BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JUVET

Sur le déplacement parallèle le plus général et sur l'étude des courbes tracées dans une multiplicité quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 60-74
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__60_0>

UR LE DÉPLACEMENT PARALLÈLE LE PLUS GÉNÉRAL ET SUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES DANS UNE MULTIPLICITÉ QUELCONQUE;

PAR M. GUSTAVE JUVET.
(Neuchâtel.)

Dans un Mémoire paru en 1922, dans la *Mathematische Zeitschrift*, M. J.-A. Schouten [1] a indiqué les diverses espèces de déplacements parallèles possibles, ou plutôt, il a indiqué toutes les manières de définir la dérivée covariante d'un champ quelconque dans une variété à n dimensions. En écrivant que la dérivée covariante d'un champ est nulle le long d'une courbe, on définit ainsi le transport (ou déplacement) parallèle du tenseur considéré, d'un point de la courbe à un autre. Nous ne nous occuperons dans ce Mémoire que des champs vectoriels contravariants et nous montrerons qu'on peut tirer des considérations purement analytiques de M. J.-A. Schouten, un certain nombre de remarques géométriques intéressantes.

1. Rappelons rapidement les résultats de M. J.-A. Schouten. Soit une variété V_n rapportée à un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. La dérivée covariante $\xi^\nu/_\mu$ la plus générale d'un champ vectoriel contravariant ξ^ν est le tenseur de composantes :

$$\xi^\nu/_\mu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\xi^\lambda; \tag{1}$$

les $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ sont les composantes d'un pseudo-tenseur mixte, définies par les égalités suivantes :

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\} + T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu},$$

les $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\}$ étant les symboles de Christoffel de deuxième espèce,

---

(1) J.-A. SCHOUTEN, *Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können* (*Math. Zeits.*, t. XIII, 1922).

construits à partir du tenseur fondamental ou tenseur métrique, de composantes covariantes $g_{\lambda\mu}$ et de composantes contravariantes $g^{\lambda\mu}$ $\left(g^{\lambda\mu} = \frac{\text{mineur de } g_{\lambda\mu} \text{ dans le déterminant } |g_{\lambda\mu}|}{|g_{\lambda\mu}|}\right)$ et les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ étant les composantes d'un tenseur. Ce tenseur se définit à l'aide de deux tenseurs donnés : l'un $Q_{\mu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}$ qui est la dérivée covariante générale, donnée *a priori*, du champ $g^{\alpha\beta}$:

$$Q_{\mu}^{\cdot\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}/\mu \qquad [Q_{\mu}^{\cdot\alpha\beta} = Q_{\mu}^{\cdot\beta\alpha}],$$

l'autre symétrique gauche

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}),$$

qui a une signification géométrique simple. La définition des $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ est la suivante :

$$(2) \qquad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\beta}Q_{\mu}^{\cdot\nu\beta} + g_{\mu\alpha}Q_{\lambda}^{\cdot\alpha\nu} - g^{\nu\varkappa}g_{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}Q_{\varkappa}^{\cdot\alpha\beta})$$
$$- g^{\nu\varkappa}(g_{\lambda\alpha}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\alpha} + g_{\mu\alpha}S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}) + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$$

ou si l'on préfère

$$(2') \qquad T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(Q_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + Q_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} - Q_{\cdot\lambda\mu}^{\nu}) - S_{\cdot\mu\lambda}^{\nu} - S_{\cdot\lambda\mu}^{\nu} + S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

On a d'ailleurs :

$$(3) \qquad g_{\lambda\varkappa}\Gamma_{\nu\beta}^{\varkappa} + g_{\varkappa\nu}\Gamma_{\lambda}^{\varkappa\nu} = \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + g_{\lambda\beta}g_{\nu\alpha}Q_{\mu}^{\cdot\alpha\beta}.$$

Si l'on imagine un vecteur contravariant $\Xi_0(\xi_{(0)}^{\nu})$ en un point P_0 de la variété donnée, et si par P_0 on fait passer une courbe Γ, d'équations $x_i = x_i(s)$, le champ $\xi^{\nu}(s)$ défini sur Γ, par les équations

$$(4) \qquad \frac{d\xi^{\nu}}{ds} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}\xi^{\lambda}\frac{dx^{\mu}}{ds} = 0,$$

et par la condition qu'au point P_0, ce champ ait les composantes $\xi_{(0)}^{\nu}$, on dira que le vecteur Ξ ainsi défini en chaque point P de la courbe est le vecteur Ξ_0 transporté parallèlement à lui-même de P_0 en P et le long de Γ [1].

---

[1] Il y a encore dans le Mémoire de M. Schouten, quelques subtilités relatives à la « mesure covariante » dont le sens nous échappe.

