BULLETIN DE LA S. M. F.

IV. TZÉNOFF

Quelques formes différentes des équations générales du mouvement des systèmes matériels

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 80-105
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__80_0>

QUELQUES FORMES DIFFÉRENTES DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES MATÉRIELS.

Par M. Iv. Tzénoff.

(Sofia.)

I.

1. $q_1, q_2, \ldots, q_s$ étant les coordonnées d'un système matériel, supposons que leurs dérivées par rapport au temps s'expriment linéairement au moyen de quantités nouvelles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, c'est-à-dire

$$q'_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\omega_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

$a_{r\alpha}$ et a_r étant des fonctions du temps t et de $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Ces équations résolues par rapport aux ω_α (en supposant que ceci soit possible) donnent

$$\omega_\alpha = \sum_{r=1}^{s} b_{r\alpha} q'_r + b_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s), \tag{2}$$

en supposant que les deuxièmes membres de (2) ne sont pas en général des différentielles totales exactes et n'admettent pas de facteurs intégrants.

Posons

$$\omega_\alpha = \frac{dp_\alpha}{dt} = p'_\alpha \tag{3}$$

(en réalité cette égalité n'existe pas).

Alors les équations (1) et (2) prennent la forme

$$q'_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha} p'_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s \tag{1'}$$

$$p'_\alpha = \sum_{r=1}^{s} b_{r\alpha} q'_r + b_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \tag{2'}$$

De ces équations on obtient

$$\delta q_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\,\delta p_\alpha \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{4}$$

$$\delta p_\alpha = \sum_{r=1}^{s} b_{r\alpha}\,\delta q_r \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s). \tag{5}$$

L'équation générale de la dynamique est

$$\sum_{r=1}^{s} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q'_r} - \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_r} - \overline{Q}_r^0\right] \delta q_r = 0, \tag{6}$$

T_0 (la demi-force vive ou énergie cinétique du système) étant fonction de $t, q_1, q_2, \ldots, q_s, q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$.

Les équations du mouvement du système, écrites sous la forme donnée par Lagrange, sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q'_r} - \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_r} = \overline{Q}_r^0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{I}$$

Ces s équations différentielles du second ordre nous déterminent $q_1, q_2, \ldots, q_s$ en fonction de t et de $2s$ constantes arbitraires, qu'on déterminera par les conditions initiales.

Nous allons maintenant introduire les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ *à la place des variables* $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$ [*équations* (1)] *dans les équations* (I) *et obtenir de cette façon un système d'équations équivalent.*

Désignons par T_0 et Q_r^0 les fonctions obtenues en remplaçant dans $\overline{T}_0$ et $\overline{Q}_r^0$ les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$ par leurs valeurs (1); alors T_0 et Q_r^0 sont des fonctions de $t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$.

On a évidemment

$$\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q'_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial q_r} = \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_r} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q'_\alpha}\frac{\partial q'_\alpha}{\partial q_r}. \tag{8}$$

En vertu de (8), l'équation (6) prend la forme

$$\sum_{r=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}_0}{\partial q'_r}-\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial q_r}-\mathrm{Q}_r^0\right]\delta q_r+\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial q'_r}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0.$$

Dans la première somme remplaçant δq_r par sa valeur (4) et en tenant compte que d'après (1)

$$a_{r\alpha}=\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha},$$

on obtient l'équation

$$\sum_{r=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}_0}{\partial q'_r}-\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial q_r}-\mathrm{Q}_r^0\right]\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\delta p_\alpha+\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}_0}{\partial q'_r}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0;$$

qui, en tenant compte de (7), devient

$$(9)\qquad \sum_{\alpha=1}^{s}\delta p_\alpha\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial \omega_\alpha}-\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial q_r}+\mathrm{Q}_r^0\right)\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\right]$$
$$+\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}_0}{\partial q'_r}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial q'_r}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\delta p_\alpha\right)=0.$$

Mais des équations (1), (3) et (4) nous avons

$$\delta q'_r=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\delta p'_\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\delta q_r=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\delta p_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\frac{d}{dt}\delta p_\alpha;$$

comme $q_1, q_2, \ldots, q_s$ sont des variables indépendantes, on a

$$(10)\qquad \delta q'_r=\frac{d}{dt}\delta q_r;$$

alors

$$(11)\qquad \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial q'_r}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\frac{d}{dt}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\delta p_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\delta p_\alpha-\delta p'_\alpha\right)$$

et l'équation (9) prend la forme

$$(12)\qquad \sum_{\alpha=1}^{s}\delta p_\alpha\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial \omega_\alpha}-\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial q_r}+\mathrm{Q}_r^0\right)\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\right]$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \mathrm{T}_0}{\partial \omega_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\delta p_\alpha-\delta p'_\alpha\right)=0.$$

D'autre part, nous avons d'après (2), (3) et (5)

$$\delta p'_\alpha = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q_r}\,\delta q_r + \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q'_r}\,\delta q'_r,$$

$$\frac{d}{dt}\,\delta p_\alpha = \sum_{r=1}^{s} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q_r}\,\delta q_r + \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q'_r}\,\frac{d}{dt}\,\delta q_r,$$

ou d'après (10)

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\,\delta p_\alpha - \delta p'_\alpha = \sum_{r=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial q_r}\right)\delta q_r,$$

ou il faut encore remplacer δq_r par sa valeur (4).

Alors l'équation (12) prend la forme

$$(14)\qquad \sum_{\alpha=1}^{s} \delta p_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \times \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + Q_r^0 - \sum_{\mu=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] \right\} = 0.$$

Par conséquent, les équations du mouvement sont

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + Q_r^0 - \sum_{\mu=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, s).$$

Comme

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} = \frac{\partial \omega'_\mu}{\partial q'_r} - 2\,\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r},$$

les équations (15) prennent la forme

$$(15')\qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + Q_r^0 - \sum_{\mu=1}^{s} \left(\frac{\partial \omega'_\mu}{\partial q'_r} - 2\,\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] = 0$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, s).$$

Si l'on pose

$$(16)\qquad K_\alpha = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \sum_{\mu=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu},$$

les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial q_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} + K_\alpha = \sum_{r=1}^{s} Q_r^0 \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}. \tag{17}$$

La différence

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}$$

est du premier degré par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$; alors en la calculant, tenant compte des équations (1), *elle devient une fonction du premier degré par rapport à* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. Il en suit que les équations (15) *ne contiennent pas* $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$, mais seulement les quantités $t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. Les équations différentielles (15), dont le nombre est s, sont du premier ordre par rapport à $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. Elles forment avec le système de s équations (1), un système de $2s$ équations différentielles du premier ordre qui sert à déterminer $q_1, q_2, \ldots, q_s$ et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ en fonction de t et de $2s$ constantes arbitraires.

