BULLETIN DE LA S. M. F.

J. DRACH

Sur deux classes remarquables de congruences *W*

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR DEUX CLASSES REMARQUABLES DE CONGRUENCES W;

PAR M. JULES DRACH.

[*Suite* (¹).]

IV. — LES CONGRUENCES W DONT LA SURFACE MOYENNE EST UN PLAN.

12. Les congruences rectilignes (Δ) dont la surface moyenne est un plan s'obtiennent de la manière suivante : En tout point P d'un plan qui correspond par orthogonalité des éléments à une surface (S) (dite *surface génératrice*), on mène la droite Δ parallèle à la normale au point correspondant M de (S). Si les coordonnées de M sont (x, y, z) on peut prendre pour coordonnées de P, ($-y$, x, o) et la droite Δ sera le lieu d'un point F_1 de coordonnées

$$x_1 = -y + p\lambda, \qquad y_1 = x + q\lambda, \qquad z_1 = -\lambda,$$

où λ est le paramètre, puisque (p, q, -1) sont les paramètres directeurs de la normale à (S).

On trouve les points focaux et les développables de la congruence en écrivant

$$\frac{dx_1}{p} = \frac{dy_1}{q} = \frac{dz_1}{-1},$$

ce qui donne

$$-dy + \lambda\, dp = 0, \qquad dx + \lambda\, dq = 0.$$

Ces développables correspondent donc aux asymptotiques de (S)

$$dp\, dx + dq\, dy = 0,$$

(¹) Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LII, 1924, p. 434-467.

et l'on détermine λ en éliminant $dy : dx$, d'où

$$\lambda^2(s^2 - rt) = 1.$$

Le point F_2, second foyer sur Δ, s'obtiendra en remplaçant λ par $-\lambda$.

Si l'on veut que la congruence (Δ) soit W, c'est-à-dire *que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales*, il faut que l'équation différentielle qui les définit sur (F_1) ne change pas quand on change le signe de λ. Nous écrirons cette équation différentielle en prenant x, y pour variables indépendantes

$$\begin{vmatrix} d^2 p\lambda & d^2 q\lambda & -d^2\lambda \\ \lambda r + p\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} & 1 + \lambda s + q\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} & -\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} \\ -1 + \lambda s + p\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} & \lambda t + q\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} & -\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, on peut faire disparaître dans les éléments de la première ligne les termes $pd^2\lambda$, $qd^2\lambda$. L'équation s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} \lambda d^2 p + 2 d\lambda\, dp & \lambda d^2 q + 2 d\lambda\, dq & -d^2\lambda \\ \lambda r & 1 + \lambda s & -\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} \\ -1 + \lambda s & \lambda t & -\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} \end{vmatrix} = 0;$$

le coefficient de $-d^2\lambda$ qui est $\lambda^2(rt - s^2) + 1$ y est nul d'après la valeur de λ; elle se réduira donc à la forme simple

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda\, d^2 p + 2\, d\lambda\, dp)&\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\left(s\frac{\partial\lambda}{\partial y} - t\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\right] \\ -(\lambda d^2 q + 2 d\lambda\, dq)&\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\left(r\frac{\partial\lambda}{\partial y} - s\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\right]. \end{aligned}$$

On y reconnaît des termes du troisième degré par rapport à λ et à ses dérivées et des termes du second degré. Pour que l'équation ne change pas quand on remplace λ par $-\lambda$, il faut et il suffit (puisque $\lambda \neq 0$) que les équations

$$(\lambda d^2 p + 2 d\lambda\, dp)\left(s\frac{\partial\lambda}{\partial y} - t\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) - (\lambda d^2 q + 2 d\lambda\, dq)\left(r\frac{\partial\lambda}{\partial y} - s\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) = 0$$

et

$$(\lambda\, d^2p + 2\, d\lambda\, dp)\frac{\partial\lambda}{\partial y} - (\lambda\, d^2q + 2\, d\lambda dq)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,$$

soient identiques.

Ceci peut arriver de diverses manières :

13. 1° On peut avoir

$$s - t\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}} = r\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}} - s$$

ou encore

$$r\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + t\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Cette relation exprime *que les lignes* $\lambda =$ const. *sont des asymptotiques de la surface génératrice* (S), pourvu que λ ne soit pas une constante.

En observant que

$$\frac{1}{\lambda^2} = s^2 - rt = \omega,$$

on voit que ω est aussi solution de l'équation

$$r\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + t\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

ce qui donne pour la surface (S), définie en coordonnées cartésiennes, une équation du troisième ordre, du second degré par rapport aux derivées troisièmes α, β, γ, δ de z. On l'écrira sous forme irrationnelle, en choisissant l'un des facteurs

$$\text{(I)} \qquad \frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}} = \frac{2\gamma s - \beta t - \delta r}{2\beta s - \alpha t - \gamma r} = \frac{s + \sqrt{s^2 - rt}}{r}.$$

ou encore

$$r\frac{\partial\lambda}{\partial y} - s\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

Cette équation du troisième ordre peut s'intégrer de la manière suivante :

Désignons par u et v les paramètres des lignes asymptotiques de (S), qui correspondent aux développables de (Δ) ; on peut écrire

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial q}{\partial u}$$

et aussi, en changeant λ en $-\lambda$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \lambda \frac{\partial q}{\partial v}.$$

Les fonctions x et y sont donc deux solutions de l'équation aux dérivées partielles de Laplace

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right) = 0$$

et l'on en déduira p, q par deux quadratures, puis z par la quadrature nouvelle

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Mais ici λ égal à $\frac{1}{\sqrt{s^2 - rt}}$ est une fonction de u ou de v. Nous pouvons, sans restreindre la généralité, prendre par exemple $\frac{1}{\lambda} = u^2$, de sorte que la détermination de (S) revient à l'intégration de l'équation

$$u\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

qui donne $u\theta = U + V$, U, V désignant deux fonctions arbitraires des arguments respectifs u et v.