2. On peut donner dès lors, de la dérivée covariante généralisée, une interprétation utile pour la suite. Nous dirons qu'un vecteur déplacé parallèlement d'un point $P(x_1, \ldots, x_n)$ au point $P'(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$ reste « congru à lui-même », ou reste « le même vecteur » ; cela permet ainsi de comparer lorsqu'on se donne arbitrairement un champ de vecteurs dans la V_n, les vecteurs en P aux vecteurs en P'. En effet, soit un champ $\eta^\nu(x_1, \ldots, x_n)$; en $P'(x_i + dx_i)$ le champ a pour composantes

$$\eta^\nu(x_i + dx_i) = \eta^\nu + \frac{\partial \eta^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

Or, si l'on transporte le champ de P en P' parallèlement à lui-même, il est en P' : $\eta^\nu + \delta\eta^\nu$ avec

$$\delta\eta^\nu = - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \eta^\lambda dx^\mu ;$$

la différence du champ en P' et du champ transporté est le vecteur :

$$\left[\frac{\partial \eta^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \eta^\lambda\right] dx^\mu = \eta^\nu /_\mu dx^\mu.$$

Cette manière de concevoir la dérivée covariante nous permettra d'employer une méthode qui est la généralisation de la méthode de n-èdre mobile.

3. On peut encore donner du déplacement parallèle une signification géométrique intéressante. Au corps de vecteurs en P, c'est-à-dire à l'ensemble des vecteurs attachés au point P, on fait correspondre, vecteur par vecteur, l'ensemble des vecteurs attachés au point P', infiniment voisin, et cette correspondance est linéaire, c'est-à-dire qu'elle fait correspondre à la somme de deux vecteurs $\Xi + H$ attachés en P, le vecteur $\Xi' + H'$, en P' qui est la somme des deux vecteurs qui correspondent respectivement à Ξ et H, soient Ξ' et H'. Cette correspondance linéaire est alors définie de la manière suivante. Si Ξ a pour composantes ξ^ν, Ξ', aura pour composantes $\xi^\nu + \delta\xi^\nu$ avec

$$\delta\xi^\nu = - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \xi^\lambda dx^\mu.$$

Remarquons que si l'on rapporte l'ensemble des vecteurs en P, à n vecteurs de base $\Xi_{(1)}, \Xi_{(2)}, \ldots, \Xi_{(n)}$, et l'ensemble des vecteurs en P' aux n vecteurs de base $\Xi'_{(1)}, \Xi'_{(2)}, \ldots, \Xi'_{(n)}$ correspondant aux précédents, un vecteur Ξ attaché en P, de composantes $\alpha_{(p)}$ par rapport aux n vecteurs de base en P, aura comme correspondant en P', le vecteur Ξ' de composantes $\alpha_{(p)}$ par rapport aux n vecteurs de base en P'. Cela résulte de la théorie générale des transformations linéaires. Car si Ξ est le vecteur $\sum\limits_p \alpha_{(p)} \Xi_{(p)}$, les composantes ξ^ν s'exprimeront en fonction des composantes $\xi^\nu_{(p)}$ des $H_{(p)}$, par les relations

$$\xi^\nu = \sum_{(p)} \alpha_{(p)} \xi^\nu_{(p)};$$

or, supposons que le vecteur Ξ' correspondant à Ξ ait ses composantes ξ'^ν, liées à celles de Ξ par les relations

$$\xi'^\nu = \sum_\lambda A^\nu_\lambda \xi^\lambda,$$

et que l'on ait, en résolvant ces équations

$$\xi^\lambda = \sum_\rho a^\lambda_\rho \xi'^\rho$$

avec, comme on sait,

$$\sum_\lambda A^\nu_\lambda a^\lambda_\rho = \sum_\lambda A^\lambda_\rho a^\nu_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \rho, \\ 0 & \text{si } \nu \neq \rho. \end{cases}$$

De plus, désignons par $\alpha'_{(p)}$ les composantes de Ξ' par rapport aux n vecteurs de base $\Xi'_{(1)}, \Xi'_{(2)}, \ldots, \Xi'_{(n)}$ correspondant à $\Xi_{(1)}, \Xi_{(2)}, \ldots, \Xi_{(n)}$, nous aurons

$$\Xi' = \sum_{(p)} \alpha'_{(p)} \Xi'_{(p)},$$

c'est-à-dire

$$\xi'^\nu = \sum_{(p)} \alpha'_{(p)} \xi'^\nu_{(p)};$$

cependant :

$$\xi'^\nu = \sum_\lambda A^\nu_\lambda \cdot \sum_p \alpha_{(p)} \xi^\lambda_{(p)} = \sum_{\lambda,\rho,p} A^\nu_\lambda \alpha_{(p)} a^\lambda_\rho \xi'^\rho_{(p)}$$

$$= \sum_{\rho,p} \left(\sum_\lambda A^\nu_\lambda a^\lambda_\rho \right) \alpha_{(p)} \xi'^\rho_{(p)} = \sum_p \alpha_{(p)} \xi'^\nu_{(p)};$$