Les équations (I) sont donc équivalentes au système d'équations (II) :

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial q_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} + K_\alpha = \sum_{r=1}^{s} Q_r^0 \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} && (\alpha = 1, 2, \ldots, s),\\ &q'_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\omega_\alpha + a_r && (r = 1, 2, \ldots, s)\end{aligned}\right.$$

avec

$$K_\alpha = \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \sum_{\mu=1}^{s} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right)\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu}.$$

2. Mais le système d'équations (II) *est équivalent à un autre système d'équations; autrement dit, les premières équations* (II) *peuvent être obtenues d'une autre façon.*

En effet comme [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T_0}}{\partial q'_r} - \frac{\partial \overline{T_0}}{\partial q_r} = \frac{\partial \overline{S_0}}{\partial q''_r}, \tag{18}$$

[1] Voir notre article *Quelques remarques sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes*, p. 4 (*Annuaire de l'Université de Sofia*, t. XV-XVI), ou bien *Journal de Math. pures et appliquées*, 1925.

S_0, la demi-énergie du système, étant fonction de $t, q_1, q_2, \ldots, q_s$, $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, q''_1, q''_2, \ldots, q''_s$. Alors l'équation générale de la dynamique (6) prend la forme

$$\sum_{r=1}^{s}\left[\frac{\partial \overline{S_0}}{\partial q''_r} - \overline{Q_r^0}\right]\delta q_r = 0. \tag{19}$$

On en tire les équations du mouvement sous la forme donnée par M. P. Appell

$$\frac{\partial \overline{S_0}}{\partial q''_r} = \overline{Q_r^0} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{III}$$

En tenant compte de (1) et (4), l'équation (19) devient

$$\sum_{r=1}^{s}\left[\frac{\partial \overline{S_0}}{\partial q''_r} - \overline{Q_r^0}\right]\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial q''_r}{\partial \omega'_\alpha}\delta p_\alpha = 0;$$

Si l'on désigne par S_0 la fonction de $t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s, \omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_s$, obtenue en remplaçant dans $\overline{S}_0$ les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s, q''_1, q''_2, \ldots, q''_s$ déterminées des équations (1), nous avons

$$\frac{\partial S_0}{\partial \omega'_\alpha} = \sum_{r=1}^{s}\frac{\partial \overline{S_0}}{\partial q''_r}\,\frac{\partial q''_r}{\partial \omega'_\alpha}.$$

En tenant compte de l'égalité ci-dessus, l'équation que nous avons écrite devient

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\delta p_\alpha\left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega'_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} Q_r^0\,\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\right) = 0,$$

et les équations du mouvement sont

$$\text{(IV)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial S_0}{\partial \omega'_\alpha} &= \sum_{r=1}^{s} Q_r^0\,\frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s),\\ q'_r &= \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\omega_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \end{aligned}\right.$$

qui sont équivalentes aux équations (II).

De la comparaison des équations (I) et (II) d'une part et (III) et (IV) d'autre part, il suit que *si l'on remplace* $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$ *par* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, *les équations de Lagrange changent de forme, tandis que celles de M. Appell ne la changent pas.*

D'autre part si l'on compare les premiers membres des équations (II) et (IV), on a

$$(20) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{s} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right)\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu}\right] = \frac{\partial S_0}{\partial \omega'_\alpha}.$$

Cette égalité est équivalente à l'égalité (18), qui correspond au cas où l'on a retenu les $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$.

3. On sait que les équations du mouvement (I) d'un système holonome s'obtiennent d'après le principe d'Hamilton, en partant de l'intégrale

$$\delta\mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\overline{\delta T_0} + \sum_{r=1}^{s} \overline{Q_r^0}\,\delta q_r\right) dt = 0;$$

$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ étant tout à fait arbitraires; *alors les équations* (II) *s'obtiendront de la même façon en partant de*

$$(21) \qquad \delta\mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T_0 + \sum_{r=1}^{s} Q_r^0\,\delta q_r\right) dt = 0,$$

à condition que

$$q'_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\omega_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, s),$$

et en supposant que $\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_s$ *sont arbitraires.*

En effet, T_0 étant fonction de $t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, on a

$$\delta T_0 = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha}\delta\omega_\alpha.$$

Mais en tenant compte des équations

$$q'_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\omega_\alpha + a_r,$$

nous avons vu, d'après les équations (13), que

$$\delta\omega_\alpha = \delta p'_\alpha = \frac{d}{dt}\delta p_\alpha - \sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q'_r} - \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q_r}\right)\delta q_r,$$

alors

$$\delta T_0 = \sum_{r=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\frac{d}{dt}\delta p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q'_r} - \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q_r}\right)\delta q_r.$$

D'autre part, comme

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\frac{d}{dt}\delta p_\alpha\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}d\,\delta p_\alpha = \left[\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\delta p_\alpha\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\delta p_\alpha\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}dt,$$

l'intégrale (21) prend la forme

$$\delta\mathfrak{I} = \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial q_r}\delta q_r + \sum_{r=1}^{s}Q_r^0\,\delta q_r - \sum_{\alpha=1}^{s}\delta p_\alpha\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\right.$$
$$\left. - \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q'_r} - \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q_r}\right)\delta q_r\right]dt = 0,$$

ou bien comme

$$\delta q_r = \sum_{\alpha=1}^{s} a_{r\alpha}\,\delta p_\alpha,$$

nous obtenons

$$\delta\mathfrak{I} = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\delta p_\alpha\left\{\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial q'_r}{\partial\omega_\alpha}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} + Q_r^0 - \sum_{\mu=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_r}\right)\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\mu}\right] - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial\omega_\alpha}\right\}dt = 0,$$

d'où se déduisent les équations (II).

