BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MONTEL

Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 246-257
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__246_0>

SUR LES SUITES DE FONCTIONS ANALYTIQUES QUI ONT POUR LIMITE UNE CONSTANTE ;

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Des travaux récents ont attiré l'attention sur les séries de fonctions analytiques dont la somme est une constante. Je signalerai dans cet ordre d'idées les recherches sur l'itération, un théorème récent de M. Ostrowski (1) et une Note de M. Fatou sur les fonctions multiformes à une infinité de branches qui admettent une infinité de fonctions limites constantes (2).

Je me propose d'établir quelques propositions simples permettant d'affirmer qu'une suite de fonctions holomorphes ou méromorphes converge uniformément vers une constante. Au cours de cette étude, j'aurai l'occasion de démontrer un théorème général concernant les fonctions multivalentes, ainsi qu'une extension, aux fonctions analytiques de plusieurs variables, d'un théorème de Hurwitz.

Ce dernier théorème, qui joue un rôle important dans la suite de ce travail, est relatif à la distribution des zéros des fonctions $f_n(z) - a$ autour d'un point z_0 en lequel la suite des fonctions holomorphes $f_n(z)$ converge uniformément vers la valeur a. Si z_0 est une racine d'ordre de multiplicité k pour l'équation

$$f(z) = a,$$

$f(z)$ désignant la fonction limite supposée non constante de la suite $f_n(z)$, dans tout cercle (γ) de centre z_0 et de rayon arbitrairement petit, les équations

$$f_n(z) = a$$

(1) A. OSTROWSKI, *Ueber den Schottkyschen Satz und die Borelschen Ungleichungen* (*Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 25 juin 1925, p. 471, 476-484).

(2) P. FATOU, *Sur une propriété de certaines fonctions analytiques multiformes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 181, 7 décembre 1925, p. 902-904).

ont exactement k racines à partir d'un certain rang. Cette proposition est une conséquence immédiate du fait que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)}\frac{f'_n(z)}{f_n(z)-a}\,dz,$$

étendue à la circonférence (γ), a pour limite l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz = k,$$

si l'on suppose, ce qui est toujours possible, le cercle (γ) assez petit pour ne contenir que la racine z_0 à l'intérieur ou sur la circonférence de (γ). Comme la première intégrale représente le nombre des zéros de $f_n(z)-a$ intérieurs à (γ), elle est aussi égale à k pour n assez grand, ce qui établit le théorème de Hurwitz.

2. Considérons maintenant une suite de fonctions $f_n(z)$ holomorphes dans un domaine (D) où elles forment une famille normale, et supposons qu'en un point z_0 intérieur à (D) la suite $f_n(z_0)$ ait une limite a. Traçons un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon arbitraire, intérieur à (D). On peut établir la proposition suivante :

I. *Soit*

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots,$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine connexe (D) *dans lequel elles forment une famille normale. Si, au point z_0, la suite converge vers la valeur a, et si, dans un cercle (γ), de centre z_0, les fonctions $f_n(z)$ ne prennent pas la valeur a à partir d'un certain rang, la suite converge uniformément vers la constante a dans l'intérieur de* (D)

En effet, montrons d'abord que la suite converge vers a en tout point intérieur à (D). S'il n'en était pas ainsi, il existerait un point z_1 en lequel $f_n(z_1)$ admettrait une valeur limite b différente de a. Soit alors $f_{\alpha_n}(z)$ une suite extraite de la suite $f_n(z)$ et convergeant vers b au point z_1. Puisque la famille $f_n(z)$ est normale, on peut extraire, de la suite $f_{\alpha_n}(z)$, une nouvelle suite $f_{\beta_n}(z)$ convergeant uniformément dans (D) vers une fonction non constante puisque $f_{\beta_n}(z_1)$ converge vers b et que $f_{\beta_n}(z_0)$ converge vers a.

Mais, d'après le théorème de Hurwitz, les fonctions $f_{\beta_n}(z)$ devraient prendre la valeur a en des points voisins de z_0 lorsque β_n est assez grand. Cela est contraire à l'hypothèse que $f_n(z) - a$ ne s'annule pas dans (γ) pour n assez grand. Donc $f_n(z_1)$ a pour seule limite la valeur a.

