BULLETIN DE LA S. M. F.

V. VOLTERRA

Sur les fonctions permutables

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 548-568
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__548_1>

SUR LES FONCTIONS PERMUTABLES ;

PAR M. VITO VOLTERRA.

1. Soit une expression [1]

$$\overset{*}{1}{}^{0} + F(x, y)$$

où F est une fonction finie et continue de premier ordre ou d'ordre supérieur et $\overset{*}{1}{}^{0}$ dénote la puissance de composition zéro de l'unité

---

(1) VOLTERRA et PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*. Paris, Gauthier-Villars, 1924, Chap. I, § 8.

que l'on peut remplacer par la puissance de composition zéro d'une fonction quelconque de x, y.

Φ étant permutable avec F, on aura

$$\overset{*}{\Phi}\left(\overset{*}{1}{}^0 \pm \overset{*}{F}\right) = \Phi \pm \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}.$$

Si

$$|F| < M, \qquad |\Phi| < N, \qquad |y - x| \overline{\gtrless} 1$$

il viendra

$$\left|\overset{*}{\Phi}\left(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{F}\right)\right| < N(1 + M).$$

On pourra exprimer cette propriété d'une manière symbolique en écrivant

$$\left|\overset{*}{1}{}^0 \pm F\right| < 1 + M.$$

n étant entier et positif, formons

$$\left(\overset{*}{F}{}^0 \pm \overset{*}{F}\right)^n = \overset{*}{F}{}^0 \pm n F + \frac{n(n+1)}{1.2}\overset{*}{F}{}^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\overset{*}{F}{}^3 \dots$$
$$\dots + (\pm 1)^n \overset{*}{F}{}^n;$$

on aura de même

$$\left|\left(\overset{*}{F}{}^0 \pm \overset{*}{F}\right)^n\right| < (1 + M)^n.$$

2. Supposons que la série

$$|a_0| + |a_1| R + |a_2| R^2 + \dots$$

ait pour rayon de convergence l'∞, la fonction

$$\sigma(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

sera une fonction entière.

Si nous prenons

$$\overset{*}{\Phi}\left\{\overset{*}{F}{}^0 + a_1 z\left(\overset{*}{F}{}^0 \pm \overset{*}{F}\right) + a_2 z^2\left(\overset{*}{F}{}^0 \pm \overset{*}{F}\right)^2 + \dots\right\}$$

cette expression sera aussi une fonction entière de z, et nous pourrons dire d'une manière symbolique que

$$\Theta = \overset{*}{F}{}^0 + a_1 z\left(\overset{*}{F}{}^0 \pm F\right) + a_2 z^2\left(\overset{*}{F}{}^0 \pm \overset{*}{F}\right)^2 + \dots$$

est une série entière de z; x, y étant quelconques.

La série précédente s'écrira aussi

$$\Theta = \sigma(z)\overset{*}{F}{}^0 + \overset{*}{\Psi}(z \mid F),$$

où $\Psi(z \mid F)$ est une fonction de composition de F du même ordre que F ou d'ordre supérieur (¹). En outre $\overset{*}{\Psi}(z \mid F)$ pour toute valeur déterminée de z sera finie et continue.

Prenons maintenant, m étant un nombre réel quelconque,

$$\overset{*}{\Theta}{}^m = \sigma^m(z)\left[\overset{*}{F}{}^0 + \frac{m_1}{\sigma}\overset{*}{\Psi}(z \mid F) + \frac{m_2}{\sigma^2}\overset{*}{\Psi}{}^2(z \mid F) + \ldots\right] = \sigma^m(z)\Omega_m,$$

où

$$m_h = \frac{m(m-1)\ldots(m-h+1)}{h!}.$$

Si l'on limite z dans un domaine fini qui ne contient pas de racines de l'équation

$$(1) \qquad \sigma(z) = 0,$$

la série Ω_m sera uniformément convergente (²). Donc Ω_m sera une fonction uniforme de z dont les points singuliers à distance finie ne pourront être que les racines de l'équation (1).

3. Soit $m = -1$ et

$$\sigma(z) = 1 - z.$$

On aura

$$(2) \qquad \frac{\overset{*}{F}{}^0}{\overset{*}{F}{}^0 + z\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^0\right)} = \frac{1}{1-z}\left[\overset{*}{F}{}^0 - \frac{z}{1-z}\overset{*}{F} + \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \overset{*}{F}{}^2 - \ldots\right].$$