4. *Appliquons maintenant les équations* (II) *pour résoudre certaines questions de la Mécanique.*

a. Écrire les équations générales du mouvement d'un corps solide de révolution ayant un point O (situé sur l'axe de révolution) fixe. Supposons que le mouvement du solide est rapporté aux axes fixes $Ox_1y_1z_1$ et que l'ellipsoïde d'inertie du point O est de révolution. Choisissons un système d'axes rectangulaires mobiles $Oxyz$, Oz étant l'axe de révolution, Ox étant la perpendiculaire au plan $z_1 O z$ et Oy perpendiculaire au plan xOz. On suppose que les deux trièdres ont la même orientation. Il est évident que Ox est dans le plan $x_1 O y_1$ et que la position du trièdre $Oxyz$, par rapport au trièdre $Ox_1y_1z_1$ est déterminée à chaque instant dès que l'on connaît les deux angles

$$\psi = \widehat{x_1 O x}, \qquad \theta = \widehat{z_1 O z},$$

en fonction du temps. Pour déterminer la position du corps par rapport au trièdre $Oxyz$, il suffit de déterminer en fonction du temps l'angle φ que fait une droite OA, invariablement liée au corps et située dans le plan $x\,Oy$, avec l'axe Ox.

Les trois coordonnées du corps sont

$$q_1 = \theta, \qquad q_2 = \psi, \qquad q_3 = \varphi.$$

La rotation instantanée du corps est la résultante des trois rotations θ', ψ', φ' autour des axes Ox, Oy, Oz respectivement et a pour projections sur les axes Ox, Oy, Oz

$$(22) \qquad p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta;$$

équations qui correspondent aux équations (2); les équations (1) dans ce cas sont

$$(23) \qquad \theta' = p, \qquad \psi' = \frac{q}{\sin\theta}, \qquad \varphi' = r - q \cot\theta.$$

Les quantités ω_α sont

$$\omega_1 = p, \qquad \omega_2 = q, \qquad \omega_3 = r.$$

La fonction T_0 est

$$2\,T_0 = A(p^2 + q^2) + C r^2;$$

comme elle ne contient pas φ, ψ, θ, tous les $\frac{\partial T_0}{\partial q_r}$ sont nuls. Nous avons

$$(24) \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \omega_1} = A p, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \omega_2} = A q, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \omega_3} = C r.$$

Calculons

$$K_\alpha = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \sum_{\mu=1}^{3} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Des équations (23), on tire

$$\frac{\partial q'_1}{\partial \omega_1} = 1, \qquad \frac{\partial q'_2}{\partial \omega_1} = 0, \qquad \frac{\partial q'_3}{\partial \omega_1} = 0,$$
$$\frac{\partial q'_1}{\partial \omega_2} = 0, \qquad \frac{\partial q'_2}{\partial \omega_2} = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \frac{\partial q'_3}{\partial \omega_2} = -\cot\theta,$$
$$\frac{\partial q'_1}{\partial \omega_3} = 0, \qquad \frac{\partial q'_2}{\partial \omega_3} = 0, \qquad \frac{\partial q'_3}{\partial \omega_3} = 1.$$

Et des équations (22) et (23), nous avons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_1}{\partial q'_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_2}{\partial q'_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial q_1} = -q\cot\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_3}{\partial q'_1} - \frac{\partial \omega_3}{\partial q_1} = q;$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_1}{\partial q'_2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_2}{\partial q'_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial q_2} = p\cos\theta, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_3}{\partial q'_2} - \frac{\partial \omega_3}{\partial q_2} = -p\sin\theta;$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_1}{\partial q'_3} - \frac{\partial \omega_1}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_2}{\partial q'_3} - \frac{\partial \omega_2}{\partial q_3} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_3}{\partial q'_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial q_3} = 0.$$

Alors

$$K_\alpha = \frac{\partial q'_1}{\partial \omega_\alpha}(-q\cot\theta\,A q + q\,C r) + \frac{\partial q'_2}{\partial \omega_\alpha}(p\cos\theta\,A q - p\sin\theta\,C r);$$

$$(25)\qquad \begin{cases} \text{pour } \alpha = 1, & \omega_1 = p, & K_1 = q(Cr - Aq\cot\theta), \\ \text{pour } \alpha = 2, & \omega_2 = q, & K_2 = -p(Cr - Aq\cot\theta), \\ \text{pour } \alpha = 3, & \omega_3 = r, & K_3 = 0, \end{cases}$$

Pour écrire les équations (II) il ne nous reste que de calculer les termes $\sum_{r=1}^{3} Q_r^0 \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha}$ pour $\alpha = 1, 2, 3$; ces quantités sont les coefficients de δp_1, δp_2, δp_3 dans l'expression du travail élémentaire des forces appliquées

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \sum_{\alpha=1}^{3} P_\alpha\,\delta p_\alpha.$$

On peut montrer facilement que P_1, P_2, P_3 sont respectivement les sommes des moments de ces forces par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. En effet, δp_1, δp_2, δp_3 sont les angles élémentaires auxquels il faut faire tourner le corps autour des axes pour l'amener d'une certaine position à la position infiniment voisine; p_1, p_2, p_3 seront trois angles fictifs. Alors $P_1\,\delta p_1$ est la somme des travaux virtuels des forces dans un déplacement élémentaire, obtenu en supposant p_2 et p_3 fixes, c'est-à-dire dans un mouvement de rotation autour de l'axe Ox. Mais on sait que, si un corps tourne d'un angle δp_1 autour de l'axe Ox, la somme des travaux virtuels des forces données est

$$P_1\,\delta p_1 = \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta p + Z\,\delta z) = \Sigma(yZ - zY)\,\delta p_1;$$

donc

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} P_1 &= \sum_{r=1}^{3} Q_r^0 \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_1} = \Sigma(yZ - zY) = L,\\ P_2 &= \sum_{r=1}^{3} Q_r^0 \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_2} = \Sigma(zX - xZ) = M,\\ P_3 &= \sum_{r=1}^{3} Q_r^0 \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_3} = \Sigma(xY - yX) = N. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent les équations (II), d'après (23), (24), (25) et (26) dans le cas actuel, sont :

$$\left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + q(Cr - Aq\cot\theta) = L,\\ &A\frac{dq}{dt} - p(Cr - Aq\cot\theta) = M,\\ &C\frac{dr}{dt} \qquad\qquad\qquad\qquad = N,\\ &p = \theta', \qquad q = \psi'\sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi'\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces équations ont été employées par Puiseux dans la théorie du mouvement de la Terre autour de son centre, par Resal et par Slesser.

b. Comme deuxième application des équations (II), proposons-nous de retrouver les équations bien connues d'Euler pour le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe.