Si l'on prend

$$x = \frac{U + V}{u}, \qquad y = \frac{U_1 + V_1}{u},$$

on peut calculer p, q et z. On trouve ainsi

$$p = -u(U_1 + V_1) + 2\int uU'_1\,du, \qquad q = u(U + V) - 2\int uU'\,du$$

et ensuite

$$z = V_1U - U_1V + \frac{2V}{u}\int uU'_1\,du - 2\frac{V_1}{u}\int uU'\,du + \int (VV'_1 - V_1V')\,dv$$
$$+ 2\int d\left(\frac{U}{u}\right)\int uU'_1\,du - 2\int d\left(\frac{U_1}{u}\right)\int uU'\,du + \int (UU'_1 - U_1U')\,du.$$

Certaines des intégrales qui figurent dans z peuvent être explicitées; il suffit de poser

$$U = f'(u), \qquad V = g'(v), \qquad U_1 = f_1'(u), \qquad V_1 = g_1'(v)$$

pour obtenir

$$z = g'\left(f_1' - \frac{2f_1}{u}\right) - g_1'\left(f' - 2\frac{f}{u}\right) + \int (g'g_1'' - g''g_1')\,dv$$
$$+ \int (f'f_1'' - f''f_1')\,du + 2\int (uf_1' - f_1)\,d\left(\frac{f'}{u}\right) - 2\int (uf' - f)\,d\left(\frac{f_1'}{u}\right).$$

Une intégration par parties des dernières intégrales donnera

$$z = g'\left(f_1' - 2\frac{f_1}{u}\right) - g_1'\left(f' - 2\frac{f}{u}\right) + \frac{2}{u}(ff_1' - f_1f') - f'f_1'$$
$$+ g'g_1' - 2\int g_1'g''\,dv + 2\int f_1'f''\,du,$$

expression qui peut aussi s'écrire

$$z = (f_1' + g_1')\left(g' - f' + \frac{2f}{u}\right) - 2f_1\frac{(f' + g')}{u}$$
$$- 2\int g_1'g''\,dv + 2\int f_1'f''\,du.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de (S) dépendent bien de trois fonctions arbitraires d'un argument : $f(u)$, $f_1(u)$ et, puisque v n'est pas fixé, l'une des fonctions $g(v)$, $g_1(v)$.

On pourra donc encore prendre, par exemple $g'(v) = v$, ce qui donnera pour S, les formules

$$x = \frac{f'(u) + v}{u}, \qquad y = \frac{f_1'(u) + g_1'(v)}{u}$$

et

$$z = \left(v - f' + \frac{2f}{u}\right)(f_1' + g_1') - 2f_1\frac{(f' + v)}{u} + 2\int f_1'f''\,du.$$

14. Nous sommes en mesure de donner les expressions explicites des coordonnées des deux surfaces focales de la congruence (Δ). On a par exemple pour la nappe (F_1), lieu du point (x_1, y_1, z_1)

$$x_1 = -2\frac{g_1'}{u} - 2\frac{f_1}{u^2}, \qquad y_1 = 2\frac{v}{u} + 2\frac{f}{u^2}, \qquad z_1 = -\frac{1}{u^2},$$

et l'on pourrait même donner l'équation cartésienne générale des (F_1).

Si l'on calcule alors les coordonnées x_2, y_2, z_2 du point F_2, on trouve

$$x_2 = \frac{2}{u^2}(uf'_1 - f_1), \qquad y_2 = \frac{2}{u^2}(uf' - f), \qquad z_2 = \frac{1}{u^2},$$

et l'on reconnaît que *la deuxième nappe focale* (F_2) *se réduit à une courbe.*

Ce résultat aurait pu être prévu en partant des formules

$$x_2 = -y - p\lambda, \qquad y_2 = x - q\lambda, \qquad z_2 = \lambda,$$

qui donnent, eu égard aux équations qui expriment que u, v sont les paramètres des asymptotiques de S,

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = -p\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial v} = -q\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Ainsi la surface (S) que nous avons déterminée est celle qui conduit à *une congruence* (Δ), *à surface moyenne plane, pour laquelle l'une des nappes focales* (F_2) *est une courbe.* Aux asymptotiques $u =$ const. de (S) correspondent les cônes circonscrits à (F_1) ayant leurs sommets sur la courbe (F_2).

La congruence (Δ) ne peut être regardée comme une véritable congruence W — puisque (F_2) n'est pas une surface.

Le résultat obtenu garde cependant un intérêt : nous voyons en effet que *la condition nécessaire et suffisante pour que les développables de* (Δ), *qui correspondent aux asymptotiques* $u =$ const. *de* (S), *soient des cônes, est* $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0$. Si au contraire $\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} \neq 0$, on peut affirmer que les deux nappes focales sont bien des surfaces.

