BULLETIN DE LA S. M. F.

M. MANDELBROJT

Sur les séries de Taylor qui ont des lagunes généralisées

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 235-245
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__235_0>

SUR LES SÉRIES DE TAYLOR QUI ONT DES LACUNES GÉNÉRALISÉES;

PAR M. MANDELBROJT.

Le but de ce travail est de généraliser quelques théorèmes sur les séries de Taylor, que j'ai établis dans d'autres travaux.

Je profiterai de l'occasion pour donner un point de vue général qui pourra embrasser toutes ces recherches.

Nous généralisons ici la notion de lacunes.

Dès l'apparition de mon Mémoire *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*, M. Montel a proposé de généraliser mes théorèmes pour le cas où la croissance d'une partie des coefficients est plus petite que celle des autres.

Ainsi, par exemple, on se demande si l'on peut remplacer la condition $\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i} > k$ [1] par

$$\lim |a_{\lambda_n+1}| + |a_{\lambda_n+2}| + \ldots + |a_{\lambda_n+k}| = 0.$$

Je me suis placé à un point de vue spécial qui me semble être naturel et apte a donner de nouveaux résultats.

I.

1. J'ai déja étudié à plusieurs reprises les séries de Taylor qui ont des lacunes. Étant donnée une suite de nombres entiers positifs λ_n, nous avons étudié les singularités des fonctions correspondant aux séries $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$.

En remarquant que la plupart des théorèmes en question donnent des renseignements sur les singularités situées sur le cercle de convergence (nous supposerons le rayon toujours égal à un), on voit qu'une série $\Sigma b_m x^m$ avec des coefficients b_m, tels qu'il existe une suite λ'_n donnant lieu à l'égalité

$$(\mathrm{A}) \quad \overline{\lim} \sqrt[\lambda'_n]{|b_{\lambda'_n}|} = \delta < 1,$$

---

[1] Voir *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes* (*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 40).

peut être considérée comme une série ayant des lacunes qui correspondent aux indices λ'_n. Les coefficients $b_{\lambda'_n}$ peuvent être considérés, à notre point de vue, comme étant égaux à zéro et l'on peut appliquer à ce cas tous les théorèmes auxquels nous faisions allusion (¹).

Quand nous employerons l'expression : « séries ayant des lacunes » nous aurons en vue des séries du type $\Sigma b_m x^m$; les séries qui ont des « lacunes généralisées » diffèrent profondément de celles-ci. Nous allons introduire ces séries dans le présent travail.

2. Rappelons les théorèmes suivants :

a. La fonction correspondant à la série $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$ où la suite λ_n est telle qu'on puisse en extraire une suite partielle λ_{n_i} telle que

$$\lim(\lambda_{n_i+1} - 2^p \lambda_{n_i}) = \infty,$$

p étant un entier positif, ne peut pas être mise sous la forme

$$\frac{\varphi(x)}{[P(x)]^{\frac{1}{p+1}}},$$

où $\varphi(x)$ a un rayon de convergence supérieur à un, et où $P(x)$ est un polynome.

b. La fonction $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$ où la suite λ_n ne contient pas de multiples des ν nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, premiers entre eux, a au moins $\nu + 1$ points singuliers sur le cercle de convergence.

Ces deux théorèmes suffisent pour pouvoir constater, d'une manière grossière il est vrai, le fait suivant :

Les singularités des séries admettant des lacunes sont d'autant plus compliquées qu'elles ont plus de lacunes (²).

Que cette manière de considérer l'effet des lacunes par rapport à leur fréquence ne soit pas très rigoureuse, on le voit en tenant

---

(¹) Sauf le théorème sur les continus non-bornés.

(²) *Voir* aussi les théorèmes de la page N et de la page M de mon Mémoire *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*, t. 40, 1923.