Les fonctions $f_n(z)$ convergent vers la constante a en tout point du domaine ouvert (D). Or, on sait que lorsqu'une suite de fonctions formant une famille normale converge dans un domaine, la convergence est nécessairement uniforme dans tout domaine intérieur, ou, comme on dit, la suite converge uniformément dans l'intérieur de (D) ([1]).

Par exemple, si les fonctions $f_n(z)$ ont leurs modules bornés dans leur ensemble à l'intérieur de (D), c'est-à-dire si

$$|f_n(z)| < M,$$

M étant un nombre fixe, quel que soit n et quel que soit z intérieur à (D), on retrouve le théorème de M. Ostrowski ([2]).

On peut aussi supposer que les fonctions $f_n(z)$ sont bornées, dans leur ensemble, dans tout domaine (D′) complètement intérieur à (D).

On peut encore considérer des fonctions $f_n(z)$ qui ne prennent pas, dans le domaine (D), deux valeurs, fixes ou variables avec n. Supposons, par exemple, que les fonctions $f_n(z)$ ne prennent ni la valeur zéro, ni la valeur *un* dans le domaine (D). Le théorème précédent s'applique sans modification si a n'est égal ni à 0, ni à 1. Dans le cas où a est égal à 0 ou à 1, la restriction relative au cercle (γ) est évidemment inutile.

Enfin, dans le cas où les fonctions $f_n(z)$ forment une famille normale non bornée dans (D), ni dans tout domaine intérieur, on peut supposer a infini; la restriction relative au cercle (γ) disparaît encore : si la suite $f_n(z_0)$ augmente indéfiniment, la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans l'intérieur de (D) vers la constante infinie.

([1]) *Voir*, par exemple, P. MONTEL, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales sc. de l'École Normale*, 3e série, t. XXIX, p. 532).

([2]) M. Ostrowski (*loc. cit.*), démontre ce théorème en s'appuyant sur des inégalités de M. Borel.

3. Supposons maintenant que, la suite $f_n(z)$ étant toujours normale dans (D), et la suite $f_n(z_0)$ convergeant vers a, les suites $f'_n(z_0), f''_n(z_0), \ldots, f^{(k)}_n(z_0)$ convergent vers zéro. On peut alors établir le théorème :

II. *Soit*

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans le domaine connexe (D) *où elles forment une famille normale. Supposons que la suite $f_n(z_0)$ ayant pour limite a, les suites $f'_n(z_0)$, $f''_n(z_0), \ldots, f^{(k)}_n(z_0)$ aient pour limite zéro.*

Si, dans un cercle (γ) de centre z_0, les fonctions $f_n(z)$ ne prennent pas plus de k fois la valeur a à partir d'un certain rang, la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers a dans l'intérieur de (D).

La démonstration est tout à fait semblable à celle du théorème précédent. Si la suite $f_n(z)$ ne convergeait pas vers zéro en tout point intérieur à (D), on pourrait en extraire une suite partielle convergeant uniformément dans le domaine ouvert (D) vers une fonction limite $f(z)$ non constante, puisque

$$f(z_0) = a \qquad \text{et} \qquad f(z_1) = b.$$

Pour cette fonction $f(z)$, le point z_0 est une racine d'ordre de multiplicité $k+1$ pour l'équation

$$f(z) - a = 0,$$

puisque

$$f^{(i)}(z_0) = \lim_{n=\infty} f^{(i)}_{\beta_n}(z_0) = 0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Dans le voisinage de z_0, les équations

$$f_{\beta_n}(z) - a = 0$$

devraient avoir $k+1$ racines pour n assez grand, ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette contradiction montre que $f_n(z)$ a pour limite a en tout point (D), et nous savons que, dans ce cas, la convergence est uniforme.

4. Je vais maintenant montrer que les théorèmes I et II demeu-

rent vrais si les fonctions holomorphes $f_n(z)$ appartiennent à une famille quasi-normale dans le domaine (D). On sait qu'on appelle ainsi une famille de fonctions telle que toute suite infinie de ces fonctions soit génératrice d'une suite partielle convergeant uniformément autour de chaque point de (D), sauf peut-être autour d'un nombre fini de ces points qu'on appelle les points irréguliers. Ces points ne peuvent d'ailleurs exister que dans le cas où la suite converge vers la constante infinie en tous les autres points, appelés réguliers (¹). Par exemple, la suite

$$f_n(z) = 1 + nz(z-1)$$

augmente indéfiniment d'une manière uniforme autour de chaque point du plan, sauf autour des points $z=0$ et $z=1$ où elle a pour limite l'unité.