Si $F = 1$

$$(2') \qquad \frac{\overset{*}{1}{}^0}{\overset{*}{1}{}^0 + z\left(\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^0\right)} = \frac{1}{1-z}\left[\overset{*}{1}{}^0 - \frac{z}{1-z} + \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 (y-x) + \left(\frac{z}{1-z}\right)^3 \frac{(y-x)^2}{1.2} - \ldots\right]$$

ou ce qui est équivalent

$$(2'') \qquad \frac{\overset{*}{1}}{\overset{*}{1}{}^0 + z\left(\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^0\right)} = \frac{1}{1-z}\left[1 - \frac{z}{1-z}(y-x) + \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \frac{(y-x)^2}{1.2} - \left(\frac{z}{1-z}\right)^3 \frac{(y-x)^3}{1.2.3} + \ldots\right] = \frac{1}{1-z} e^{-\frac{(y-x)}{1-z}}$$

(¹) *Ouvrage cité* (Chap. X et Chap. I, § 10).
(²) *Ouvrage cité* (Chap. II, § 2).

C'est une fonction uniforme ayant pour singularité essentielle le point $z = 1$.

4. Nous aurons un second exemple en prenant $\sigma(z) = 1 - z$ et remplaçant m par $m - 1$

$$(3) \quad \left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z\left(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^{m-1}$$
$$= (1-z)^{m-1}\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + (m-1)\frac{z}{1-z}\mathrm{F} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \ldots\right].$$

Si $\mathrm{F} = 1$, on trouvera

$$(3') \quad \overset{*}{1}\left[\overset{*}{1}{}^0 + z\left(\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^0\right)\right]^{m-1}$$
$$= (1-z)^{m-1}\left[1 + (m-1)\frac{z}{1-z}(y-x) + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2(y-x)^2 + \ldots\right] = (1-z)^{m-1}\mathrm{P}_m.$$

P_m est une fonction uniforme de z ayant pour singularité le point $z = 1$.

Posons

$$\frac{z}{1-z}(y-x) = v,$$

il sera

$$(\mathrm{A}) \quad \mathrm{P}_m(v) = 1 + (m-1)v + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.1.2}v^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.1.2.3}v^3 + \ldots.$$

5. On vérifie facilement la relation

$$(\mathrm{B}) \quad \frac{d}{dv}\left[v\left(\frac{d\mathrm{P}_m}{dv} + \mathrm{P}_m\right)\right] = m\,\mathrm{P}_m.$$

Posons

$$(4) \quad \mathrm{P}_m(v) = e^{-v}p_{1-m}(-v),$$

d'où

$$(5) \quad \mathrm{P}'_m(v) = -e^{-v}[p'_{1-m}(-v) + p_{1-m}(-v)].$$

Remplaçant P_m par l'expression (4) dans l'équation (B) on trouve

$$\frac{d}{dv}\left\{ v\left[\frac{dp_{1-m}(v)}{dv}+p_{1-m}(v)\right]\right\}=(1-m)p_{1-m}(v),$$

c'est-à-dire que $p_{1-m}(v)$ et $P_{1-m}(v)$ satisfont la même équation différentielle.

Mais

$$p_{1-m}(0)=P_{1-m}(0)=1;\qquad p'_{1-m}(0)=P'_{1-m}(0)=-m,$$

donc

$$p_{1-m}(v)=P_{1-m}(v).$$

Les équations (4) et (5) deviennent donc

$$\text{(C)}\quad P_m(v)=e^{-v}P_{1-m}(-v)$$
$$=e^{-v}\left[1+mv+\frac{m(m+1)}{1.2.1.2}v^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3.1.2.3}v^3+\ldots\right],$$

$$\text{(6)}\qquad P'_m(v)=-e^{-v}[P'_{1-m}(-v)+P_{1-m}(-v)].$$

Supposons $1>m>0$, $1>v>0$; on voit immédiatement que $P_m(v)$ est positive et décroît lorsque v croît. Par suite

$$\text{(7)}\qquad 1>P_m(v)>0.$$

Mais remarquons que

$$P_{1-m}(-v)=1+\sum_1^n{}_h\frac{m(m+1)\ldots(m+h-1)}{(h!)^2}v^h$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}\sum_{n+1}^{\infty}{}_k\frac{(m+n)\ldots(m+k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots k}\frac{v^k}{k!}$$
$$<1+\sum_1^n{}_h\frac{m(m+1)\ldots(m+h-1)}{(h!)^2}v^h$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}\left[e^v-\sum_1^n{}_k\frac{v^k}{k!}\right].$$

Par suite

$$P_m(v)=e^{-v}P_{1-m}(-v)<\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}+Q_n(v)e^{-v},$$

où $Q_n(v)$ est un polynome de degré n rationnel et entier. Or en prenant n suffisamment grand on pourra réduire

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}<\frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant une quantité positive quelconque.

