbe C, par rapport au point O, la courbe C_1 lieu de l'extrémité du vecteur a correspondant au point O.

Les notations étant celles du Cours d'Analyse de Goursat [2], j'appelle ω le vecteur A, B, C, et π le produit scalaire $\omega.r$.

On voit alors que le vecteur ω_1 de C_1 est le produit de π par le vecteur r :

$$\omega_1 = \pi.r. \tag{2}$$

Sur C_1 le plan osculateur au point M_1, homologue de M, est normal à OM.

D'après (2), le point M_1 est un point à tangente stationnaire, si M est un point à tangente stationnaire, ou si le plan osculateur en M passe en O, ou enfin si M est confondu avec O.

L'expression de T_1, torsion de C_1 en M_1, s'écrit [3] :

$$T_1 = -\frac{\omega_1^2}{\Delta_1},$$

---

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. 1, 2e édition, Chap. XII.
(2) GOURSAT, *loc. cit.*, t. 1, Chap. XI.
(3) GOURSAT, *loc. cit.*, t. 1, p. 566.

mais $\Delta_1 = \pi^2$ et l'on trouve :

$$(3) \qquad T_1 = -r^2,$$

C_1 est en tout point sinistrorsum.

Étant donnée une courbe C_1 sinistrorsum, les relations (2) et (3) définissent la courbe C correspondante, à une symétrie par rapport au point O près.

Inversement, étant donnée la conrbe C, les relations (2) et (3) définissent son associée C_1, car la relation (2) permet d'écrire l'égalité vectorielle

$$ds_1 = k \times r \wedge ds$$

et, d'après (3), il faut que $k = 1$.

Remarquons que si C est sphérique, son associée C_1 est à torsion constante et réciproquement.

Enfin, en appliquant la formule donnant le rayon de courbure

$$R_1^2 = \frac{ds_1^6}{\omega_1^2} \text{ [1]}$$

on trouve, en tenant compte de (2) et (3) :

$$(4) \qquad \frac{R_1^2}{T_1^2} = \frac{R^2}{r_b^2},$$

r_b étant la projection de r sur la binormale de C.

Dérivée du torseur T. — Supposons que l'arc $\widehat{M_0 M}$ se déplace et se déforme quand le temps t varie ; le torseur T devient une fonction de t, et les dérivées de ses deux composantes λ et a sont données par une formule connue [2]. Si V est le vecteur vitesse d'un point quelconque P de M_0M, on a

$$(5) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = V_{M_0}^{M}, \qquad \frac{da}{dt} = 2\int V \wedge ds + (r \wedge V)_{M_0}^{M}.$$

Cas du déplacement sans déformation. — Si τ est la translation et ρ la rotation qui définissent le mouvement du trièdre lié à l'arc

---

(1) Goursat, *loc. cit.*, p. 560.
(2) Goursat, *loc. cit.*, t. 1, 3e édition, p. 644.

$\widehat{M_0M}$, on a, d'après (5),

$$\frac{d\lambda}{dt} = \rho\Lambda\lambda, \qquad \frac{da}{dt} = \rho\Lambda a + \tau\Lambda\lambda. \tag{6}$$

On sait que (¹), τ et ρ étant connues, les équations (6) font connaître λ et a par l'intégration d'une équation de Riccati et des quadratures.

Pour indiquer un exemple simple des équations (6) supposons que $\widehat{M_0M}$ se réduise à un segment de droite se déplaçant dans un plan; dans ce cas $\rho\Lambda a = 0$ et il reste dans la deuxième équation (6)

$$\frac{da}{dt} = \tau\Lambda\lambda.$$

La dérivée de a est égale au produit de λ par la composante de la vitesse de translation normale à λ; résultat qui se démontre aisément directement.

Détermination de T si la courbe C est définie intrinsèquement. — On peut toujours supposer que O est l'origine de C si l'on adjoint à l'arc $\widehat{M_0M}$ le rayon OM_0, et l'on fera dans ce qui suit $\frac{ds}{dt} = 1$. Par rapport au trièdre mobile d'origine M ayant pour axes la tangente, la normale principale et la binormale à C, l'arc M_0M subit un allongement sur la tangente de vitesse 1 et un déplacement dans lequel τ a pour composantes -1, 0, 0 et ρ a pour composantes $\frac{1}{T}$, 0, $\frac{-1}{R}$ (²), où $\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{R}$ sont la torsion et la courbure de C en M.

En utilisant (5) et (6) on forme les équations qui définissent r et a en fonction de s.