Dans un cercle (γ), de rayon arbitraire, ayant pour centre un point irrégulier, il y a une infinité de fonctions $f_n(z)$ qui prennent toute valeur finie a (²).

Démontrons une proposition de même nature qui nous sera utile : *z_0 étant un point irrégulier pour la suite $f_n(z)$, si les nombres*

$$f_n(z_0),\quad f'_n(z_0),\quad f''_n(z_0),\quad \ldots,\quad f_n^{(k)}(z_0)$$

sont bornés, dans tout cercle (γ) de centre z_0, les fonctions $f_n(z)$ prennent plus de k fois une valeur arbitraire a lorsque n est assez grand.

On a, en effet,

$$f_n(z) - a = P_n(z) - a + g_n(z),$$

en posant

$$P_n(z) = f_n(z_0) + (z - z_0) f'_n(z_0) + \ldots + \frac{(z-z_0)^k}{k!} f_n^{(k)}(z_0)$$

et

$$g_n(z) = f_n(z) - P_n(z).$$

Sur la circonférence (γ) supposée assez petite pour ne contenir

---

(¹) *Cf.* P. MONTEL, *Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes* [*Mémoires de l'Académie royale de Belgique* (classe des sciences), 2ᵉ série, t. VI, 1922, p. 1-41].

(²) *Cf.* P. MONTEL, *Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. LII, 1924, p. 85-114).

que le seul point irrégulier z_0, $f_n(z) - a$ augmente indéfiniment et $P_n(z)$ demeure borné ; on peut donc prendre n assez grand pour que, sur la circonférence (γ), on ait l'inégalité

$$\left|\frac{P_n(z) - a}{f_n(z) - a}\right| < 1.$$

A partir de cette valeur de n, les deux équations

$$f_n(z) - a = 0$$

et

$$f_n(z) - a - [P_n(z) - a] = g_n(z) = 0$$

ont alors le même nombre de racines. Or, $g_n(z)$ contient $(z - z_0)^{k+1}$ en facteur ; donc, $f_n(z) - a$ a $k+1$ racines au moins dans le cercle (γ).

Il est maintenant bien facile de démontrer les théorèmes I et II pour les familles quasi-normales. Bornons-nous au second, puisque le premier en est un cas particulier.

Par hypothèse, les nombres $f_n(z_0)$, $f'_n(z_0)$, $\ldots$, $f_n^{(k)}(z_0)$ sont bornés, puisque le premier a pour limite a et les k autres ont pour limite zéro. Si le théorème n'était pas exact, nous pourrions former, comme précédemment, une suite $f_{\beta_n}(z)$, extraite de la suite $f_n(z)$ et convergeant uniformément vers une fonction limite, sauf en un nombre fini de points irréguliers. Le point z_0 est nécessairement régulier pour cette suite, puisque, d'après le lemme précédent, il faudrait que les équations $f_{\beta_n}(z) - a = 0$ eussent plus de k racines dans (γ) pour qu'il pût être irrégulier. Comme, au point régulier z_0, la limite a est finie, il n'y a aucun point irrégulier, et la démonstration s'achève comme précédemment. La suite $f_n(z)$ a pour limite a en tout point, les fonctions $f_n(z)$ forment nécessairement une famille normale, et l'on est ramené au cas précédemment étudié.

Considérons en particulier des fonctions $f_n(z)$, qui, dans le domaine (D), ne prennent pas plus de p fois la valeur zéro, ni plus de q fois la valeur *un*, avec $p \leqq q$, par exemple. La famille de ces fonctions est quasi-normale d'ordre p, c'est-à-dire que le nombre des points irréguliers ne dépasse jamais p. Les théorèmes I et II s'appliquent à cette famille, et si $a = 0$ ou $a = 1$, lorsque k est égal ou supérieur à p, la restriction relative au cercle (γ) devient évidemment inutile.