ce qui veut dire que

$$\alpha_{(p)} = \alpha'_{(p)}.$$

4. Soit alors une courbe Γ tracée dans la multiplicité ; on peut se la donner par des équations paramétriques $x_i = x_i(t)$, et après avoir calculé, à partir d'un point pris pour origine des arcs, la quantité

$$s = \int_{P_0}^{P} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}\,dt,$$

on pourra exprimer les x_i en fonction de s. Soient alors $x_i = x_i(s)$, les équations paramétriques de Γ exprimées au moyen de l'arc s. En chaque point de la courbe Γ, nous allons définir un n-èdre rectangulaire, c'est-à-dire un système de n vecteurs perpendiculaires deux à deux. Pour cela nous utiliserons une méthode imaginée par M. Blaschke (¹) et que nous avons appliquée déjà à l'étude du déplacement au sens de M. Weyl (²). On définit tout d'abord n vecteurs $\Xi_{(1)}, \Xi_{(2)}, \ldots, \Xi_{(n)}$ par les relations suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\Xi_{(1)} & \text{a les composantes} & \xi^\nu_{(1)} = \dfrac{dx^\nu}{ds}, \\
\Xi_{(1)} & \text{»} & \xi^\nu_{(2)} = \theta\,\xi^\nu_{(1)} = \dfrac{d\xi^\nu_{(1)}}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,\xi^\lambda_{(1)}\,\dfrac{dx^\mu}{ds}, \\
\Xi_{(3)} & \text{»} & \xi^\nu_{(3)} = \theta\,\xi^\nu_{(2)} = \dfrac{d\xi^\nu_{(2)}}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,\xi^\lambda_{(2)}\,\dfrac{dx^\mu}{ds}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Xi_{(n)} & \text{»} & \xi^\nu_{(n)} = \theta\,\xi^\nu_{(n-1)} = \dfrac{d\xi^\nu_{(n-1)}}{ds} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\,\xi^\lambda_{(n-1)}\,\dfrac{dx^\mu}{ds}.
\end{array}\right.$$

On voit ainsi que le vecteur $\Xi_{(p)}$ a pour composantes

$$\xi^\nu_{(p-1)/\mu}\,\frac{dx^\mu}{ds}.$$

Nous disons que la courbe Γ est une *courbe générale* tracée dans la V_n, si les n vecteurs $\Xi_{(1)}, \ldots, \Xi_{(n)}$ sont linéairement indépendants. Ils forment un n-èdre dont les arêtes, en général, sont

(¹) M. Blaschke, *Frenets Formeln für den Raum von Riemann* (*Math. Zeits.*, t. VI, 1919).

(²) G. Juvet, *Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl* (*C. R. Ac. Sc.*, t. 172, 1921, p. 1647 et *Bulletin de la Société neuchâteloise des Sciences naturelles*, t. XLVI).

obliques l'une sur l'autre. On peut orthogonaliser et normer ce n-èdre en appliquant la formule de M. Schmidt.

Posons

$$g_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(p)}\xi^{\mu}_{(q)} = (p, q)$$

et

$$\begin{vmatrix} (1, 1) & \dots & (1, p) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ (p, 1) & \dots & (p, p) \end{vmatrix} = D_{(p)}, \qquad D_{(0)} = 1 ;$$

les n vecteurs de base du n-èdre rectangulaire sont les vecteurs $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(n)}$, les composantes de $H_{(p)}$ étant

$$(6) \quad \eta^{\nu}_{(p)} = \frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}} \begin{vmatrix} (1, 1) & \dots & (1, p-1) & \xi^{\nu}_{(1)} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ (p, 1) & \dots & (p, p-1) & \xi^{\nu}_{(p)} \end{vmatrix} \qquad (p = 1, 2, \dots, n).$$

On a bien dès lors :

$$g_{\lambda\mu}\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)} = 0 \qquad (\text{si } p \neq q),$$
$$g_{\lambda\mu}\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(p)} = 1.$$

Le vecteur $H_{(1)}$ est identique au vecteur $\Xi_{(1)}$, c'est un vecteur de longueur égale à l'unité; c'est la tangente à la courbe Γ au point considéré. Le vecteur $H_{(2)}$ est normal au précédent, on dira que c'est la première normale à la courbe Γ au point considéré, et ainsi de suite, jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ normale $H_{(n)}$.