Je renvoie aussi à mes autres travaux : *Sur la définition des fonctions analytiques* (*Acta mathematica*, t. 45), où l'on trouvera le théorème *b*; *Sur les séries de Taylor prolongeables* (*C. R, Ac. Sc.*, juin 1924).

compte du n° 1. On ne pourrait pas, en effet, dire d'une manière immédiate laquelle de deux séries données a le plus de lacunes [(si l'on tient compte du n° 1, en considérant comme lacunaires les séries $\Sigma b_m x^m$ avec $\overline{\lim} \sqrt[\lambda'_n]{|b_{\lambda'_n}|} = \delta < 1$ (¹)]. Une précision à cet égard est nécessaire.

Étant données deux séries $\Sigma a_n x^n$ et $\Sigma b_n x^n$, on dira que la première série a plus de lacunes que la seconde, si, quelle que soit la suite λ_n telle que

$$\lim \sqrt[\lambda_n]{|a_{\lambda_n}|} = 1,$$

on puisse indiquer une autre suite λ'_m contenant outre les éléments de la suite λ_n, d'autres entiers, et telle que $\overline{\lim} \sqrt[\lambda'_m]{|b_{\lambda'_m}|} = 1$, sans que la réciproque soit vraie (c'est-à-dire il existe une suite λ''_n telle que $\lim \sqrt[\lambda''_n]{|b_{\lambda''_n}|} = 1$, mais on n'a pas $\lim \sqrt[\lambda]{|a_{\lambda''_n}|} = 1$).

Cette définition étant admise, on peut dire avec plus de netteté que les théorèmes cités permettent de prévoir qu'une fonction a des singularités d'autant plus compliquées (soit dans leur nature, soit dans leur nombre) que la série correspondante a plus de lacunes.

3. Le fait le plus classique qui se présente dans l'étude des singularités d'une série de Taylor est le théorème de Cauchy-Hadamard, à savoir que l'inverse du rayon du cercle de convergence d'une série $\Sigma a_n x^n$ est donné par l'expression

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Il nous sera commode de dire que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers *un* (si le rayon de convergence est égal à un), même si elle n'y tend pas régulièrement.

Nous dirons, alors, qu'elle tend vers un *irrégulièrement*.

(¹) Il se peut par exemple que l'ensemble dérivé de l'ensemble $\sqrt[n]{|b_n|}$ contient tous les points d'un intervalle dont l'extrémité droite est le point 1, la même circonstance peut se présenter pour l'ensemble $\sqrt[n]{|b_n|}$. Dans ces conditions, il serait impossible de dire laquelle des deux séries $\Sigma a_n x^n$ ou $\Sigma b_n x^n$ a plus de lacunes, sans faire des conventions spéciales, car on ne peut indiquer ni toutes les lacunes de la série $\Sigma a_n x^n$, ni toutes les lacunes de la série $\Sigma b_n x^n$.

Quand la série $\Sigma a_n x^n$ admet des lacunes, la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers un irrégulièrement d'une manière manifeste.

α. *Les singularités d'une série de Taylor sont d'autant plus compliquées que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend plus ou moins irrégulièrement vers un.*

Il est évident que, comme on ne considère que les valeurs absolues des coefficients, ce dernier énoncé doit être compris de la manière suivante. Si, l'irrégularité de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ caractérisée par la propriété (a) étant vérifiée, les singularités de la série $\Sigma a_n x^n$ ne peuvent pas être de la nature caractérisée par la propriété (A), l'irrégularité plus forte de la suite $\sqrt[n]{|b_n|}$ (c'est-à-dire la présence d'un plus grand nombre de lacunes) caractérisée par la propriété (a') entraîne le fait que les singularités $\Sigma b_n x^n$ ne peuvent pas jouir d'une propriété (A'); les propriétés (A) et (A') étant entre elles dans le rapport suivant : tout ensemble de points singuliers jouissant de la propriété (A) jouit à plus forte raison de la propriété (A'); mais il existe, au contraire, des ensembles jouissant de la propriété (A'), sans qu'ils jouissent de la propriété (A). L'impossibilité de donner, dans ce cas, des renseignements plus précis sur les singularités, résulte, en partie, du théorème de M. Fatou, d'après lequel il suffit de changer de signe une infinité de coefficients pour que le cercle de convergence devienne une coupure; en effet : de deux suites $\sqrt[n]{|a_n|}$ et $\sqrt[n]{|b_n|}$ la première tendant régulièrement vers *un*, la deuxième au contraire, tendant vers *un* irrégulièrement, on pourrait toujours former une série $\Sigma(-1)^{m_n} a_n x^n$ ayant le cercle de convergence comme coupure (d'après le théorème de M. Fatou), la série $\Sigma b_n x^n$ pouvant être supposée prolongeable. Il suffit pourtant de remarquer que, dans ce dernier cas, la série $\Sigma(-1)^{m_n} a_n x^n$ est la différence d'une série n'ayant pas de lacunes et d'une série ayant des fortes lacunes. C'est donc toujours le fait (α) qui donne des explications sur la complexité des singularités.