On obtient aussi, dans ce cas, d'autres propositions qu'il est aisé d'établir. Par exemple : *si la suite $f_n(z)$ a pour limite zéro en $p+1$ points du domaine, elle converge uniformément vers zéro dans le domaine.*

Supposons, en effet, que $f_n(z)$ ait pour limite zéro aux points z_0, z_1, ..., z_p. La suite $f_n(z)$ est alors normale, puisque l'un des points z_i est nécessairement régulier, et la suite bornée en ce point. Si $f_n(z)$ ne converge pas vers zéro dans (D), on trouvera une suite $f_{\beta_n}(z)$ extraite de $f_n(z)$, convergeant uniformément dans (D) vers une fonction non constante.

S'il y a une infinité de $f_{\beta_n}(z)$ ne s'annulant pas autour de z_0, on extrairait une nouvelle suite $f_{\gamma_n}(z)$ ayant pour limite zéro dans (D), ce qui est impossible puisque cette limite est encore $f(z)$, fonction non constante. Donc, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_{\beta_n}(z)$ s'annulent toutes autour de z_0. On verrait de même que, à partir d'une certaine valeur de n, $f_{\beta_n}(z)$ s'annule autour de z_1, z_2, ..., z_p. Mais cela aussi est impossible, car les fonctions $f_{\beta_n}(z)$ n'ont pas plus de p zéros dans (D). Donc, $f_n(z)$ a pour limite zéro.

On démontrerait, en suivant la même marche, le théorème suivant :

Si, pour la suite $f_n(z)$ de fonctions holomorphes dans (D) *où elles ne prennent pas plus de p fois la valeur zéro ni plus de q fois la valeur un, avec $p \leqq q$, on a*

$$\begin{gathered}\lim f_n(z_1) = \lim f'_n(z_1) = \ldots = \lim f_n^{(\alpha_1-1)}(z_1) = 0,\\ \lim f_n(z_2) = \lim f'_n(z_2) = \ldots = \lim f_n^{(\alpha_2-1)}(z_2) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lim f_n(z_h) = \lim f'_n(z_h) = \ldots = \lim f_n^{(\alpha_h-1)}(z_h) = 0,\end{gathered}$$

avec

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h \geqq p+1,$$

la suite $f_n(z)$ converge dans (D) *uniformément vers zéro.*

5. Appliquons les résultats précédents à des suites de fonctions univalentes ou multivalentes dans le domaine (D).

On sait qu'on appelle fonction multivalente d'ordre p dans un domaine, une fonction $f(z)$ qui ne prend pas plus de p fois chacune de ses valeurs et prend p fois une au moins de ses valeurs ;

une fonction univalente est multivalente d'ordre 1 ; elle fait la représentation conforme du domaine (D) sur un autre domaine.

Les fonctions multivalentes d'ordre p dans un domaine (D) forment une famille quasi-normale d'ordre p [1]. Il suffit donc d'énoncer les résultats suivants :

Si une suite infinie de fonctions univalentes $f_n(z)$ converge vers a en deux points du domaine (D), *elle converge uniformément vers a dans l'intérieur de* (D).

Si en un point z_0, la suite des nombres $f_n(z_0)$ a pour limite a et la suite des nombres $f'_n(z_0)$ a pour limite zéro, la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers a dans (D).

De même :

Si une suite de fonctions multivalentes d'ordre p remplit une des conditions suivantes :

α. *Elle converge vers a en $p+1$ points du domaine;*

β. *Elle converge vers a en un point, et en ce point, les dérivées d'ordre* 1, 2, ..., *p convergent vers zéro;*

γ. *Elle converge vers a en h points du domaine : $z_1, z_2, \ldots, z_h$; au point z_i, les dérivées d'ordre* 1, 2, ... $(\alpha_i - 1)$ *convergent vers zéro, et l'on a $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h \geqq p+1$;*

la suite converge uniformément vers a dans l'intérieur de (D).

6. Les théorèmes précédents concernent des suites de fonctions multivalentes ayant pour limite une constante. Lorsqu'une suite de fonctions multivalentes d'ordre p converge vers une fonction limite non constante, cette limite est multivalente d'ordre p au plus. Pour que ce résultat soit valable dans tous les cas, il suffit de modifier un peu la définition d'une fonction multivalente d'ordre p. Nous dirons que $f(z)$ est multivalente d'ordre p si, lorsqu'elle ne prend pas moins de $p+1$ fois une valeur, elle est identique à cette valeur. En d'autres termes, étant donnée une valeur arbitraire a, ou bien $f(z)$ prend la valeur a en p points de (D) au plus, ou bien elle prend cette valeur en tout point de (D).