Dans ce cas, la fonction T_0 est

$$2T_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

où

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi,\\ q &= \psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi,\\ r &= \psi'\cos\theta + \varphi'. \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\theta' = p\cos\varphi - q\sin\varphi,$$
$$\psi' = \frac{1}{\sin\theta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi),$$
$$\varphi' = r - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi).$$

Nous avons

$$\frac{\partial T_0}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial\psi} = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial\varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial T_0}{\partial p} = Ap, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial q} = Bq, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial r} = Cr,$$

puis

$$\frac{\partial\theta'}{\partial p} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial p} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial p} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial\theta'}{\partial q} = -\sin\varphi, \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial q} = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial q} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial\theta'}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 1.$$

On trouve facilement que

$$\begin{aligned} K_\alpha = {} & \frac{\partial\theta'}{\partial\omega_\alpha}[-r\sin\varphi\, Ap - r\cos\varphi\, Bq + (p\sin\varphi + q\cos\varphi)Cr] \\ & + \frac{\partial\psi'}{\partial\omega_\alpha}[(r\sin\theta\cos\varphi - q\cos\theta)Ap + (-r\sin\theta\sin\varphi + p\cos\theta)Bq \\ & \qquad\qquad + \sin\theta(q\sin\varphi - p\cos\varphi)Cr] \\ & + \frac{\partial\varphi'}{\partial\omega_\alpha}(-qAp + pBq). \end{aligned}$$

Pour

$$\alpha = 1, \qquad \omega_1 = p, \qquad K_1 = rq(C - B),$$
$$\alpha = 2, \qquad \omega_2 = q, \qquad K_2 = pr(A - C),$$
$$\alpha = 3, \qquad \omega_3 = r, \qquad K_3 = qp(B - A).$$

Les deuxièmes membres des équations (II) se calculent de la même façon que plus haut.

Les équations cherchées sont donc

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L,$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M,$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)qp = N,$$

avec les équations (27).

c. Prenons enfin un cas tout à fait concret. Nous prendrons l'exemple traité dans notre article *Mouvement sans frottement d'un corps pesant homogène de révolution sur un plan horizontal tournant uniformément autour d'un axe vertical fixe* (*Annuaire de l'Université de Sofia*, t. XIII-XIV), en ne considérant que le cas de glissement.

On rapporte le mouvement du corps aux axes fixes $Ox_1y_1z_1$. Par son centre de gravité $G[\xi, \eta, \zeta = f(\theta)]$, on mène des axes $Gxyz$ comme dans l'exemple *a*. En désignant par μ la vitesse angulaire constante avec laquelle tourne le plan horizontal, on trouve facilement que

$$\begin{aligned} 2\overline{T_0} = {} & M[(\xi' - \mu\eta)^2 + (\eta' + \mu\xi)^2] + M f'^2_{(\theta)}\theta'^2 + A\theta'^2 \\ & + A(\psi' \sin\theta + \mu \sin\theta)^2 + C(\psi' \cos\theta + \varphi' + \mu\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

avec

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Posons

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \xi' - \mu\eta, \\ \omega_2 &= \eta' + \mu\xi, \\ \omega_3 &= \theta' = p, \\ \omega_4 &= \psi' \sin\theta + \mu \sin\theta = q + \mu \sin\theta, \\ \omega_5 &= \psi' \cos\theta + \varphi' + \mu \cos\theta = r + \mu\cos\theta, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \xi' &= \omega_1 + \mu\eta, \\ \eta' &= \omega_2 - \mu\xi, \\ \theta' &= \omega_3, \\ \psi' &= \frac{\omega_4}{\sin\theta} - \mu, \\ \varphi' &= \omega_5 - \omega_4 \cot\theta. \end{aligned}$$

Alors

$$2T_0 = M(\omega_1^2 + \omega_2^2) + M f'^2_{(\theta)}\omega_3^2 + A\omega_3^2 + A\omega_4^2 + C\omega_5^2.$$

Dans ce cas T_0 contient θ, dans $f'(\theta)$. Nous avons

$$\frac{\partial T_0}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \theta} = M f'_{(\theta)} f''_{(\theta)} p^2, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \omega_1} = M\omega_1, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \omega_2} = M\omega_2, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \omega_3} = (M f'^2_{(\theta)} + A)\omega_3,$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \omega_4} = A\omega_4, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial \omega_5} = C\omega_5.$$

Il est facile de voir que

$$K_\alpha = \frac{\partial\xi'}{\partial\omega_\alpha}(-\mu M\omega_2) + \frac{\partial\eta'}{\partial\omega_\alpha}(\mu M\omega_1) + \frac{\partial\theta'}{\partial\omega_\alpha}(-\omega_4\cot\theta\, A\omega_4 + \omega_4 C\omega_5)$$
$$+ \frac{\partial\psi'}{\partial\omega_\alpha}(\omega_3\cos\theta\, A\omega_4 - \omega_3\sin\theta\, C\omega_5).$$