Ces dénominations se justifient comme suit :

Dans une multiplicité euclidienne E_n, une courbe $\Gamma[x_i = x_i(s)]$ possède une tangente et $(n-1)$ normales qui se définissent de la manière suivante. La tangente est le vecteur de composantes $\xi^{\nu}_{(1)} = \frac{dx^{\nu}}{ds}$; la première normale est la limite du quotieut par Δs, de la variation qu'éprouve la tangente lorsqu'on la transporte parallèlement (au sens classique du mot) d'un point P au point voisin P' sur la courbe; c'est donc le vecteur $\xi^{\nu}_{(2)} = \theta^{0}\frac{dx^{\nu}}{ds} = \frac{d^2x^{\nu}}{ds^2}$, et ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ normale, dont les composantes sont $\xi^{\nu}_{(n)} = \theta^{0}\xi^{\nu}_{(n-1)} = \frac{d^n x^{\nu}}{ds^n}$. Ces n vecteurs sont déjà orthogonaux dans un espace euclidien; ils ne sont en général pas normés; en les normant, on obtient des vecteurs $H_{(p)}$ de longueur égale à l'unité dont les composantes sont les cosinus directeurs des arêtes du n-èdre principal attaché à la courbe.

Nous avons vu plus haut que le déplacement parallèle, au sens le plus général, permet de dire quand deux vecteurs situés en deux points voisins d'une variété quelconque sont congruents. En déplaçant ainsi le vecteur $\Xi_{(p)}$ de P en P′, en le comparant au vecteur $\Xi'_{(p)}$ en P′, on obtient bien un vecteur qui généralise ainsi le mieux du monde le vecteur de l'espace euclidien qui se trouve sur la $p^{\text{ième}}$ normale; en orthogonalisant, on obtient des vecteurs $H_{(p)}$ dont les composantes $\eta^{\nu}_{(p)}$ généralisent les cosinus directeurs, dont il est question plus haut.

5. En chaque point de la courbe Γ, nous avons défini un n-èdre orthogonal; nous l'appellerons le n-èdre principal de Γ, selon le déplacement parallèle admis, ou tout simplement le n-èdre principal, quand il n'y aura pas d'ambiguïté à redouter. Nous avons ainsi un champ de n-èdres. Si l'on compare le n-èdre en un point P au n-èdre au point voisin P′ sur Γ, en déplaçant par congruence celui-là près de celui-ci, on obtient des formules qui généralisent les formules de Frenet de la géométrie euclidienne.

En effet, les formules de Frenet, relatives à une courbe Γ^0 d'un espace euclidien E_n, donnent les expressions de $\frac{d\eta^{\nu}_{(p)}}{ds} = \theta^0\eta^{\nu}_{(p)}$ en fonction des $\eta^{\nu}_{(q)}$ eux-mêmes. On obtient des formules qui s'écrivent

$$\frac{d\eta^{\nu}_{(p)}}{ds} = \sum_{q=1}^{q=n} \alpha^0_{(pq)}\eta^{\nu}_{(q)},$$

les $\alpha^0_{(pq)}$ étant les courbures de la courbe Γ.

On a

$$\alpha^0_{(pp)} = 0, \qquad \alpha^0_{(p-1,p)} = -\alpha^0_{(p,p-1)} = \frac{1}{\rho_{(p)}}, \qquad \alpha^0_{(pq)} = 0 \quad \text{si } |p-q| \geqq 2.$$

Ces choses-là sont bien connues.

Nous ferons de même pour la courbe Γ.

Posons

$$\theta\,\eta^{\nu}_{(p)} = \sum_{q=1}^{q=n} \alpha_{(pq)}\eta^{\nu}_{(q)} \tag{7}$$

et calculons les $\alpha_{(pq)}$. On voit immédiatement que

(8) $$\alpha_{(pq)} = g_{\lambda\mu}\,\theta\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)}.$$

Puisqu'on a

$$g_{\lambda\mu}\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)} = \text{const.},$$

on aura

$$\frac{d}{ds}\left[g_{\lambda\mu}\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)}\right] = 0,$$

c'est-à-dire en vertu des formules (4) :

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\xi^{\nu}_{(1)}\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)} + g_{\lambda\sigma}\left[\theta\eta^{\sigma}_{(p)} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\xi^{\rho}_{(1)}\eta^{\mu}_{(p)}\right]\eta^{\lambda}_{(q)} \\ + g_{\mu\sigma}\left[\theta\eta^{\sigma}_{(q)} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}\xi^{\rho}_{(1)}\eta^{\lambda}_{(q)}\right]\eta^{\mu}_{(p)} = 0,$$

or

(3) $$g_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} + g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\rho}} = g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}Q_{\rho}^{\cdot\,\alpha\beta},$$

et par conséquent

(9) $$\alpha_{(pq)} + \alpha_{(qp)} = g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}Q_{\rho}^{\cdot\,\alpha\beta}\frac{dx^{\rho}}{ds}\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)}.$$