---

[1] *Loc. cit.*, note [1] de la page 7; page 21 du Mémoire cité.

Avec cette nouvelle définition, toute limite de suite de fonctions multivalentes d'ordre p est multivalente d'ordre p. Il est inutile d'ajouter que la suite converge uniformément, car toute suite convergente de telles fonctions converge nécessairement d'une manière uniforme.

Ainsi, l'ensemble des fonctions multivalentes d'ordre p dans un domaine (D) est un ensemble fermé.

Je dis que cet ensemble est parfait. Il faut, pour le démontrer, vérifier que toute fonction $f(z)$ multivalente d'ordre p est limite d'une suite de fonctions multivalentes d'ordre p ; il suffit de remarquer qu'une transformation linéaire à coefficients constants $Af(z)+B$ conserve les fonctions multivalentes d'ordre p, et de prendre la suite $f(z)+\frac{1}{n}$, par exemple.

Mais il y a plus ; je dis que : *toute suite infinie de fonctions convergeant uniformément vers une fonction multivalente d'ordre p non constante est formée, à partir d'un certain rang, de fonctions multivalentes d'ordre p.*

Supposons que, dans un domaine (D′) intérieur à (D) et limité par le contour (C′), il existe une infinité de fonctions $f_{\alpha_n}(z)$, extraites de la suite $f_n(z)$ qui converge uniformément vers la fonction $f(z)$ multivalente d'ordre p, dont chacune prend $(p+1)$ fois au moins une valeur a_{α_n}. Les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans (D′), donc la suite a_{α_n} est bornée, et l'on peut en extraire une suite partielle a_{β_n} ayant une valeur limite a ; on a alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(C')}\frac{f'_{\beta_n}(z)}{f_{\beta_n}(z)-a_{\beta_n}}\,dz \geqq p+1.$$

Le premier membre a pour limite

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(C')}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz \leqq p,$$

car on peut supposer que le contour (C′) ne contient aucun zéro des fonctions $f_{\beta_n}(z)-a_{\beta_n}$ et $f(z)-a$. On est ainsi conduit à une contradiction ; donc, pour n assez grand, les fonctions $f_n(z)$ sont multivalentes d'ordre p au plus. Mais, si une infinité d'entre elles étaient multivalentes d'ordre inférieur à p, il en serait de même de $f(z)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par exemple, si une fonction est univalente dans le cercle $|z| < 1$, les polynomes-sections obtenus en prenant la somme des n premiers termes de son développement de Taylor, sont, à partir d'un certain rang, des fonctions univalentes.

7. Passons maintenant aux suites de fonctions méromorphes dans le domaine (D). Il est facile de voir que les théorèmes I et II sont encore valables lorsque les fonctions de la suite appartiennent à une famille normale : il n'y a rien à changer aux démonstrations des paragraphes 2 et 3. Dans les énoncés, le nombre a peut avoir la valeur infinie.

Il n'en est plus de même lorsque les fonctions méromorphes de la suite appartiennent à une famille quasi-normale. Montrons-le sur un exemple.

Soit $z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$ une suite infinie de points situés dans le cercle (D), $|z| < 1$ et admettant le seul point limite z_0, avec $0 < |z_0| < 1$; et considérons la famille des fonctions

$$f_{p,q}(z) = \frac{1}{1 + (p+q)(z - z_p)},$$

p et q désignant des entiers positifs arbitraires.

Chacune de ces fonctions ne s'annule pas dans le cercle (D). Cette famille est quasi-normale dans (D). Prenons, en effet, une suite infinie de ces fonctions. Si un des nombres p y figure une infinité de fois, on pourra extraire la suite infinie des fonctions relatives à cette valeur de p : cette suite a pour limite zéro, sauf au point z_p où elle a pour limite l'unité. Si chacun des nombres p ne figure qu'un nombre fini de fois, la suite converge uniformément vers zéro, sauf autour du point z_0, car