Si l'on part d'une surface (S) donnée en coordonnées cartésiennes satisfaisant à l'équation (I), on a immédiatement les lignes asymptotiques $\lambda =$ const. *Peut-on obtenir les autres?*

D'après l'analyse précédente, on peut déduire de (S) la courbe (F_2) et aussi la surface (F_1) et le problème revient à déterminer sur (F_1) les arêtes de rebroussement des développables qui contiennent (F_2). Or si l'on remonte aux formules qui donnent x_1, y_1, z_1 en u, v et aux expressions $x_1 = -y + p\lambda$, $y_1 = x + q\lambda$,

$z_1 = -\lambda$, on voit que les lignes $v =$ const. cherchées sont définies par une relation qui a l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{x + q\lambda}{\sqrt{\lambda}} + F(\lambda) = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad \frac{-y + p\lambda}{\sqrt{\lambda}} + F_1(\lambda) = \text{const.}$$

En écrivant par exemple que l'une de ces quantités satisfait à l'équation différentielle

$$r\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx + t\frac{\partial\lambda}{\partial y}dy = 0,$$

on aura pour déterminer $F(\lambda)$ l'expression explicite de $F'(\lambda)$ — c'est-à-dire que $F(\lambda)$ s'obtiendra par une quadrature. Mais on a tout de suite cette expression en écrivant que la dérivée du premier membre par rapport à λ est nulle

$$\frac{-x + \lambda q}{2\lambda\sqrt{\lambda}} + F'(\lambda) = 0, \qquad \text{puisque} \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\lambda\frac{\partial q}{\partial u};$$

il suffira de calculer la fonction de λ représentée par $\lambda q - x$.

Nous savons donc trouver par quadratures les lignes asymptotiques des surfaces génératrices (S), *lorsque l'une des nappes focales de* (Δ) *est une courbe.*

Des observations analogues peuvent être faites dans le cas singulier où λ est une constante absolue.

Si l'on écrit $s^2 - rt = \frac{1}{\lambda^2}$, on sait que cette équation peut s'intégrer explicitement par les méthodes classiques (*cf.* par exemple : G. Darboux : *Théorie des Surfaces*, 3e partie, § 716).

Mais il suffit de se reporter aux relations qui lient x, p, y, q, λ aux paramètres des asymptotiques u et v, pour obtenir

$$\begin{aligned} y - \lambda p &= v, & x + \lambda q &= G(v), \\ y + \lambda p &= F(u), & x - \lambda q &= u, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit x, y, p, q et ensuite l'expression de dz,

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

qui donne

$$4\lambda z = F(u)G(v) - uv + \int (G - vG')dv + \int (F - uF')du.$$

Ici les deux surfaces focales (F_1) et (F_2) se réduisent à des *courbes planes*

$$x_1 = -v, \qquad y_1 = G(v), \qquad z_1 = -\lambda,$$
$$x_2 = -F(u), \qquad y_2 = u, \qquad z_2 = \lambda,$$

qui sont quelconques.

Les asymptotiques des surfaces (S) qui satisfont à

$$s^2 - rt = \frac{1}{\lambda^2} = \text{const.}$$

sont données sans intégration par les formules

$$x - \lambda q = u, \qquad y - \lambda p = v.$$

13. 2° Examinons maintenant l'hypothèse où le déterminant

$$\Delta = r\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + t\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2$$

n'est pas nul. On peut conclure des deux équations envisagées à la fin du paragraphe 12 :

$$\lambda\, d^2 p + 2\, d\lambda\, dp = 0, \qquad \lambda\, d^2 q + 2\, d\lambda\, dq = 0,$$

et il s'agit de trouver *les surfaces* S *pour lesquelles ces deux équations sont identiques*. En les développant, elles s'écrivent :

$$0 = \lambda(\alpha\, dx^2 + 2\beta\, dx\, dy + \gamma\, dy^2) + 2(r\, dx + s\, dy)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y}dy\right),$$
$$0 = \lambda(\beta\, dx^2 + 2\gamma\, dx\, dy + \delta\, dy^2) + 2(s\, dx + t\, dy)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial \lambda}{\partial y}dy\right).$$

On aura donc en apparence deux équations de condition

$$\frac{\lambda\alpha + 2r\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda\beta + 2s\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}} = \frac{\lambda\beta + r\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} + s\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda\gamma + s\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} + t\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}} = \frac{\lambda\gamma + s\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}}{\lambda\delta + t\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}}.$$

Mais si l'on forme l'une d'elles, en prenant les deux premiers rapports et tenant compte des formules

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{\partial x} = 2\beta s - \alpha t - \gamma r, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{\partial y} = 2\gamma s - \beta t - \delta$$

on trouve simplement

$$r[(\alpha\gamma-\beta^2)t-s(\alpha\delta-\beta\gamma)+r(\beta\delta-\gamma^2)]=0,$$

équation qui, au facteur r près, est symétrique en x, y.

Il suit de là que, si $rt\neq 0$, les deux équations de condition se réduisent à une seule, qui s'écrit sous forme de déterminant

$$\text{(II)}\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ r & s & t \end{vmatrix}=0.$$

C'est l'équation du troisième ordre trouvée par M. U. Sbrana.