La remarque désignée par (α) justifiée par nos théorèmes, jointe au théorème de Cauchy-Hadamard, nous semble être la base de l'étude des singularités de la série de Taylor.

4. La série entière $\Sigma a_n x^n$ étant telle que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tende

régulièrement vers *un*, il se peut qu'on puisse séparer la suite des nombres entiers positifs (n) en deux suites complémentaires λ_n et λ'_n telles que les deux suites $\sqrt[\lambda_n]{|a_{\lambda_n}|}$ et $\sqrt[\lambda'_n]{|a_{\lambda'_n}|}$ tendent vers *un* de deux manières différentes, le fait devrait permettre de pouvoir donner des renseignements sur les singularités de la fonction correspondante d'après la croissance d'une des deux suites λ_n ou λ'_n.

C'est ici, encore, qu'on pourrait établir la possibilité de constater que les expressions $\sqrt[n]{|a_n|}$ d'une série $\Sigma a_n x^n$ tendent plus régulièrement vers *un* que les expressions $\sqrt[n]{|b_n|}$ de l'autre série $\sqrt[n]{|b_n|}$, tout en supposant que les deux suites tendent régulièrement vers *un*.

Il nous faut pour cela introduire la notion de lacunes généralisées.

5. Une grande partie des théorèmes connus jusqu'à un certain moment et concernant les singularités des séries de Taylor, portaient sur les conditions suffisantes pour qu'une telle série admette un seul point singulier, soit sur le cercle de convergence, soit dans le plan tout entier.

Un théorème très caractéristique à cet égard et démontré par plusieurs auteurs (avec des légères modifications) est le théorème suivant :

La fonction $\varphi(x) = \Sigma g(m) x^m$ où $g(z)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à *un* possède un seul point singulier dans tout le plan (*voir* Leau, Faber, Wigert, Lindelöf).

Il y a de même des théorèmes plus généraux établissant le rapport entre les singularités d'une série $\Sigma a_n x^n$ et la série $\Sigma g(a_n) x^n$ où la fonction $g(z)$ est une fonction entière spéciale.

Pour que ces théorèmes aient un sens réel, il faut que les coefficients a_n ne soient pas bornés en modules. Dans ce qui suit, nous supposerons qu'une suite $|a_{n_i}|$ extraite de la suite $|a_n|$ tend vers l'infini.

Parmi ces séries, la série $\Sigma m x^m$ est la plus simple. L'expression $\sqrt[m]{m}$ tend régulièrement vers *un*, et il y a même lieu de la considérer comme une expression tendant vers *un* de la manière la plus régulière possible (la série Σx^m ne pouvant pas entrer en considération, car ses coefficients ne satisfont pas à la condition exigée).

Ce qui importe à notre point de vue, c'est le fait que la série $\Sigma g(m)x^m$ ne peut avoir trop de lacunes; λ'_m étant une suite de nombres entiers positifs, telle que $g(\lambda'_m) = 0$, il faut que la série $\sum \frac{1}{\lambda'^s} (s < 1)$ converge. [Ceci est d'ailleurs la cause, si l'on veut, du fait que la série $\Sigma g(m)x^m$ a *un* seul point singulier dans tout le plan; le théorème de M. Leau peut donc être considéré comme un théorème appartenant au groupe des théorèmes portant sur les lacunes, ainsi d'ailleurs que les théorèmes de MM. Fatou, Borel et des autres].