D'autre part, remarquons que $H_{(p)}$ est orthogonal aux vecteurs $\Xi_{(1)}, \ldots, \Xi_{(p-1)}$; on a donc

$$g_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(q)} = 0 \qquad (\text{si } p < q);$$

de plus $\theta H_{(p)}$ s'exprime linéairement en fonction des vecteurs $\Xi_{(1)}, \ldots, \Xi_{(p+1)}$ et puisque $H_{(q)}$ est orthogonal aux vecteurs $\Xi_{(1)}, \ldots, \Xi_{(q-1)}$, on voit que

$$g_{\lambda\mu}(\theta\eta^{\lambda}_{(p)})\eta^{\mu}_{(q)} = 0 \qquad (\text{si } p+1 \leqq q-1).$$

Cela prouve que

$$\alpha_{(pq)} = 0 \qquad (\text{si } q-p \geqq 2).$$

On peut ensuite calculer aisément

$$\alpha_{(p,\,p+1)} = g_{\lambda\mu}\theta\eta^{\lambda}_{(p)}\eta^{\mu}_{(p+1)},$$

car

$$\eta^{\lambda}_{(p)} = A_{(1)}\xi^{\lambda}_{(1)} + \ldots + A_{(p)}\xi^{\lambda}_{(p)},$$

et par suite

$$\theta\eta^{\lambda}_{(p)} = B_{(1)}\xi^{\lambda}_{(1)} + \ldots + B_{(p)}\xi^{\lambda}_{(p)} + B_{(p+1)}\xi^{\lambda}_{(p+1)},$$

or on voit que

$$\alpha_{(p,\,p+1)} = g_{\lambda\mu} B_{(p+1)} \xi^{\alpha}_{(p+1)} \eta^{\mu}_{(p+1)}.$$

Mais

$$B_{(p+1)} = A_{(p)},$$

puisque

$$\theta(A_{(p)}\xi^{\nu}_{(p)}) = \frac{dA_{(p)}}{ds}\xi^{\nu}_{(p)} + A_{(p)}\theta\xi^{\nu}_{(p)}$$
$$= \frac{dA_{(p)}}{ds}\xi^{\nu}_{(p)} + A_{(p)}\xi^{\nu}_{(p+1)},$$

mais d'après les formules (6), on a

$$A_{(p)} = \frac{D_{(p-1)}}{\sqrt{D_{(p)} D_{(p-1)}}},$$

et par conséquent

$$\alpha_{(p,\,p+1)} = g_{\lambda\mu} \frac{D_{(p-1)}}{\sqrt{D_{(p)} D_{(p-1)}}} \xi^{\lambda}_{(p+1)} \eta^{\mu}_{(p+1)}.$$

Cependant, on peut exprimer les $\xi^{\nu}_{(p+1)}$ linéairement en fonction des $\eta^{\nu}_{(q)}$ $(q = 1, \ldots, p+1)$,

$$\xi^{\nu}_{(p+1)} = C_{(1)}\eta^{\nu}_{(1)} + \ldots + C_{(p+1)}\eta^{\nu}_{(p+1)},$$

et l'on a, comme on le voit immédiatement sur les formules (6),

$$C_{(p+1)} = \frac{\sqrt{D_{(p)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}},$$

c'est le seul C qui nous intéresse, par conséquent

$$\alpha_{(p,\,p+1)} = \frac{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}}.$$

On en tire

(11) $$\alpha_{(p+1,\,p)} = Q_{\rho\lambda\mu} \frac{dx^{\rho}}{ds} \eta^{\lambda}_{(p)} \eta^{\mu}_{(p)} - \frac{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}},$$

et si $p - q \geqq 2$,

(12) $$\alpha_{(pq)} = Q_{\rho\lambda\mu} \frac{dx^{\rho}}{ds} \eta^{\lambda}_{(p)} \eta^{\mu}_{(q)};$$

enfin,

(13) $$\alpha_{(pp)} = \frac{1}{2} Q_{\rho\lambda\mu} \frac{dx^{\rho}}{ds} \eta^{\lambda}_{(p)} \eta^{\mu}_{(p)}.$$

Les formules de Frenet ainsi généralisées s'écrivent

$$(14)\qquad \begin{cases} \theta\eta^{\nu}_{(1)} = \alpha_{(11)}\eta^{\nu}_{(1)} + \alpha_{(12)}\eta^{\nu}_{(2)}, \\ \theta\eta^{\nu}_{(2)} = \alpha_{(21)}\eta^{\nu}_{(1)} + \alpha_{(22)}\eta^{\nu}_{(2)} + \alpha_{(23)}\eta^{\nu}_{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \theta\eta^{\nu}_{(n)} = \alpha_{(n1)}\eta^{\nu}_{(1)} + \alpha_{(n2)}\eta^{\nu}_{(2)} + \dots + \alpha_{(nn)}\eta^{\nu}_{(n)} \end{cases}$$ (1).

Posons

$$\theta\eta^{\nu}_{(p)}\,ds = \Delta\eta^{\nu}_{(p)} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{(pq)}\,ds = \Delta v_{(pq)};$$

on aura

$$(15)\qquad \Delta\eta^{\nu}_{(p)} = \sum_{q=1}^{q=p+1} \Delta v_{(pq)}\eta^{\nu}_{(q)}$$

(sauf pour $p = n$, la sommation allant alors jusqu'à $q = n$ seulement).