Nous l'avons d'abord remplacée par une équation du second ordre. On observe en effet qu'en posant, au lieu de (II),

$$\begin{aligned} r &= \mathrm{A}s+\mathrm{B}t, \\ \alpha &= \mathrm{A}\beta+\mathrm{B}\gamma, \\ \beta &= \mathrm{A}\gamma+\mathrm{B}\delta, \end{aligned}$$

on déduit de la première équation, en tenant compte des deux autres,

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}s+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}t=0,\qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}s+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}t=0.$$

Pour que l'on n'ait pas $s=t=0$, il faut donc $\dfrac{\partial(\mathrm{A},\mathrm{B})}{\partial(x,y)}=0$.

Si l'on pose, par exemple, $\mathrm{B}=\varphi(\mathrm{A})$, ces deux équations donnent

$$s+\varphi'(\mathrm{A})t=0,$$

la première devient alors

$$r=\mathrm{A}s+\varphi(\mathrm{A})t.$$

On pourrait encore, par élimination de A, écrire simplement

$$\frac{r}{s}=\Phi\left(\frac{s}{t}\right),$$

Φ désignant une fonction arbitraire. C'est aussi la *relation homogène la plus générale entre r, s, t.*

16. Pour transformer cette équation nous introduirons explicitement les variables u, v qui correspondent aux lignes asymptotiques de (S). On a vu plus haut qu'elles donnent lieu aux relations

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial q}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \lambda \frac{\partial q}{\partial v},$$

que nous écrirons

$$dy = \lambda\left(\frac{\partial p}{\partial u} du - \frac{\partial p}{\partial v} dv\right), \qquad dx = \lambda\left(-\frac{\partial q}{\partial u} du + \frac{\partial q}{\partial v} dv\right).$$

D'après notre hypothèse, les coefficients de l'équation

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

$\frac{r}{s}$ et $\frac{t}{s}$ par exemple, ne dépendent que d'un argument. Les asymptotiques sont donc définies par des relations $dx + \sigma\,dy = 0$, $dx + \tau dy = 0$ où σ et τ sont fonctions d'un seul argument, σ par exemple.

Si la relation $dx + \sigma dy = 0$ définit les lignes $u = \text{const.}$, on a

$$\frac{\partial q}{\partial v} - \sigma \frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

et par suite aussi

$$-\frac{\partial q}{\partial u} + \tau \frac{\partial p}{\partial u} = 0.$$

La condition d'intégrabilité de q, donne alors pour p l'équation

$$(\alpha_1) \qquad (\tau - \sigma)\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Mais d'autre part la condition d'intégrabilité de y, donne

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial p}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial p}{\partial v}\right) = 0,$$

que nous écrirons, en posant $l = \frac{1}{2}\log \lambda$,

$$(\alpha_2) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} = 0.$$

Cette équation est distincte de la précédente, sans quoi l'on obtiendrait aisément $\lambda = F(\sigma)$ c'est-à-dire que r, s, t seraient fonctions d'un même argument. C'est là un cas particulier à examiner à part.

On peut donc déduire des relations précédentes

$$(\alpha_1')\qquad \frac{\partial p}{\partial u}\left[\frac{\partial \tau}{\partial v}-\frac{\partial l}{\partial v}(\tau-\sigma)\right]-\frac{\partial p}{\partial v}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\partial l}{\partial u}(\tau-\sigma)\right]=0$$

et

$$(\alpha_2')\qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial l}{\partial v}(\tau-\sigma)-\frac{\partial \tau}{\partial v}\right]-\frac{\partial p}{\partial v}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}+\frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u}\right]=0,$$

qui donnent les quotients

$$\frac{\partial p}{\partial v}:\frac{\partial p}{\partial u}\qquad \text{et}\qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u\partial v}:\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Il reste à exprimer la condition d'intégrabilité de x en partant de

$$dx=\lambda\left(-\tau\frac{\partial p}{\partial u}du+\sigma\frac{\partial p}{\partial v}dv\right),$$

ce qui nous donne

$$(\alpha_3)\qquad (\tau+\sigma)\frac{\partial^2 p}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial \tau}{\partial v}+2\tau\frac{\partial l}{\partial v}\right)\frac{\partial p}{\partial u}+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}+2\sigma\frac{\partial l}{\partial u}\right)\frac{\partial p}{\partial v}=0.$$

Cette condition ne peut être distincte des deux autres, sans quoi on aurait $p=$ const. En tenant compte de (α_2) elle peut s'écrire

$$(\alpha_3')\qquad \frac{\partial p}{\partial u}\left[\frac{\partial \tau}{\partial v}+(\tau-\sigma)\frac{\partial l}{\partial v}\right]+\frac{\partial p}{\partial v}\left[\frac{\partial \sigma}{\partial u}+(\sigma-\tau)\frac{\partial l}{\partial u}\right]=0.$$

Si on la confronte avec (α_2'), on en déduit par un calcul facile

$$\frac{(\tau-\sigma)\dfrac{\partial l}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}}=\frac{-\dfrac{\partial \tau}{\partial v}}{(\tau-\sigma)\dfrac{\partial l}{\partial v}},$$

ou bien encore

$$(\alpha_3'')\qquad \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}=-\frac{\tau'\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{(\tau-\sigma)^2}$$

où

$$\tau'=\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Cette relation nous permet de réduire l'expression de $\frac{\partial p}{\partial u\,\partial v}:\frac{\partial p}{\partial v}$

donnée par (α'_2); on trouve ainsi

$$(\alpha''_2) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial p}{\partial v}} = -\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}}{\tau - \sigma},$$

et cette équation s'intègre une fois, sous la forme

$$\log \frac{\partial p}{\partial v} = -l + \int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma} + \log \mathrm{V}.$$