Pour

$$\begin{aligned}
&\alpha = 1, && K_1 = -M\mu\omega_2,\\
&\alpha = 2, && K_2 = \quad M\mu\omega_2,\\
&\alpha = 3, && K_3 = -A\omega_4^2\cot\theta + C\omega_4\omega_5,\\
&\alpha = 4, && K_4 = (A\omega_3\omega_4\cos\theta - C\omega_3\omega_5\sin\theta)\frac{1}{\sin\theta},\\
&\alpha = 5, && K_5 = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent les équations du mouvement sont

$$M\frac{d\omega_1}{dt} - M\mu\omega_2 = 0,$$

$$M\frac{d\omega_2}{dt} + M\mu\omega_1 = 0,$$

$$(Mf'^2 + A)\frac{d\omega_3}{dt} + 2Mf'f''\omega_3^2 - Mf'f''\omega_3^2 - A\omega_4^2\cot\theta + C\omega_4\omega_5 = -Mgf',$$

$$A\sin\theta\frac{d\omega_4}{dt} + A\omega_3\omega_4\cos\theta - C\omega_3\omega_5\sin\theta = 0,$$

$$C\frac{d\omega_5}{dt} = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \omega_5 = \text{const.} = K. \tag{28}$$

La quatrième équation s'écrit

$$A\sin\theta\frac{d\omega_4}{dt} + A\frac{d\theta}{dt}\omega_4\cos\theta - C\frac{d\theta}{dt}K\sin\theta = \frac{d}{dt}[A\sin\theta\,\omega_4 + CK\cos\theta] = 0$$

ou bien

$$A\omega_4\sin\theta + CK\cos\theta = K_1,$$

d'où

$$\omega_4 = \frac{K_1 - CK\cos\theta}{A\sin\theta}. \tag{29}$$

Les deux premières équations donnent

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \quad c\cos\mu t + d\sin\mu t,\\ \omega_2 &= -c\sin\mu t + d\cos\mu t.\end{aligned}\right. \tag{30}$$

La troisième équation peut être remplacée par l'intégrale des forces vives dans le mouvement absolu

$$T_0 = - M g f(\theta) + h_1$$

ou bien

$$(31) \quad M(\omega_1^2 + \omega_2^2) + (M f'^2_{(\theta)} + A)\omega_3^2 + A\omega_4^2 + C\omega_5^2 = -2Mg f(\theta) + h_2.$$

D'après les équations (30)

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = c^2 + d^2 = \text{const.}$$

Alors en tenant compte des équations (28) et (29), l'équation (31) prend la forme

$$(32) \quad (A + M f'^2_{(\theta)})\omega_3^2 + \frac{1}{A}\left(\frac{k_1 - CK\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = -2Mg f(\theta) + h.$$

On a obtenu ainsi cinq intégrales premières (30), (28), (29) et (32), les valeurs de ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 étant données plus haut; et l'on peut les discuter facilement.

II.

5. Nous avons vu que si toutes les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ sont arbitraires, les équations du mouvement (I) d'un système non holonome s'obtiennent de l'équation générale de la dynamique (6).

Supposons maintenant qu'il existe entre les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_s$, p relations ($p < s$) qui, résolues par rapport à $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$, sont de la forme

$$(33) \qquad q'_{k+i} = \sum_{r=1}^{k} c_{ri} q'_r + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

c_{ri}, c_i étant des fonctions de t, $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ $(k + p = s)$.

Alors les variations $\delta q_{k+1}, \ldots, \delta q_{k+p}$ sont déterminées par les équations

$$(34) \qquad \delta q_{k+i} = \sum_{r=1}^{k} c_{ri}\, \delta q_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

seules les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ restent arbitraires.

L'équation générale de la dynamique (6) prend la forme

$$\sum_{r=1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{T_0}}{\partial q'_r}-\frac{\partial\overline{T_0}}{\partial q_r}\right]\delta q_r+\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{T_0}}{\partial q'_{k+i}}-\frac{\partial\overline{T_0}}{\partial q_{k+i}}\right]\delta q_{k+i}$$
$$=\sum_{r=1}^{k}\overline{Q_r^0}\,\delta q_r+\sum_{i=1}^{p}Q_{k+i}^0\,\delta q_{k+i},$$

ou bien en tenant compte des équations (18), (33) et (34), on peut l'écrire sous les deux formes différentes que voici :

$$\sum_{r=1}^{k}\delta q_r\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{T_0}}{\partial q'_r}-\frac{\partial\overline{T_0}}{\partial q_r}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial\overline{S_0}}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_r}\right)=\sum_{r=1}^{k}\delta q_r\left(\overline{Q_r^0}+\sum_{i=1}^{p}\overline{Q_{k+i}^0}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_r}\right),$$

$$\sum_{r=1}^{k}\delta q_r\left(\frac{\partial\overline{S_0}}{\partial q''_r}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial\overline{S_0}}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_r}\right)=\sum_{r=1}^{k}\delta q_r\left(\overline{Q_r^0}+\sum_{i=1}^{p}\overline{Q_{k+i}^0}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_r}\right).$$

Si l'on designe par $\overline{S}_1$ la fonction $\overline{S}_0$ considérée comme fonction des $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ seulement, mais ayant en vue que $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ sont déterminés par les équations (33), on aura

$$\frac{\partial\overline{S_1}}{\partial q''_r}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial\overline{S_0}}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_r};$$

d'autre part, si l'on désigne par $\overline{S}$ la demi-énergie d'accélérations du système, $\overline{S}$ s'obtenant de $\overline{S}_0$ en tenant compte des équations (33), on aura

$$\frac{\partial\overline{S}}{\partial q''_r}=\frac{\partial\overline{S_0}}{\partial q''_r}+\frac{\partial\overline{S_1}}{\partial q''_r};$$

et enfin, si l'on pose

$$\overline{Q_r}=\overline{Q_r^0}+\sum_{i=1}^{p}\overline{Q_{k+i}^0}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_r},$$

$\overline{Q_r}$ étant le coefficient de δq_r dans l'expression qui donne la somme des travaux virtuels des forces données, en tenant compte de toutes les liaisons imposées au système.