Ainsi les composantes de r sur les axes mobiles sont définies par les équations différentielles

$$\frac{dr_t}{ds} = 1 + \frac{r_n}{R}, \qquad \frac{dr_n}{ds} = -\frac{r_t}{R} - \frac{r_b}{T}, \qquad \frac{dr_b}{ds} = \frac{r_n}{T}.$$

En particulier, si C est sphérique, on a $r_t = 0$, d'où, par suite,

---

(¹) Goursat, édition 1905, p. 389 et 464.
(²) Darboux, *Théorie des surfaces*, édition 1914, t. I, p. 59.

$r_n = -R$ et $r_b = T\frac{dR}{ds}$ et, d'après la troisième équation,

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right) = 0 \quad (^1).$$

CIRCULATION D'ENTRAINEMENT. — Considérons un trièdre mobile de sommet O dont le mouvement est défini par un torseur $\Theta(\tau, \rho)$. Si V_e est le vecteur vitesse d'entraînement à l'instant t en un point quelconque P d'un arc $\widehat{M_0M}$ on appellera circulation d'entraînement à l'instant t le long de $\widehat{M_0M}$, l'intégrale

$$J_e = \int_{\widehat{M_0M}} V_e\, ds \quad (^2).$$

Si l'on introduit le torseur T attaché à $\widehat{M_0M}$ et sa réduction (λ, a) en O, on a

$$J_e = \lambda\tau + a\rho, \tag{7}$$

les produits étant des produits scalaires.

On peut dire que J_e est le moment du torseur T attaché à $\widehat{M_0M}$ par rapport au torseur Θ des rotations instantanées.

CALCUL DE $\frac{dJ_e}{dt}$. — Lorsque t varie, chaque point P de $\widehat{M_0M}$ est entraîné par le mouvement absolu et l'arc $\widehat{M_0M}$ se déplace et se déforme par rapport au trièdre mobile. La dérivée de son torseur T est définie par (5). Si l'on désigne par $\Theta'(\tau', \rho')$ la dérivée du torseur Θ, par V_r la vitesse relative à l'instant t du point quelconque P de $\widehat{M_0M}$, et par J_c la circulation le long de $\widehat{M_0M}$ de l'accélération de Coriolis à l'instant t, on obtient pour $\frac{dJ_e}{dt}$

$$\frac{dJ_e}{dt} = \lambda\tau' + a\rho' + (V_eV_r)_{M_0}^{M} + J_c, \tag{8}$$

tous les produits étant des produits scalaires.

---

(1) RAFFY, *Applications géométriques*, p. 129.

(2) APPELL, *Mécanique*, édition 1909, t. III, p. 391.

Si M_0M est fermée, (8) se réduit à

$$\frac{dJ_e}{dt} = a\rho'.$$

Moment de deux courbes. — Étant donnés deux arcs de courbe $\widehat{M_0M}$ et $\widehat{M'_0M'}$, on appellera moment de ces deux arcs le moment des torseurs attachés à ces arcs. Cet invariant simultané représente 6 fois le volume algébrique balayé par la surface conique $P'M_0M$ lorsque P' décrit $\widehat{M'_0M'}$; le signe du volume étant défini comme dans la théorie des vecteurs.

Si (λ, a) et (λ', a') représentent les réductions des deux torseurs en un point O, le moment $\mathcal{M}$ est

$$\mathcal{M} = \lambda a' + \lambda' a; \tag{9}$$

c'est la somme de deux cylindres dont la définition est immédiate.

Comme exemple formons sur une sphère de rayon R deux demi-grands cercles n'ayant aucun point commun et tels que les pôles de l'un soient les extrémités de l'autre. On définit ainsi un volume, qui, d'après la formule (9), est la moitié de celui de la sphère.

Moment d'une courbe par rapport a un torseur. Problème isopérimétrique. — On peut dire que le moment d'une courbe C, par rapport à un torseur donné Θ, est le moment $\mathcal{M}$ par rapport à Θ du torseur T attaché à C. Si l'on prend pour Oz l'axe central de Θ, ce moment $\mathcal{M}$ est l'intégrale

$$\mathcal{M} = \int_C (xy' - yx' - kz')\,ds.$$

Les courbes C pour lesquelles $\mathcal{M} = 0$ sont les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire [1].

Parmi les courbes C de moment $\mathcal{M}$ donné, cherchons celles pour lesquelles la longueur $\mathcal{L}$ est un extrémum. On sait que ce sont aussi les courbes de longueur $\mathcal{L}$ donnée et dont le moment $\mathcal{M}$ est extrémum [2].