On peut d'ailleurs, en modifiant v, supposer $\mathrm{V} = 1$ et écrire

$$(\alpha''_2) \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = e^{-l + \int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}}$$

Considérons l'équation (α'_3); elle donne, si l'on tient compte de (α''_2),

$$\frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial p}{\partial u}} = -\frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial v}}{\tau - \sigma} - \frac{\partial l}{\partial v},$$

ce qui s'intègre par rapport à v et donne, en choisissant convenablement la variable u,

$$(\alpha''_1) \qquad \frac{\partial p}{\partial u} = e^{-l - \int \frac{\tau' d\sigma}{\tau - \sigma}}$$

Écrivons que les expressions de $\frac{\partial p}{\partial v}$, $\frac{\partial p}{\partial u}$ sont les dérivées d'une même fonction; on obtiendra

$$\left[(\sigma - \tau)\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right] e^{2\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}} = -\left[\frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial v}}{\tau - \sigma}\right];$$

c'est ce que donnerait l'équation (α'_3) si l'on y remplaçait $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial v}$ par leurs valeurs. On peut déduire de là, soit en utilisant la relation (α''_3), soit en remplaçant dans (α'_1) $\frac{\partial p}{\partial u}$ et $\frac{\partial p}{\partial v}$ par leurs valeurs, une deuxième relation linéaire en $\frac{\partial l}{\partial u}$, $\frac{\partial l}{\partial v}$:

$$\left[(\tau - \sigma)\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right] e^{2\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}} = \frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial v}}{\tau - \sigma} - \frac{\partial l}{\partial v}.$$

En les ajoutant (ou retranchant) membre à membre, on obtient

$$\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{\partial \sigma}{\partial u} e^{2\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{(\tau - \sigma)^2} e^{2\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}}.$$

Ainsi l est donné par une quadrature, pourvu que σ satisfasse à la condition d'intégrabilité

$$(\Delta_0) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} e^{2\int \frac{d\sigma}{\tau-\sigma}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\tau' \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{(\tau - \sigma)^2} e^{-2\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}}\right) = 0.$$

Une fois l connu, on aura par des quadratures les expressions de p, q, puis celles de x, y, enfin celle de z —, donc les coordonnées d'un point (x, y, z) de la surface (S).

Tout se réduit à l'étude de l'équation (Δ_0) qui remplace l'ensemble

$$r(\sigma + \tau) = 2s, \qquad r\sigma\tau = t$$

où τ est fonction arbitraire de σ.

Pour simplifier l'écriture de cette équation, nous poserons

$$\int \frac{g\, d\sigma}{\tau - \sigma} = -\log \Psi(\sigma),$$

ce qui donnera

$$\frac{1}{\tau - \sigma} = -\frac{\Psi'}{\Psi}, \qquad \frac{\tau'}{\tau - \sigma} = -\frac{\Psi''}{\Psi'};$$

l'équation (Δ_0) prendra, avec la fonction arbitraire Ψ, la forme simple

$$(\Delta) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Psi^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\Psi\Psi''\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) = 0.$$

Il est facile de l'interpréter : Si l'on considère un élément linéaire du plan, en coordonnées orthogonales u, v

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

on sait que A et C sont assujettis à la seule condition

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right) = 0,$$

qui exprime que la courbure totale du ds^2 est nulle.

On identifiera cette équation à (Δ) en posant

$$A = \Psi' - \sigma\Psi'', \qquad C = i\frac{\sigma}{\Psi'}.$$

Toutes les formes d'un élément linéaire orthogonal du plan où A *et* C *sont fonction l'un de l'autre, conduiront donc à des solutions du problème, c'est-à-dire à des congruences* W *à surface moyenne plane.*

Les surfaces génératrices (S) sont définies par les quadratures suivantes, au moyen d'une solution σ de (Δ)

$$dl = \Psi'\Psi''\frac{\partial\sigma}{\partial v}du - \frac{1}{\Psi'^2}\frac{\partial\sigma}{\partial u}dv, \qquad l = \frac{1}{2}\log\lambda$$

$$dp = e^{-l}\left(\Psi' du + \frac{dv}{\Psi'}\right), \qquad dq = e^{-l}\left[\frac{\sigma}{\Psi'}dv + (\sigma\Psi'' - \Psi')du\right],$$

$$dx = e^{l}\left[(\Psi' - \sigma\Psi'')du + \frac{\sigma}{\Psi'}dv\right], \qquad dy = e^{l}\left(\Psi' du - \frac{dv}{\Psi'}\right);$$

d'où l'on conclut enfin

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

On observera qu'avec les formules précédentes

$$dp\,dx + dq\,dy \equiv 2du\,dv,$$

c'est-à-dire que *la forme* $dp\,dx + dq\,dy$ *est à courbure nulle.*

On conclut de là que *pour toute surface* (S) *satisfaisant à une équation* $\frac{r}{s} = \Phi\left(\frac{s}{t}\right)$, *on peut déterminer les paramètres des asymptotiques,* u *et* v, *par des quadratures.*