Supposons au contraire qu'on ait une série $\Sigma b_m x^m$ dont les coefficients satisfont aux conditions suivantes :

$$b_{m_i} = m_i^{1+\alpha} \, (\alpha > 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

la suite m_i étant une suite donnée à l'avance, et l'on a pour tous les autres entiers positifs m

$$b_m = m \qquad (m \neq m_i).$$

La suite $\sqrt[m]{b_m}$ tendant encore vers *un*, mais non de la même manière que la suite $\sqrt[m]{m}$, on voit qu'on peut former une fonction entière $g(z)$ d'ordre inférieur à *un* et telle que la série $\Sigma g(b_m)x^m$ ait autant de lacunes que l'on voudra, pourvu que la suite m_i soit bien choisie.

Le fait qu'une série $\Sigma g(b_m)x^m$ puisse avoir plus de lacunes qu'une autre série $\Sigma g(a_m)x^m$ dépend du fait que la suite $\sqrt[m]{|b_m|}$ tend vers *un* d'une manière moins régulière que la suite $\sqrt[m]{|a_m|}$.

Ces remarques, plutôt intuitives, d'une part, et l'existence d'un rapport intime entre les singularités des fonctions $\Sigma a_n x^n$ et $\Sigma g(a_n)x^n$, d'autre part (établie par les théorèmes dont nous parlions au commencement de ce numéro), justifient la définition des « lacunes généralisées » que nous allons donner.

Ces lacunes généralisées pourraient nous fournir, comme nous le verrons dans le Chapitre suivant, des renseignements sur les singularités de séries correspondantes.

Soit $\Sigma a_n x^n$ *une série entière (qui peut ne pas avoir des lacunes* (¹), *si la série* $\Sigma g(a_n)x^n$ *où* $g(z)$ *est une fonction entière admet des coefficients d'indice* λ'_m *comme lacunaires c'est-à-dire tels que* $\lim \sqrt[\lambda'_m]{|g(a_{\lambda'_m})|} < \frac{1}{R}$, R *étant le rayon de convergence de la fonction* $\Sigma g(a_m)x^m$ *supposé fini), on dira que la série* $\Sigma a_n x^n$ *admet des lacunes généralisées, les coefficients lacunaires étant d'indice* λ'_m.

II.

6. Il est évident qu'une série n'ayant pas de lacunes au sens strict de ce mot, peut en avoir au sens général (lacunes généralisées), ces lacunes étant engendrées par l'emploi d'une fonction entière $g(z)$; on emploiera la série $\Sigma g(a_m)k^m x^m$ si la série $\Sigma g(a_n)x^n$ a *un* rayon de convergence différent de *un*.

Nous établissons le théorème suivant :

Soit $f(x) = \Sigma a_n x^n$ *une série entière admettant par rapport à la fonction entière* e^z, *des lacunes généralisées correspondant à tous les multiples d'un entier* p, *alors la fonction* $f(x)$ *ne peut avoir comme seul point singulier le point d'affixe* un *si l'on a*

$$\lim_{x \to 1}(1-x)^k f(x) = 0 \tag{1}$$

pour $k < 2$.

Ceci résulte de notre théorème *b* et d'un théorème dû à M. Leau et qui s'énonce comme il suit :

Si la série $\Sigma a_n x^n$ a un seul point singulier d'affixe 1, tel que $\lim (1-x)^K \Sigma a_n x^n = 0$, la fonction $\Sigma g(a_n)x^n$ a le seul point singulier d'affixe 1, $g(z)$ étant une fonction entière d'ordre $\frac{1}{K-1}$ (²).

On voit que notre théorème est vrai si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|e^{a_n}|} \neq 1$, car en supposant que la conclusion du théorème n'est pas vérifiée, on

(¹) C'est-à-dire que l'on a $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (régulièrement).