Avec ces notations, les deux formes de l'équation générale de la dynamique trouvées ci-dessus deviennent

$$\sum_{r=1}^{k} \delta q_r \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q'_r} - \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_r} + \frac{\partial \overline{S}_1}{\partial q''_r} \right] = \sum_{r=1}^{k} \overline{Q}_r \delta q_r,$$

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial \overline{S}}{\partial q''_r} \delta q_r = \sum_{r=1}^{k} \overline{Q}_r \delta q_r;$$

$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ étant arbitraires, les équations du mouvement sont

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \overline{T}_0}{\partial q'_r} - \dfrac{\partial \overline{T}_0}{\partial q_r} + \dfrac{\partial \overline{S}_1}{\partial q''_r} = \overline{Q}_r & (r = 1, 2, \ldots, k), \\ q'_{k+i} = \displaystyle\sum_{r=1}^{k} c_{ri} q'_r + c_i & (i = 1, 2, \ldots, p), \end{cases}$$

ou bien

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{S}}{\partial q''_r} = \overline{Q}_r & (r = 1, 2, \ldots, k), \\ q'_{k+i} = \displaystyle\sum_{r=1}^{k} c_{ri} q'_r + c_i & (i = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Ce sont les équations générales du mouvement d'un système matériel non holonome. Les équations (V) ont été trouvées par nous [1] et les équations (VI) par M. P. Appell [2].

Si l'on désigne par $\overline{T}$ la demi-force vive du système, en tenant compte des équations (33), alors les équations (V) sont remplacées par

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q'_r} - \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q_r} + \dfrac{\partial \overline{T}_1}{\partial q_r} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \overline{T}_1}{\partial q'_r} + \dfrac{\partial \overline{S}_1}{\partial q''_r} = \overline{Q}_r, \\ q'_{k+i} = \displaystyle\sum_{r=1}^{k} c_{ri} q'_r + c_i, \end{cases}$$

la fonction $\overline{T}_1$ ayant une signification analogue à celle de $\overline{S}_1$.

---

(1) Voir *Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes* (*Annuaire de l'Université de Sofia*, t. XV-XVI), ou bien *Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. III, 1920), ou bien *Mathematische Annalen*, Band 91, 1924.

(2) *Développement sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique* *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1900).

6. Nous allons montrer maintenant *par quel système d'équations on peut remplacer les équations* (V) *et* (VII), *lorsque, en se servant des relations* (1), *on substitue aux* $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k, \ldots, q'_{k+p=s}$ *les quantités* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_{k+p=s}$ *et que les relations non holonomes déterminées par les équations* (33), *nous conduisent aux équations*

$$(35)\qquad \omega_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i}\omega_\alpha + d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

ou

$$(35')\qquad p'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i} p'_\alpha + d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

d_{ri}, d_i étant des fonctions de t et des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p=s}$ du système matériel non holonome.

De ces dernières équations, on tire

$$(36)\qquad \delta p_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i}\,\delta p_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Alors l'équation générale de la dynamique (14) s'écrit de la sorte

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{k} \delta p_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{k+p} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \delta p_{k+i} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_{k+i}} - \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_{k+i}} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{k+p} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] \right\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{k} \delta p_\alpha \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} Q^0_r + \sum_{i=1}^{p} \delta p_{k+i} \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_{k+i}} Q^0_r,
\end{aligned}$$

ou bien en tenant compte de (20), (35) et (36), cette équation peut s'écrire sous les deux formes différentes que voici

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{k} \delta p_\alpha \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{k+p} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S_0}{\partial \omega'_{k+i}} \frac{\partial \omega'_{k+i}}{\partial \omega'_\alpha} \right\} = \sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha\, \delta p_\alpha
\end{aligned}$$

ou bien

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \delta p_\alpha \left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega'_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S_0}{\partial \omega_{k+i}} \frac{\partial \omega'_{k+i}}{\partial \omega'_\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^{k} P_\alpha \, \delta p_\alpha,$$

P_α étant le coefficient de δp_α dans l'expression de la somme des travaux virtuels des forces données, en tenant compte de toutes les liaisons imposées au système.

Désignons par S_1 la fonction S_0 considérée comme fonction des $\omega'_{k+1}, \ldots, \omega'_{k+p}$ seulement, ces quantités étant déterminées en fonction des $\omega'_1, \ldots, \omega'_k$ au moyen des équations (35); alors

$$\frac{\partial S_1}{\partial \omega'_\alpha} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S_0}{\partial \omega'_{k+i}} \frac{\partial \omega'_{k+i}}{\partial \omega'_\alpha};$$

d'autre part désignons par S la fonction S_0, en tenant compte des équations (35); nous obtenons alors

$$\frac{\partial S}{\partial \omega'_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial \omega'_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S_0}{\partial \omega'_{k+i}} \frac{\partial \omega'_{k+i}}{\partial \omega'_\alpha}.$$

En introduisant les fonctions S_1 et S, les deux formes différentes de l'équation générale de la dynamique ($\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_k$ étant arbitraires) donnent les équations du mouvement

$$(\text{VIII}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\partial T_0}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{k+p} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] + \frac{\partial S_1}{\partial \omega'_\alpha} = P_\alpha \\ & \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \\ & q'_r = \sum_{\alpha=1}^{k+p} a_{r\alpha} \omega_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k, \ldots, k+p), \\ & \omega_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i} \omega_\alpha + d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(\text{IX}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial \omega'_\alpha} = P_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \\ & q'_r = \sum_{\alpha=1}^{k+p} a_{r\alpha} \omega_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k, \ldots, k+p), \\ & \omega_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i} \omega_\alpha + d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p); \end{aligned} \right.$$

de cette façon, nous avons $k+k+p+p=2k+2p$ équations en tout, pour déterminer les $2k+2p$ inconnues $q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$; $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_{k+p}$, en fonction du temps t.

Les équations (V) et (VI) sont remplacées par les équations (VIII) et (IX) respectivement. On voit que *les équations de M. Appell ne changent pas leur forme* quand on fait ce changement de variables.