Sans faire appel à cette proposition, on remarquera ici que, par exemple,

$$dx + \sigma dy = e^{l}\Psi' du = \sqrt{\lambda}\,\Psi' du.$$

Les équations $r(\sigma + \tau) = 2s$, $r\sigma\tau = t$ donnent σ et τ en x, y, donc τ en fonction de σ; on a ensuite

$$\log\Psi' = -\int\frac{d\sigma}{\tau - \sigma}.$$

Comme $\lambda^2 = \frac{1}{s^2 - rt}$, tout est connu en x, y dans la différentielle exacte

$$du = \frac{dx + \sigma\, dy}{\Psi\sqrt{\lambda}}.$$

La condition que $dp\, dx + dq\, dy$ soit un produit de deux différentielles du, dv donne, pour z regardé comme fonction de x, y, une équation du quatrième ordre. Les surfaces (S) obtenues ici satisfont à une équation du troisième ordre; elles ne sont donc qu'un cas particulier des précédentes qu'il serait intéressant d'étudier.

17. Signalons le parallélisme entre les résultats précédents et ceux de Weingarten relatifs à la détermination des surfaces (W) dont les rayons de courbure principaux sont fonction l'un de l'autre. Weingarten a montré que l'équation cartésienne du second ordre qui exprime ce fait, peut être ramenée à celle qui exprime que $A^2 du^2 + C^2 dv^2$, *où* A *et* C *sont fonction l'un de l'autre, convient à une sphère de rayon* 1, c'est-à-dire a une courbure constante égale à 1. Les *congruences de normales* aux surfaces (W) sont telles que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales, et l'on peut déterminer les développables de ces congruences, c'est-à-dire les lignes de courbure de la surface (W), par des quadratures (Lie).

On sait que le problème de Weingarten, détermination de A et C, n'a été résolu que dans des cas très particuliers (surfaces minima, surfaces dont la développée est applicable sur le paraboloïde de révolution). Le problème actuel et, plus simple, relatif au plan, peut être résolu complètement pour certaines formes de la relation entre A et C, un peu plus générales ([1]).

Ainsi l'on sait résoudre l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right) = 0;$$

pour $A = 1$ (le plan est rapporté à des courbes parallèles et aux droites normales), pour $A = C$ (le système u, v est isotherme), pour $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{C^2} = 1$ (le plan est rapporté à des coniques géodé-

([1]) Nous verrons tout à l'heure la réduction définitive du problème général.

siques). On peut encore la résoudre complètement pour $A^2+C^2=1$ (le plan est *habillé*, son élément linéaire étant $\cos^2\alpha\, du^2+\sin^2\alpha\, dv^2$) et encore pour $AC=1$ (ce cas correspond à une carte géographique du plan en coordonnées orthogonales u, v où les aires sont conservées).

Tous ces cas ne conduisent pas, pour les surfaces (S), à des équations cartésiennes en r, s, t intéressantes. Nous nous bornerons à examiner, avec le cas des coniques géodésiques qui donnera une équation transcendante remarquable (correspondant à l'équation de Weingarten qui a conduit aux surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution), le cas où $A=C^m$ (comprenant celui où $m=-1$), où l'équation se ramène à une équation de Laplace à invariants égaux, très simple.

En raison des applications, il sera commode d'introduire explicitement les expressions de A et de C dans les formules qui permettent de définir les surfaces génératrices (S) à l'aide des paramètres u et v de leurs asymptotiques.

On a d'abord

$$\frac{\Psi}{\sigma}=\frac{i}{C}.$$

L'expression

$$A=\Psi-\sigma\frac{d\Psi}{d\sigma}=-\sigma^2\frac{d\left(\frac{\Psi}{\sigma}\right)}{d\sigma}$$

donne alors

$$\frac{d\sigma}{\sigma^2}=i\frac{dC}{AC^2}\qquad\text{ou}\qquad\frac{1}{\sigma}=-i\int\frac{dC}{AC^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{\Psi}=-C\int\frac{dC}{AC^2}.$$

Nous pouvons maintenant calculer τ;

$$\tau-\sigma=-\Psi\frac{d\sigma}{d\Psi}=-\frac{\sigma}{\left(1-\frac{A}{\Psi}\right)}=\frac{-i}{\left(1+AC\int\frac{dC}{AC^2}\right)\int\frac{dC}{AC^2}}$$

donne

$$\tau=\frac{i\,AC}{1+AC\int\frac{dC}{AC^2}}.$$

On déduira de là les expressions de $\sigma+\tau=\frac{2s}{r}$, $\sigma\tau=\frac{t}{r}$ qui permettent de former l'équation cartésienne des surfaces (S).

Les expressions simples sont celles de $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\sigma\tau}$

$$\frac{2s}{t} = -i\left(\frac{1}{AC} + 2\int \frac{dC}{AC^2}\right), \qquad \frac{r}{t} = -\left(\frac{1}{AC} + \int \frac{dC}{AC^2}\right)\int \frac{dC}{AC^2}.$$

La quantité λ telle que $\lambda^2 = \frac{1}{s^2 - rt}$, s'obtient par la quadrature

$$\lambda = e^{2l}, \qquad dl = i\left(-\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}dv + \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}du\right).$$

Signalons encore la formule

$$\frac{4(s^2 - rt)}{t^2} = \frac{-1}{A^2C^2},$$

qui établit que, pour une surface à lignes asymptotiques réelles, l'une des quantités A, C doit être une imaginaire pure.