(²) *Voir* Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 72.

aurait à plus forte raison

$$\lim(1-x)^2 \Sigma a_n x^n = 0,$$

et alors, d'après le théorème de M. Leau, on aura

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|e^{a_n}|} = 1.$$

La série $\Sigma e^{a_n} x^n$ a donc le rayon de convergence égal à *un*, et elle admet des lacunes qui correspondent au théorème B pour $v = 1$, elle admet donc sur le cercle de convergence deux points singuliers au moins, et notre théorème se trouve démontré [car si $\Sigma a_n x^n$ avait un seul point singulier d'affixe 1, la série $\Sigma g(a_n) x^n$ ne pourrait en avoir qu'un seul sur son cercle de convergence d'après le théorème de M. Leau].

Le théorème démontré n'a pour but que de démontrer que des lacunes généralisées peuvent encore donner des renseignements sur les singularités.

Mais il est évident que ces lacunes ne peuvent pas donner autant de renseignements que les lacunes ordinaires, car l'irrégularité de la décroissance de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ vers 1 est dans le premier cas moins exprimée que dans le deuxième.

7. Nous voulons en tirer des conséquences d'un autre caractère. Posons

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n$$

Supposons que

$$\text{(II)} \qquad \overline{\lim} \frac{\alpha_n}{n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim} \frac{\alpha_{np}}{np} = \delta < 0.$$

La série $\Sigma e^{a_n} x^n$ a donc des lacunes correspondant à la suite $np (n = 1, 2, \ldots)$, et la série $\Sigma a_n x^n$ a des lacunes généralisées correspondant aux mêmes indices.

D'après notre théorème, la fonction $\Sigma a_n x^n$ ne peut pas avoir comme seul point singulier le point d'affixe 1 et qui de plus soit d'ordre d'infinitude inférieur à 2.

Cela veut dire que *les lacunes* (d'un genre différent de celui que nous avons considéré jusqu'ici), *par rapport à la partie* *réelle seulement des coefficients, fournissent déjà des renseignements sur les singularités de la fonction correspondante.*

Il en est évidemment de même pour la partie imaginaire des coefficients.

8. Faisons une autre remarque qui semble éclaircir ce genre de recherches d'un autre point de vue.

Le logarithme du rayon de convergence d'une série entière est donné par l'expression

$$(1) \qquad -\overline{\lim}\,\frac{\log|a_n|}{n}$$

En étudiant la nature des points singuliers sur le cercle de convergence, M. Hadamard a introduit la notion de l'ordre sur le cercle de convergence qu'on obtient par l'expression $\overline{\lim}\,\frac{\log|a_n|}{\log n}$ (2).

Le fait de remplacer dans l'expression (1) la valeur n par $\log n$, ou plus généralement par une fonction de n quand il s'agit de la nature des singularités sur le cercle de convergence, semble être très important (¹). Écrivons les expressions (1) et (2) de la manière suivante :

$$\overline{\lim}\,\frac{R\log a_n}{n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\,\frac{R\log a_n}{\log n},$$

où Ra signifie la partie réelle de a. Nous voyons d'après nos recherches qu'il y a lieu de changer le numérateur de l'expression (1) au lieu de changer son dénominateur, en étudiant l'expression

$$\overline{\lim}\,\frac{\alpha_n}{n} = \overline{\lim}\,\frac{Ra_n}{n}.$$

On peut donc voir, *a priori*, que l'expression la plus générale qui puisse fournir des renseignements sur les singularités du

---

(¹) C'est d'ailleurs en remplaçant n par $\varphi(n)$ que M. Hadamard a abordé une pareille étude.

cercle de convergence, sera de la forme

$$\overline{\lim}\,\frac{\mathrm{R}\varphi(a_n)}{\Phi n}.$$

Nous ne nous arrêtons plus pour le moment sur ce point.