Si l'on désigne par T_1 la fonction T_0, considérée comme fonction des $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+p}$ seulement, ces quantités étant déterminées par les équations (35); d'autre part, si l'on désigne par T la demi-force vive du système non holonome, c'est-à-dire T n'est autre chose que la fonction T_0, si l'on tient compte des équations (35); nous avons alors

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial T_0}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial \omega_{k+i}} \frac{\partial \omega_{k+i}}{\partial q_r} = \frac{\partial T_0}{\partial q_r} + \frac{\partial T_1}{\partial q_r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial T_0}{\partial \omega_{k+i}} \frac{\partial \omega_{k+i}}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial \omega_\alpha}.$$

En introduisant les fonctions T et T_1, les équations (VIII) prennent la forme

$$\text{(X)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\alpha} - \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \left[\frac{\partial T}{\partial q_r} - \sum_{\mu=1}^{k+p} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu} \right] \\ & \qquad + \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \omega_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial \omega'_\alpha} = P_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \\ & q'_r = \sum_{\alpha=1}^{k+p} a_{r\alpha}\omega_\alpha + a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k, \ldots k+p), \\ & \omega_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i}\omega_\alpha + d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Au n° 1, nous avons remarqué que la différence

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}$$

est une fonction du premier degré en $q'_1, \ldots, q'_{k+p}$; alors d'après le second groupe des équations (X), elle sera une fonction linéaire en $\omega_1, \ldots, \omega_{k+p}$; la fonction $\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu}$ jouit de la même propriété. Alors d'après le troisième groupe des équations (X), le produit

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right)\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu}$$

sera une fonction du second degré en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

Les équations (X) remplacent les équations (VIII).

Quand on veut se servir des équations (VIII) ou (X), on commence par calculer le terme

$$K_\alpha = \sum_{r=1}^{k+p} \frac{\partial q'_r}{\partial \omega_\alpha} \sum_{\mu=1}^{k+p} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega_\mu}{\partial q'_r} - \frac{\partial \omega_\mu}{\partial q_r}\right)\frac{\partial T_0}{\partial \omega_\mu};$$

le calcul des autres termes de ces équations ne présente aucune difficulté.

7. Nous allons maintenant faire une adaptation du principe d'Hamilton pour obtenir les équations (VIII) et (X).

Dans notre article *Sur le principe d'Hamilton, adapté aux systèmes non holonomes*, inséré dans l'*Annuaire de l'Université de Sofia*, t. XV-XVI, nous avons montré que les équations du mouvement (V) peuvent être obtenues au moyen de l'intégrale

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left(\delta \overline{T}_0 + \sum_{r=1}^{k+p} \overline{Q_r^0}\,\delta q_r\right) dt = 0,$$

à condition que

$$(37) \qquad \delta q_{k+i} = \sum_{r=1}^{k} c_{ri}\,\delta q_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ étant tout à fait arbitraires. $\overline{T}_0$ représente la demi-force vive du système, en considérant tous les $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k, \ldots, q'_{k+p}$ comme étant indépendants; alors après la transformation de l'intégrale ci-dessus en tenant compte des équations (37), on arrive aux équations du mouvement (V).

Comme les équations (V) sont remplacées par les équations (VIII), ces dernières équations s'obtiendront de l'intégrale

$$\delta \mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T_0 + \sum_{r=1}^{k+p} Q_r^0 \, \delta q_r \right) dt = 0,$$

à condition que

$$\delta q_r = \sum_{\alpha=1}^{k+p} a_{r\alpha} \, \delta p_\alpha \qquad (r = 1, 2, \ldots, k+p),$$

$$(38) \qquad \delta p_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i} \, \delta p_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_k$ étant tout à fait arbitraires. Dans la fonction T_0, nous considérons tous les $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_{k+p}$ comme indépendants; après la transformation de l'intégrale ci-dessus, on tient compte des équations (38) et l'on arrive aux équations du mouvement (VIII). Ceci est évident d'après les nos 3 et 6.

D'autre part, désignons par $\overline{T}_1^0$ la fonction $\overline{T}_0$ considérée comme fonction des $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$ seulement.

Alors $\overline{T}_1$ n'est autre chose que la fonction $\overline{T}_1^0$ si l'on tient compte des équations (33). Comme on a

$$\overline{T_0} = \overline{T} - \overline{T_1} + \overline{T}_1^0,$$

nous avons montré que les équations du mouvement (VII) s'obtiennent par l'intégrale

$$\delta \mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(\overline{T} - \overline{T}_1 + \overline{T}_1^0) + \sum_{r=1}^{k+p} \overline{Q_r^0} \, \delta q_r \right] dt = 0,$$

à condition que

$$\delta q_{k+i} = \sum_{r=1}^{k} c_{ri} \, \delta q_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ étant tout à fait arbitraires.

Comme les équations (VII) sont remplacées par (X), ces dernières équations s'obtiendront de l'intégrale

$$\delta \mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(T - T_1 + T_1^0) + \sum_{r=1}^{k+p} Q_r^0 \, \delta q_r \right] dt = 0,$$

à condition que

$$\delta q_r = \sum_{\alpha=1}^{k+p} a_{r\alpha}\,\delta p_\alpha \qquad (r = 1, 2, \ldots, k+p),$$

$$\delta p_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{\alpha i}\,\delta p_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_k$ étant arbitraires.

Remarquons que quand on calcule les deux dernières intégrales, il faut tenir compte des équations (13).

8. Dans nos travaux indiqués au n° 5, nous avons appliqué les équations (V) à certains problèmes de roulement sans glissement d'un corps solide. Nous allons maintenant appliquer nos équations (X) et (VIII) pour traiter deux problèmes.

Dans les problèmes de ce genre, les équations (V), (VIII) et (X) conduisent à des calculs plus simples, parce que la fonction T_0 se calcule facilement, de même que la fonction S_1 qui désigne, dans ce cas, la demi-énergie d'accélérations de toute la masse du corps, concentrée au centre de gravité.

a. Trouver les équations du mouvement d'une circonférence homogène de rayon a et de masse $= 1$, qui roule sans frottement sur un plan horizontal fixe [1].