18. Soit d'abord à étudier le cas $AC = 1$, c'est-à-dire à déterminer, en posant $A^2 = \omega$, de la manière la plus générale u, v, ω de telle sorte que

$$\omega\, du^2 + \frac{1}{\omega}\, dv^2 = dx\, dy.$$

On déduit de là

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i\omega\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -i\omega\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\omega},$$

ou encore en portant dans la condition d'intégrabilité des équations en v

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

l'expression de ω au moyen des dérivées de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

équation d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ a disparu.

Ce type d'équations se ramène régulièrement à une équation de

Laplace à invariants égaux. Une transformation de Legendre

$$Z = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u, \qquad x = P, \qquad y = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Y,$$

donne d'abord l'équation

$$RX^2 + TY^2 = 0,$$

dont les caractéristiques sont définies par

$$X^2 dY^2 + Y^2 dX^2 = 0,$$

et l'introduction des variables caractéristiques

$$\alpha = \log Y - i\log X, \qquad \beta = \log Y + i\log X$$

qui donne

$$X = e^{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}}, \qquad Y = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad P = \frac{i}{X}\left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right), \qquad Q = \frac{1}{Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right)$$

conduit à l'équation

$$4\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\partial\beta} - (1+i)\frac{\partial Z}{\partial\beta} - (1-i)\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = 0.$$

Cette équation de Laplace à invariants égaux, où l'on pose $Z = \Lambda\theta$ avec

$$\Lambda = e^{\frac{-1}{4}[(1+i)\alpha + (1-i)\beta]}$$

donnera pour θ l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{1}{8}\theta,$$

dite *des télégraphistes*, dont l'intégration est connue.

C'est de cette intégration que dépendra la détermination des surfaces (S) dont l'équation aux dérivées partielles en coordonnées cartésiennes, est

$$4(s^2 - rt) + t^2 = 0.$$

L'étude du cas où $A = C^m (m + 1 \neq 0)$ peut se faire par une méthode analogue. L'identité

$$\omega^m du^2 + \omega dv^2 = 2dx\,dy, \qquad \text{où} \qquad \omega = C^2,$$

conduira aux relations

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i\omega^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -i\omega^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\omega^m},$$

d'où l'on déduit d'abord

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{m-1}{4} \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\omega} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{m-1}{4} \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\omega} \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

puis en y portant l'expression de ω

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{m+1}{m-1} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

La transformation de Legendre remplacera cette équation par

$$RX^2 + TY^2 + 2\frac{m+1}{m-1} XYS = 0,$$

que l'introduction des variables caractéristiques

$$Y^{1-\sqrt{m}} X^{\sqrt{m}+1} = \alpha, \qquad Y^{1+\sqrt{m}} X^{1-\sqrt{m}} = \beta,$$

change en une équation linéaire à invariants égaux

$$\frac{8m}{(m-1)} \alpha\beta \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha \partial\beta} - \alpha\frac{\partial Z}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial Z}{\partial \beta} = 0.$$

En posant $\Lambda = (\alpha\beta)^{\frac{m-1}{8m}}$ et $Z = \Lambda\theta$, on trouvera pour θ l'équation

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{(m-1)^2}{(8m)^2}\frac{1}{\alpha\beta},$$

et il suffit de prendre pour nouvelles variables

$$\alpha_1 = \frac{4m}{(m-1)}\alpha^2, \qquad \beta_1 = \frac{4m}{(m-1)}\beta^2,$$

pour avoir *à nouveau*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha_1 \partial\beta_1} = 0.$$

19. La méthode précédente paraît devoir réussir *dans le cas* *général* où il s'agit de trouver u, v, ω en x, y de telle sorte que

$$\frac{1}{\omega^2}\,du^2 + \frac{1}{\varphi^2(\omega)}\,dv^2 = 4\,dx\,dy.$$

On déduit de cette identité

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\varphi(\omega)}{\omega}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = i\frac{\varphi(\omega)}{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}$$

et aussi

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2.$$

En exprimant la compatibilité des équations en v, on trouve pour u l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\omega\varphi' + \varphi}{\omega\varphi' - \varphi} = 0,$$

qu'une transformation de Legendre amène à la forme

$$RX^2 + TY^2 - 2S\,XY\,\Phi(XY) = 0$$

où l'on a posé

$$\Phi(\omega^2) = \frac{\omega\varphi' + \varphi}{\omega\varphi' - \varphi}.$$

Les caractéristiques de cette équation, définies par

$$X^2\,dY^2 + Y^2\,dX^2 + 2\,XY\,\Phi(XY)\,dX\,dY = 0,$$

s'obtiennent par des quadratures : soit $XY = \gamma$, les variables caractéristiques α, β sont

$$\alpha = \log X - \int \frac{d\gamma}{\gamma\left[1 - \Phi + \sqrt{\Phi^2 - 1}\right]}$$

β se déduisant de là par le changement de signe du radical.