$$f_{p,q}(z_p) = 1.$$

La famille des fonctions $f_{p,q}(z)$ est donc quasi-normale d'ordre 1. D'autre part, les nombres $f_{p,q}(0)$ ont pour limite zéro, et les fonctions ne s'annulent pas dans le voisinage de l'origine. Les conditions du théorème I sont donc remplies; cependant, la suite ne converge pas uniformément vers zéro. On a, en effet, en rangeant les fonctions en une suite simplement infinie $f_n(z)$,

$$\lim f_n(z) = 0, \qquad z \neq z_p,$$
$$\lim f_n(z_p) = 0 \text{ ou } 1 ;$$

pour la suite $f_n(z_0)$, ses valeurs limites dépendent de la suite z_p; en tout cas, la convergence n'est pas uniforme autour de ce point puisque $f_{p,q}(z_p) = 1$, et qu'il y a une infinité de points z_p autour de z_0, ainsi qu'une infinité de points z en lesquels la suite tend vers zéro.

8. Pour étudier, au même point de vue, les suites de fonctions analytiques de plusieurs variables, il importe d'étendre à ces fonctions le théorème de Hurwitz. Bornons-nous au cas de deux variables z et u et soit

$$f_1(z, u), \quad f_2(z, u), \quad \ldots, \quad f_n(z, u), \quad \ldots$$

une suite de fonctions holomorphes de (z, u) dans un domaine (D), à quatre dimensions, contenant le point $P(z_0, u_0)$ autour duquel la suite converge uniformément vers la fonction nécessairement holomorphe $f(z, u)$. Posons $a = f(z_0, u_0)$ et considérons une multiplicité (S) à deux dimensions passant par le point P, multiplicité définie par les deux fonctions analytiques de la variable complexe t, $z(t)$ et $u(t)$ avec

$$z(t_0) = z_0, \qquad u(t_0) = u_0.$$

Nous dirons que (S) est une multiplicité analytique à deux dimensions. La suite des fonctions holomorphes de t

$$F_n(t) = f_n[z(t), u(t)],$$

converge uniformément autour de $t = t_0$ vers la fonction

$$F(t) = f[z(t), u(t)],$$

et l'on a $F(t_0) = a$. D'après le théorème de Hurwitz, les équations $F_n(t) = a$ ont, à partir d'un certain rang, une racine t voisine de t_0 : en d'autres termes, sur la multiplicité (S), il y a une infinité de points, voisins de P, en lesquels les fonctions $f_n(z, u)$ prennent la valeur a. Il faut supposer que la fonction $f(z, u)$ n'a pas la valeur constante a sur la multiplicité (S).

Réciproquement, si l'on a sur (S) une infinité de points P_n ayant pour limite P, en lesquels $f_n(z, u)$ prend la valeur a, on sait que $F(t_0) = a$. Donc $f(z_0, u_0) = a$, et, sur toute autre multiplicité analytique (S′) à deux dimensions, les équations $f_n(z, u) = a$ ont, en général, une racine pour n assez grand. En résumé :

Si la suite des fonctions holomorphes

$$f_1(z, u), \quad f_2(z, u), \quad \ldots, \quad f_n(z, u), \quad \ldots$$

converge uniformément vers a autour du point P, *les fonctions* $f_n(z, u) - a$ *admettent toutes un zéro, pour n assez grand, sur toute multiplicité* (S), *analytique à deux dimensions, passant par* P, *sauf peut-être pour un nombre fini d'entre elles.*

Réciproquement, si cette propriété est vérifiée pour une multiplicité (S) *particulière passant par* P, *la suite converge vers a en ce point* P, *et la propriété est vraie pour toute autre multiplicité* (S), *sauf peut-être pour un nombre fini d'entre elles.*

On démontrerait de même que, si toutes les dérivées de $f(z, u)$ jusqu'à l'ordre $(p - 1)$ inclus, sont nulles au point P, les fonctions $f_n(z, u) - a$ ont p zéros voisins de P, à partir d'un certain rang sur chaque multiplicité régulière (S) passant en (P), et réciproquement, sauf peut-être un nombre fini d'exceptions.

On voit maintenant comment les théorèmes I et II peuvent être appliqués aux fonctions holomorphes de plusieurs variables. Il suffit que les fonctions $f_n - a$ n'aient pas de zéros voisins du point P où la suite converge vers a, situés sur une infinité de multiplicités (S) passant par P.