Ces formules indiquent qu'il faut ajouter aux vecteurs $H_{(p)}$ transportés parallèlement d'un point P de la courbe au point voisin P′, les vecteurs $\Delta H_{(p)}$ de composantes $\Delta\eta^{\nu}_{(p)}$, pour obtenir les vecteurs $H'_{(p)}$ attachés en P′. Soit alors H un vecteur quelconque en P, dont les composantes relativement au n-èdre $H_{(1)} \dots H_{(n)}$ sont les nombres $\beta_{(p)}$: $H = \Sigma\beta_{(p)}H_{(p)}$; soit alors H′ le vecteur en P′ qui a les mêmes composantes par rapport au n-èdre $H'_{(1)} \dots H'_{(n)}$: $H' = \Sigma\beta_{(p)}H'_{(p)}$. Lorsqu'on saura quelles relations géométriques il y a entre H transporté parallèlement à lui-même de P en P′ et H′, on aura donné une interprétation géométrique du déplacement parallèle généralisé, car on saura comment on passe du n-èdre attaché en P au n-èdre attaché en P′.

6. Or le vecteur $H'_{(p)}$ est égal au vecteur $H_{(p)} + \Delta H_{(p)}$, le vecteur H′ est donc égal au vecteur $H + \Sigma\beta_{(p)}\Delta H_{(p)}$. On passe donc de H à H′ en ajoutant à H transporté parallèlement à lui-même, le vecteur dont les composantes, par rapport au n-èdre $H_{(1)} \dots H_{(n)}$ déplacé parallèlement à lui-même, sont

$$(16)\qquad \Delta\beta_{(q)} = \sum_{q} \Delta v_{(pq)}\,\beta_{(p)}.$$

(1) On pourrait être tenté de croire que les propriétés énoncées par ces formules ne dépendent pas des $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ puisque les $\alpha_{(pq)}$ n'en dépendent pas explicitement; il faut remarquer que les $\eta^{\nu}_{(p)}$ en dépendent effectivement.

On reconnaît, dans ces formules, l'aspect familier des équations du mouvement infiniment petit d'un n-èdre mobile; les $\Delta v_{(pq)}$ seraient les composantes de la vitesse angulaire (on sait que la vitesse angulaire est un tenseur) du n-èdre mobile rapportée à ce n-èdre lui-même. Cependant l'aspect seul des formules suggère ce rapprochement, car on n'a pas $\Delta v_{(pq)} = -\Delta v_{(qp)}$. Malgré cela, il est possible de faire état de cette similitude d'aspect; on peut mettre en effet $\Delta v_{(pq)}$ sous la forme suivante :

$$\Delta v_{(pq)} = \Delta^1 v_{(pq)} + \Delta^2 v_{(pq)} + \Delta^3 v_{(pq)}, \tag{17}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta^1 v_{(pq)} &&= 0 \quad (\text{si } |p-q| > 1),\\ &\Delta^1 v_{(p+1,p)} &&= -\Delta^1 v_{(p,p+1)} = \frac{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}}; \end{aligned}\right. \tag{18 a}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta^2 v_{(pp)} &&= \frac{1}{2} Q_{\rho\lambda\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \eta^\lambda_{(p)} \eta^\mu_{(p)},\\ &\Delta^2 v_{(pq)} &&= 0 \quad (\text{si } p \neq q), \end{aligned}\right. \tag{18 b}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta^3 v_{(pq)} &&= 0 \quad (\text{si } q \geqq p),\\ &\Delta^3 v_{(pq)} &&= Q_{\rho\lambda\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \eta^\lambda_{(p)} \eta^\mu_{(q)} \quad (\text{si } p > q), \end{aligned}\right. \tag{18 c}$$

et l'on aura

$$\Delta\beta_{(p)} = \Delta^1 \beta_{(p)} + \Delta^2 \beta_{(p)} + \Delta^3 \beta_{(p)} \tag{19}$$

avec

$$\Delta^i \beta_{(p)} = \sum_q \Delta^i v_{(qp)} \beta_{(q)} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or le n-èdre $H_{(1)}, \ldots, H_{(n)}$ transporté parallèlement à lui-même ne reste pas en général un n-èdre orthogonal. Mais le vecteur H transporté parallèlement à lui-même conserve, par rapport au n-èdre transporté, les mêmes composantes $\beta_{(p)}$. C'est donc par rapport au n-èdre transporté que le vecteur à ajouter pour obtenir H' a pour composantes $\Delta\beta_{(q)}$.

$\Delta^1 \beta_{(p)}$ est la modification des $\beta_{(p)}$ lorsque le n-èdre transporté est soumis à la vitesse de rotation $\Delta^1 v_{(pq)}$; cette rotation ne déforme pas le n-èdre.