9. Dans une Note récente, j'ai généralisé le théorème (*b*) rappelé au numéro 2.

Comme les considérations de ce travail sont strictement liées à ce théorème [ainsi par exemple le théorème du n° 6 peut être généralisé au fur et à mesure que l'on généralise le théorème (*b*)], nous en donnons ici la démonstration.

Démontrons d'abord le fait général suivant ([1]) :

Si la suite λ_n est telle que l'ensemble de points singuliers de toute série $\Sigma a_n x^{\lambda_n}$ possède la propriété (T), l'ensemble de points singuliers de toute série $\Sigma b_n x^{\lambda''_n}$ où la suite λ''_n contient tous les éléments de la suite λ_n, et en outre des éléments λ'''_n qui forment une série $\sum \frac{1}{\lambda_n'''^s}$ $(s < 1)$ convergente, possède également la propriété (T).

Démonstration. — On peut construire une fonction entière d'ordre inférieur à *un* admettant comme zéros les points d'affixes λ'''_n. On a donc

$$g(\lambda'''_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

la fonction $\varphi(z) = \Sigma g(m) x^m$, d'après le théorème du numéro, admet dans tout le plan un seul point régulier.

Supposons, alors, que la suite λ_n est telle que l'ensemble de points singuliers de toute fonction $f(x) = \Sigma a_n x^{\lambda_n}$ jouit de la propriété (T).

En posant

$$\mathrm{F}(x) = \Sigma b_n x^{\lambda''_n} = \Sigma c_m x^m,$$

([1]) Au fond c'est un cas très particulier de ce principe qui a été employé par M. Faber pour démontrer le théorème de M. Hadamard sur les coupures. Nous démontrons ce fait d'une manière analogue à celui qui a servi à M. Faber pour démontrer le théorème de M. Hadamard.

on voit, en appliquant l'application H aux deux séries $F(x)$ et $\varphi(x)$ [c'est-à-dire en formant la série $\Sigma g(m) c_m x^m$] que la fonction $\theta(x) = H(F, \varphi)$ est représentée par la série

$$\theta(x) = \Sigma\, d_n x^{\lambda_n},$$

l'ensemble de ces points singuliers possède donc la propriété (T).

Comme, d'après le théorème de M. Hadamard, l'ensemble E_1 de points singuliers de la fonction $F(x)$ contient comme sous ensemble l'ensemble de points singuliers de la fonction $\theta(x)$, on voit, d'après les hypothèses, que l'ensemble E_1 possède la propriété (T). C. Q. F. D.

La propriété de posséder au moins λ points singuliers, ainsi que la propriété de l'ensemble d'être non réductible, est une propriété (T).

On peut donc énoncer, le théorème suivant, en s'appuyant sur le théorème (b).

Si les $s^{\text{ièmes}}$ puissances (avec un $s > 1$) des inverses des multiples de k nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k$ premiers entre eux $\lambda_{n_1}^{(p_1)}$, $\lambda_{n_2}^{(p_1)}, \ldots, \lambda_{n_i}^{(p_1)}, \ldots, \lambda_{m_1}^{(p_2)}, \lambda_{m_2}^{(p_2)}, \ldots, \lambda_{m_i}^{(p_2)}, \ldots, \lambda_{s_1}^{(p_k)}, \ldots, \lambda_{s_i}^{(p_k)}, \ldots$, les $\lambda_s^{(p)}$ $(p = p_1, p_2, \ldots, p_k;\ s = n_i, m_i, \ldots, s_i)$ étant contenus dans la suite λ_n, forment k séries convergentes, la série $\Sigma a_n x^{\lambda_n} a$, sur le cercle de convergence, au moins 2^k points singuliers (¹).

On peut de la même manière généraliser le théorème du n° 11 de mon Mémoire *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*.

(¹) Dans le théorème du n° 6 nous avons mis $k + 1$ au lieu de 2^k, mais on m'a fait remarquer que la méthode qui sert pour établir que la série a au moins $k + 1$ points singuliers sert du même coup à établir qu'elle en a au moins 2^k.