Plus simplement, avec la variable ω et la fonction φ, on a

$$\alpha = \log X - \int\left(\frac{1}{\omega} + \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\right)d\omega,$$

et l'on en conclut que ω est une fonction de la différence $(\alpha - \beta)$

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \int\sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\,d\omega.$$

Le calcul de la transformée en $Z = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u$ donne enfin la relation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{8}\frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi'\sqrt{\omega\varphi\varphi'}}\left(\frac{\partial Z}{\partial\alpha} - \frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) = 0$$

qui est à *invariants égaux*, en raison de $\omega = f(\alpha - \beta)$.

La détermination des éléments linéaires du plan, qui ont la forme $\frac{du^2}{\omega^2} + \frac{dv^2}{\varphi^2}$, *est ainsi ramenée à l'intégration d'une équation à invariants égaux*, qu'on écrit aisément

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F(\alpha - \beta)\,\theta.$$

C'est une *équation harmonique particulière*, où ne figure qu'une fonction arbitraire de l'argument $(\alpha - \beta)$; on peut l'intégrer partiellement à l'aide *d'intégrales définies* quand on aura déterminé la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2} = -[F(\lambda) + h]\,\sigma,$$

où h est un paramètre arbitraire.

L'analyse précédente établit donc que *les surfaces qui, en coordonnées cartésiennes, satisfont à une équation*

$$\frac{r}{s} = \Phi\left(\frac{s}{t}\right),$$

où Φ est arbitraire, peuvent s'obtenir *rapportées à leurs lignes asymptotiques* en résolvant l'identité

$$\frac{du^2}{\omega^2} + \frac{dv^2}{\varphi^2(\omega)} = 4\,d\xi\,d\eta,$$

c'est-à-dire en *déterminant les systèmes orthogonaux du plan*

$$A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

où A *et* C *sont fonction l'une de l'autre*, de plus que ce dernier problème rapporté aux variables *caractéristiques* α, β, revient à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F(\alpha - \beta)\,\theta,$$

où F est arbitraire. C'est à cette dernière forme que l'on peut donc ramener toute équation cartésienne

$$\frac{r}{s} = \Phi\left(\frac{s}{t}\right);$$

il y aurait intérêt à le montrer par une étude directe ([1]).

20. Nous signalerons toutefois encore l'équation cartésienne qui correspond au cas où le plan est rapporté à des *coniques géodésiques*, ce qui donne entre ω et φ la relation $\omega^2 + \varphi^2 = 1$.

L'équation cartésienne s'obtient en général par l'élimination de ω entre les relations

$$\frac{4(s^2 - rt)}{t^2} = -\omega^2\varphi^2, \qquad \frac{2is}{t} = \omega\varphi - 2\int \omega\, d\varphi.$$

Si nous posons $\omega = \cos\rho$, $\varphi = \sin\rho$, on aura

$$\frac{2}{t}\sqrt{s^2 - rt} = i\cos\rho\sin\rho, \qquad \frac{2is}{t} = -\rho,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{4}{t}\sqrt{s^2 - rt} = i\sin 2\rho = \frac{e^{\frac{4s}{t}} - e^{\frac{-4s}{t}}}{2}.$$

D'autre part, la relation $\varphi^2 = 1 - \omega^2$ donne immédiatement, pour la transformée en Z, l'équation $\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0$ dont la solution est évidente. Nous savons donc donner, à l'aide de quadratures, les expressions des coordonnées de toute surface qui satisfait à la relation transcendante

$$\text{(D)} \qquad 8\sqrt{s^2 - rt} = t\left[e^{\frac{4s}{t}} - e^{\frac{-4s}{t}}\right]$$

au moyen des paramètres de leurs asymptotiques u, v et aussi ramener l'intégration de cette équation à celle de $\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0$.

Pour rapporter *de la manière la plus générale* le plan à des coniques géodésiques u, v, c'est-à-dire résoudre l'équation

$$\frac{du^2}{\cos^2\rho} + \frac{dv^2}{\sin^2\rho} = dX^2 + dY^2,$$

---

[1] Depuis que ces lignes sont écrites, nous avons pu rattacher cette question à un problème plus général (cf. *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 181, décembre 1925).

il suffit de considérer deux familles de courbes parallèles quelconques, en désignant par $u+v$, $u-v$ les distances du point (X, Y) à ces courbes. On a ainsi le système

$$u+v = X\cos a + Y\sin a - f(a), \qquad u-v = X\cos b + Y\sin b - g(b),$$
$$0 = -X\sin a + Y\cos a - f'(a), \qquad 0 = -X\sin b + Y\cos b - g'(b).$$

d'où l'on déduit, par élimination de X, Y, les expressions possibles de a, b en u, v. En outre $\rho = \frac{b-a}{2}$.

Il sera commode de garder, au lieu de u, v, les variables a, b qui sont *essentiellement* les variables caractéristiques α, β étudiées plus haut.

On a ainsi, pour définir u, v, les expressions

$$\sin(b-a)[u+v+f(a)] + f'(a)\cos(b-a) - g'(b) = 0,$$
$$\sin(b-a)[u-v+g(b)] + f'(a) - g'(b)\cos(b-a) = 0,$$

et les coefficients A, C de l'élément linéaire sont

$$\frac{1}{A} = \cos\frac{b-a}{2}, \qquad \frac{1}{C} = \sin\frac{b-a}{2}.$$

Ce sont là tous les éléments nécessaires pour le calcul par quadratures des coordonnées cartésiennes des surfaces (S) qui satisfont à l'équation (D).