$\Delta^2 \beta_{(p)}$ est la modification des $\beta_{(p)}$ lorsque le n-èdre transporté est soumis à une déformation qui conserve les arêtes du n-èdre en les allongeant ou les raccourcissant suivant les rapports

$$\frac{\beta_{(1)} + \Delta^2 \beta_{(1)}}{\beta_{(1)}}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_{(n)} + \Delta^2 \beta_{(n)}}{\beta_{(n)}}.$$

Enfin $\Delta^3 \beta_{(p)}$ est la modification des $\beta_{(p)}$ lorsque le n-èdre est soumis à une déformation dont le caractère géométrique est le suivant : les angles du n-èdre transporté deviennent droits; les longueurs des arêtes peuvent d'ailleurs être modifiées. Si l'on veut avoir une idée plus précise, il suffit d'écrire explicitement les équations qui donnent $\beta_{(p)} + \Delta^3 \beta_{(p)} = \overline{\beta_{(p)}}$. On a

$$\begin{aligned}
\overline{\beta_{(n)}} \;\; &= \beta_{(n)}, \\
\overline{\beta_{(n-1)}} &= \Delta v_{(n,n-1)} \beta_{(n)} + \beta_{(n-1)}, \\
\overline{\beta_{(n-2)}} &= \Delta v_{(n,n-2)} \beta_{(n)} + \Delta v_{(n-1,n-2)} \beta_{(n-1)} + \beta_{(n-2)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\overline{\beta_{(1)}} \;\; &= \Delta v_{(n,1)} \quad \beta_{(n)} + \Delta v_{(n-1,1)} \quad \beta_{(n-1)} + \ldots + \Delta v_{(21)} \beta_2 + \beta_1.
\end{aligned}$$

Une telle transformation conserve les points de l'axe $H_{(1)}$ transporté; elle transforme le plan $H_{(1)} H_{(2)}$ en lui-même, l'espace déterminé par $H_{(1)}$, $H_{(2)}$, $H_{(3)}$ en lui-même, etc. D'une manière générale, le q-plan $H_{(1)} H_{(2)} \ldots H_{(q)}$ transporté est transformé en lui-même; à chaque point de ce q-plan correspond un point situé sur une parallèle au $(q-1)$ plan $H_{(1)} H_{(2)} \ldots H_{(q-1)}$, ce qui veut dire que dans le q-plan considéré, les $(q-1)$ plans parallèles au $(q-1)$ plan $H_{(1)} H_{(2)} \ldots H_{(q-1)}$, se transforment en eux-mêmes. Cela revient donc évidemment au processus suivant. L'axe $H_{(1)}$ transporté reste invariable, l'axe $H_{(2)}$ transporté, tourne dans le plan $H_{(1)} H_{(2)}$ jusqu'à devenir perpendiculaire à $H_{(1)}$, puis $H_{(3)}$ transporté tourne dans l'espace $H_{(1)} H_{(2)} H_{(3)}$ transporté jusqu'à devenir normal à $H_{(1)} H_{(2)}$; et ainsi de suite, jusqu'à $H_{(n)}$ transporté qui tourne pour devenir perpendiculaire à $H_{(1)} H_{(2)} \ldots H_{(n-1)}$ transporté.

On a ainsi une image géométrique des diverses transformations qu'il faut faire subir à un n-èdre principal transporté parallèlement à lui-même de P en P′ pour l'amener à coïncider avec le n-èdre principal en P′. Ces diverses transformations exécutées successivement sont exprimées en fonction des n vecteurs de base du n-èdre transporté. Mais ce sont des transformations linéaires infiniment petites; on peut les exécuter dans n'importe quel ordre; de plus, aux infiniment petits du second ordre près, au lieu de les rapporter au même n-èdre, on peut rapporter chacune d'elles sans changer les formules au n-èdre modifié par la précédente. Voici comment on pourra procéder dès lors pour avoir de la marche du n-èdre principal l'idée la plus simple.

Le n-èdre principal $\mathcal{H}_{\mathrm{P}}$ en P est transporté parallèlement à lui-même, son sommet arrive en P'. Il n'est plus orthogonal, désignons-le par $\overline{\mathcal{H}}_{\mathrm{P}'}$. On l'orthogonalise par la transformation Δ^3; il devient $\overline{\overline{\mathcal{H}}}_{\mathrm{P}'}$. Puis on le déforme par la transformation Δ^2 qui le laissant orthogonal ne fait qu'altérer les longueurs des n vecteurs de base. Il devient $\mathcal{H}''_{\mathrm{P}'}$. Enfin on fait tourner ce n-èdre $\mathcal{H}''_{\mathrm{P}'}$, la vitesse de rotation ayant pour composantes par rapport aux vecteurs de base $\mathrm{H}'_{(1)},\ldots \mathrm{H}''_{(n)}$, les nombres $\Delta^1 v_{(pq)}$. Le n-èdre est alors devenu le n-èdre principal en P' soit $\mathcal{H}_{\mathrm{P}'}$.