---

[1] Goursat, *loc. cit.*, t. I, p. 556 et 633.
[2] Hadamard, *Leçons sur le Calcul des Variations*. liv. II, Chap. V.

Ces courbes sont, pour une certaine valeur de paramètre l, les extrémales de l'intégrale

$$\int (xy' - yx' - kz' + l\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2})\,ds.$$

Si α, β, γ et α', β', γ' sont les cosinus directeurs de la tangente et de la normale principale en un point quelconque de C et si R est le rayon de courbure à C en ce point, C satisfait aux équations

$$\frac{2}{l}\beta - \frac{\alpha'}{R} = 0, \qquad \frac{2}{l}\alpha + \frac{\beta'}{R} = 0, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = 0;$$

C est donc une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz.

Les deux premières équations entraînent

$$(10) \qquad \frac{\gamma''}{R} = \frac{2(\gamma^2 - 1)}{l},$$

où γ'' est le cosinus de l'angle de Oz avec la binormale à C. L'équation (10) montre que R est constant; il en est donc de même du rayon de courbure de la projection c de C sur le plan xOy [1], et C est une hélice circulaire. Si l'on considère toutes les extrémales issues d'un point M_0, ce point n'a pas de foyer et la condition de Jacobi est vérifiée.

La fonction $\overline{\mathcal{E}}$ de Weierstrass a pour expression

$$\overline{\mathcal{E}} = l\,ds(1 - \cos\alpha) \quad [2],$$

où α représente l'angle que fait la tangente à l'extrémale avec une direction voisine. La condition de Weierstrass exige que l soit > 0, donc que γ'' d'après (10) soit < 0.

Pour que $\mathcal{M}$ soit minimum, $\mathcal{L}$ étant donnée, il faut que la projection de C sur xOy soit parcourue dans le sens négatif par rapport à Oz.

On voit aisément que si $\mathcal{L}$ est donnée, pour déterminer l'extrémale passant par deux points donnés, on est ramené à faire passer par deux points de xOy un arc de cercle de longueur donnée.

---

(1) Goursat, *loc. cit.*, p. 577.
(2) Hadamard. *loc. cit.*, liv. III, Chap. II.

COURBES DÉFINIES PAR LEUR MOMENT PAR RAPPORT A UN TORSEUR. — On peut donner une généralisation des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire en cherchant à définir les courbes C par leur moment par rapport à un torseur Θ. La courbe C étant rapportée à un trièdre trirectangle $Oyxz$, les coordonnées x, y, z du point M de C sont définies à l'aide d'un paramètre t; l'origine M_0 de C correspondant à $t = 0$. Le paramètre t désignant le temps, M a un vecteur vitesse V.

On se donnera la projection de C sur xOy, c'est-à-dire x et y en fonction de t et l'on déterminera $z(t)$.

Le torseur Θ peut être fonction du point M et aussi de V, ainsi que le moment $\mathcal{M}$ de C par rapport à Θ.

On distinguera deux cas, suivant que l'axe de Θ (τ, ρ) est fixe ou variable. On voit immédiatement par exemple que lorsque :

1° *L'axe de Θ coïncide avec Oz*,

Si τ et $\mathcal{M}$ sont linéaires en z, ρ étant indépendant de z, l'ordonnée z est définie par une équation algébrique linéaire en z;

Si τ et $\mathcal{M}$ sont linéaires en z et $\frac{dz}{dt}$, ρ étant indépendant de z, l'ordonnée z est définie par une équation différentielle linéaire du premier ordre en z.

2° *L'axe de Θ est variable*,

Si le moment $\mathcal{M}$, la projection de τ sur Oz et la projection de ρ sur xOy sont linéaires en z, les autres projections de τ et ρ étant indépendantes de z, l'ordonnée z est définie par une équation intégrale linéaire de Volterra.

Si $\mathcal{M}$, la projection de τ sur Oz, celle de ρ sur xOy sont linéaires en z et $\frac{dz}{dt}$, les autres projections étant indépendantes de z, l'ordonnée z est définie par une équation intégro-différentielle linéaire du premier ordre de Volterra.

Cette équation, par application de la formule de Dirichlet, se ramène à une équation intégrale linéaire en z (1).

On suppose, dans cette dernière question, que certaines quadratures évidentes ont été effectuées.

---

(1) VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales*, Chap. IV.