Dans le plan $x_1 O_1 y_1$ on prend deux axes fixes $O_1 x_1$ et $O_1 y_1$, et par le point O_1 on mène un axe $O_1 z_1$, perpendiculaire au plan et dirigé vers le haut. Par le centre de gravité G de la circonférence, on mène trois axes $Gx'_1 y'_1 z'_1$ parallèles à $O_1 x_1 y_1 z_1$. Soit Gx la droite d'intersection du plan de la circonférence avec lé plan $x'_1 G y'_1$; soit Gy l'axe passant par G et le point de contact H de la circonférence avec le plan $x_1 O_1 y_1$; enfin soit Gz l'axe du cerceau. Si l'on désigne par GA une droite invariablement liée à la circonférence et située dans son plan, la position de la circonférence autour de G est déterminée par les angles

$$\widehat{x'_1 x} = \psi, \qquad \widehat{x A} = \varphi, \qquad \widehat{z'_1 z} = \theta.$$

---

[1] P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II.

Les composantes de la rotation instantanée du trièdre $Gxyz$ suivant les axes sont

$$P = \theta', \qquad Q = \psi' \sin\theta, \qquad R = \psi' \cos\theta,$$

et celles de la rotation instantanée du corps dans son mouvement autour de G suivant les mêmes axes sont

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Alors

$$P = p, \qquad Q = q, \qquad R = q \cot\theta.$$

u, v, w étant les projections sur les axes $Gxyz$ de la vitesse du point $G(\xi, \eta, \zeta)$, pour écrire que la circonférence roule sur le plan $x_1 O_1 y_1$, il faut exprimer que la vitesse du point matériel $H(0, -a, 0)$ est nulle; nous avons donc

$$(39) \qquad u = -ar, \qquad v = 0, \qquad w = ap.$$

Appliquons maintenant les équations (X). Prenons pour ω_r les quantités u, v, w, p, q, r. Dans ce cas les équations (1), c'est-à-dire le second groupe des équations (X), sont

$$(40) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi' = u\cos\psi - v\sin\psi\cos\theta + w\sin\psi\sin\theta, \\ \eta' = u\sin\psi + v\cos\psi\cos\theta - w\cos\psi\sin\theta, \\ \zeta' = \qquad\qquad v\sin\theta \qquad + w\cos\theta, \\ \theta' = p, \qquad \psi' = \dfrac{q}{\sin\theta}, \qquad \varphi' = r - q\cot\theta; \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = \xi'\cos\psi + \eta'\sin\psi, \\ v = (-\xi'\sin\psi + \eta'\cos\psi)\cos\theta + \zeta'\sin\theta, \\ w = (\xi'\sin\psi - \eta'\cos\psi)\sin\theta + \zeta'\cos\theta, \\ p = \theta', \qquad q = \psi'\sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi'\cos\theta, \end{array} \right.$$

et les équations (35), c'est-à-dire le troisième groupe des équations (X) sont, dans ce cas, les équations (39) écrites plus haut.

Les fonctions T_0, T_1, T, S_1 sont évidemment

$$\begin{aligned} 2T_0 &= u^2 + v^2 + w^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2, \\ 2T_1 &= u^2 + v^2 + w^2 + a^2(p^2 + r^2), \\ 2T\ &= (A + a)p^2 + Aq^2 + (C + a^2)r^2, \\ 2S_1 &= (u' + qw)^2 + (w' - qu)^2 + \ldots = a[(-r' + qp)^2 + (p' + qr)^2] + \ldots \end{aligned}$$

On obtient facilement, pour les termes $K_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$, les valeurs

$$K_1 = -q \cot\theta \, A q + q C r,$$
$$K_2 = A p q \cot\theta - C p r,$$
$$K_0 = 0.$$

Par conséquent, les équations du mouvement sont

$$(A + a^2) p' - q (A q \cot\theta - C r) + a^2 q r = -g a \cos\theta,$$
$$A q' + p (A q \cot\theta - C r) = 0,$$
$$(C + a^2) r' - a^2 p q = 0.$$

Si nous nous étions servis des équations (VIII), nous serions arrivés plus vite aux équations cherchées, ce qu'on peut voir sur l'exemple suivant.

b. Trouver les équations du mouvement d'un corps solide pesant, de révolution qui roule sur un plan horizontal fixe (¹).

On rapporte le mouvement du corps à trois axes fixes $O_1 x_1 y_1 z_1$ orientés comme dans l'exemple précédent. Soit Gz l'axe de révolution du corps, passant par le centre de gravité G et menons, comme dans l'exemple précédent, les axes $G x'_1 y'_1 z'_1$. Choisissons un axe horizontal Gx, perpendiculaire au plan vertical $z'_1 G z$ et un autre axe Gy, perpendiculaire au plan xGz. De cette façon, on forme le trièdre trirectangle $Gxyz$ comme dans l'exemple précédent.

Comme le corps roule sur le plan horizontal, la vitesse du point de contact H est nulle. Les coordonnées de ce point par rapport aux axes $Gxyz$ sont

$$x = 0,$$
$$y = -f(\theta) \sin\theta - f'(\theta) \cos\theta,$$
$$z = -f(\theta) \cos\theta - f'(\theta) \sin\theta,$$

$f(\theta)$ désignant la distance du point G au plan horizontal.

Si l'on introduit les mêmes notations que plus haut, nous aurons

$$(42) \qquad u = r y - q z, \qquad v = p z, \qquad w = -p y.$$

Les équations (40) et (41) sont valables pour cet exemple aussi.

(¹) P. Appell, *Développement sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1900, p. 33).

Les fonctions T_0 et S_1 sont évidemment

$$2T_0 = M(u^2 + v^2 + w^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2,$$
$$2S_1 = M[(u' + qw - qv\cot\theta)^2 + (v' + qu\cot\theta - pw)^2 + (w' + pv - qu)^2],$$

u, v, w devant être remplacés par leurs valeurs (42).

Les valeurs de $K_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$ sont les mêmes que plus haut.

Nous allons appliquer les équations du mouvement (VIII) pour écrire les équations en q et r. (L'équation en p sera remplacée par l'intégrale des forces vives.)

Ces deux équations se trouvent immédiatement :

$$Aq' + p(Aq\cot\theta - Cr) - M(u' + qw - qv\cot\theta)z = 0,$$
$$Ar' + M(u' + qw - qv\cot\theta)y = 0.$$

Ce sont bien les équations trouvées par M. P. Appell.