C'est en particularisant qu'on verra avec plus de détails encore, ces diverses transformations.

7. Le déplacement parallèle au sens de M. Levi Civita conduit aux formules de Frenet (¹):

$$
(20) \quad \begin{cases}
\theta \eta^{\nu}_{(1)} = \alpha_{(12)} \eta^{\nu}_{(2)}, \\
\theta \eta^{\nu}_{(2)} = \alpha_{(21)} \eta^{\nu}_{(1)} + \alpha_{(23)} \eta^{\nu}_{(3)}, \\
\theta \eta^{\nu}_{(n-1)} = \alpha_{(n-1,\, n-2)} \eta^{\nu}_{(n-2)} + \alpha_{(n-1,\, n)} \eta^{\nu}_{(n)}, \\
\theta \eta^{\nu}_{(n)} = \alpha_{(n,\, n-1)} \eta^{\nu}_{(n-1)}.
\end{cases}
$$

Car $Q_{\lambda\mu\nu} = 0$. Le n-èdre n'est pas déformé dans le déplacement, il suffit, pour passer du n-èdre principal transporté de P en P' au n-èdre principal en P', de lui faire subir une rotation infiniment petite dont les composantes sont

$$\Delta v_{(pq)} = 0 \qquad (\text{si } |p - q| > 2)$$

et

$$\Delta v_{(p+1,\, p)} = - \Delta v_{(p,\, p+1)} = \frac{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}}.$$

(¹) Il est entendu qu'ici l'on doit faire $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\}$; les $D_{(p)}$ sont définis suivant cette hypothèse.

On pose alors $\rho_{(p)} = \frac{D_{(p)}}{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}$. Les $\rho_{(p)}$ sont les $(n - 1)$ rayons de courbure de la courbe. On retrouve ainsi les résultats de M. Blaschke.

Pour retrouver la géométrie de M. Weyl, il faut faire

$$Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu} = g^{\lambda\nu}\varphi_{\mu}$$

et les formules de Frenet s'écrivent :

$$(21)\quad \begin{cases} \theta\eta^{\nu}_{(1)} = \alpha_{(11)}\eta^{\nu}_{(1)} + \alpha_{(12)}\eta^{\nu}_{(2)}, \\ \theta\eta^{\nu}_{(2)} = \alpha_{(21)}\eta^{\nu}_{(1)} + \alpha_{(22)}\eta^{\nu}_{(2)} + \alpha_{(23)}\eta^{\nu}_{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \theta\eta^{\nu}_{(n-1)} = \qquad \alpha_{(n-1,\,n-2)}\eta^{\nu}_{(n-2)} + \alpha_{(n-1,\,n-1)}\eta^{\nu}_{(n-1)} + \alpha_{(n-1,\,n)}\eta^{\nu}_{(n)}, \\ \theta\eta^{\nu}_{(n)} = \qquad \alpha_{(n,\,n-1)}\eta^{\nu}_{(n-1)} + \alpha_{(nn)}\eta^{\nu}_{(n)}; \end{cases}$$

où l'on a

$$\alpha_{(pp)} = \frac{1}{2}\varphi_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{ds} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{(p,\,p+1)} = \frac{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}} = \frac{1}{\rho_{(p)}}.$$

Le n-èdre principal déplacé reste orthogonal, mais il est transformé par une homothétie de rapport $1 + \frac{\varphi_{\mu} dx^{\mu}}{2}$; ensuite il subit une rotation de composantes $\Delta v_{(pq)}$, avec

$$\Delta v_{(p,\,p+1)} = -\Delta v_{(p+1,\,p)} = \frac{ds}{\rho_{(p)}}.$$

On dira encore que les $\rho_{(p)}$ sont les rayons de courbure de la courbe en P. Ce sont les résultats que nous avions trouvés dans les notes citées plus haut.

Un autre cas particulier intéressant est celui de la géométrie de M. Eddington. Mais pour les vecteurs contravariants, il conduit à peu près aux mêmes résultats que le déplacement le plus général. La particularité présentée par cette géométrie repose sur le fait que les $T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ne dépendent que des $Q_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$, les $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ étant nuls. C'est dans les expressions des $\eta^{\nu}_{(p)}$ que cette particularité crée quelques simplifications.

On voit donc que la méthode du n-èdre mobile, convenablement généralisée, permet d'analyser avec précision le déplacement parallèle d'un vecteur contravariant le long d'une courbe.

On pourrait encore faire l'analyse de cette notion en partant de la transformation linéaire la plus générale entre les corps de vecteurs en deux points voisins d'une variété. Un tel problème se rattache à l'ordre d'idées des travaux de M. Cartan.