Cela posé on pourra prendre v suffisamment grand de manière que

$$Q_n(v)\, e^{-v} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite il sera

$$(8)\qquad P_m(v) < \varepsilon.$$

Donc (9)

$$(9)\qquad \lim_{v=+\infty} P_m(v) = 0.$$

On déduit des formules (6) et (B)

$$P'_m(v) = -e^{-v}(1-m)\left[1+\frac{m}{1.2}v+\frac{m(m+1)}{1.2.3.1.2}v^2+\ldots\right],$$

d'où

$$|vP'_m(v)| = e^{-v}(1-m)\left[v+\frac{m}{1.2}v^2+\frac{m(m+1)}{1.2.3.1.2}v^3+\ldots\right]$$
$$< e^{-v}(1-m)(e^v-1) < 1-m.$$

Donc $P'_m(v)$ est fini et pour $v = +\infty$ il est infiniment petit d'un ordre non inférieur au premier.

Mais, par un procédé analogue à celui par lequel nous avons démontré la relation (9) on pourrait prouver que

$$(10)\qquad \lim_{v=+\infty} [vP'_m(v)] = 0$$

et par suite $P'_m(v)$ est infiniment petit d'ordre supérieur à $\frac{1}{v}$ pour $v = \infty$.

6. Les séries précédentes peuvent être employées de plusieurs manières. Je me suis déjà servi de la formule (2) pour calculer $\overset{*}{F}\, \overset{*}{l}\, F$ [1].

Tâchons maintenant d'employer la formule (3) pour un autre but.

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. X, § 21. M. Pérès s'est aussi servi d'un procédé analogue dans le cas d'une équation intégrale de première espèce. On pourrait la tirer comme cas particulier des formules que je donne dans ce Mémoire [*Cf.* PÉRÈS, *Sur les transformations qui conservent la composition* (*Bulletin de la Société math.*, t. XLVII, § 10-11)].

Il est connu que certaines questions que l'on sait traiter lorsqu'on envisage des fonctions de premier ordre ou même de second ordre n'ont pas encore été résolues pour des fonctions d'ordre supérieur.

C'est ainsi, par exemple, que l'on sait trouver toutes les fonctions permutables avec une fonction de premier ordre ou de second ordre (1); mais si l'on pose le même problème pour les fonctions de troisième ordre ou d'ordre supérieur, on ne sait pas le résoudre, excepté dans le cas des fonctions analytiques.

Or si, étant donnée une fonction d'un certain ordre entier et positif n, il était possible de calculer sa racine $n^{\text{ième}}$ de composition (2) on saurait calculer le groupe des fonctions permutables avec celle-ci et par suite on aurait un groupe de fonctions permutables avec la fonction donnée.

Nous allons montrer dans les paragraphes suivants une voie qui peut conduire à la détermination des racines $n^{\text{ièmes}}$ de fonctions données.

7. Il est évident que

$$\frac{d}{dz}\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+z\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^m=m\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+z\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^{m-1},$$

c'est pourquoi, m étant positif, et z étant réel et $1>z\geqq 0$,

$$\begin{aligned}
\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+z\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^m-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 &= m\int_0^z\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+z\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^{m-1}dz\\
&= m\int_0^z\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)(1-z)^{m-1}\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+(m-1)\frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+\ldots\right]dz\\
&= -m\int_0^z(1-z)^{m-1}\,dz\,\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0+m\int_0^z(1-z)^{m-1}\\
&\quad\times\left\{\left[\mathrm{F}+(m-1)\frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\ldots\right]\right.\\
&\qquad\left.-\left[(m-1)\frac{z}{1-z}\mathrm{F}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\ldots\right]\right\}dz,
\end{aligned}$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. III.
(2) *Loc. cit.*, Chap. V.

et puisque

$$m\int_0^z (1-z)^{m-1}\,dz\,\overset{*}{F}{}^0 = \overset{*}{F}{}^0 - (1-z)^m\overset{*}{F}{}^0,$$

il sera

$$\begin{aligned}
\text{(I)}\quad \left[\overset{*}{F}{}^0 + z(\overset{*}{F}-\overset{*}{F}{}^0)\right]^m = m\int_0^z (1-z)^{m-1} \\
\times\Bigg\{\bigg[F + (m-1)\frac{z}{1-z}F^2 \\
+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^3+\ldots\bigg] \\
-\left[(m-1)\frac{z}{1-z}F+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^2+\ldots\right]\Bigg\}\,dz \\
+(1-z)^m\overset{*}{F}{}^0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire (au moins formellement) en faisant $z=1$,

$$\begin{aligned}
\text{(II)}\quad \overset{*}{F}{}^m = m\int_0^1 (1-z)^{m-1} \\
\times\Bigg\{\bigg[F+(m-1)\frac{z}{1-z}F^2+\ldots+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2}\overset{*}{F}{}^2+\ldots\bigg] \\
-\left[(m-1)\frac{z}{1-z}F+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^2+\ldots\right]\Bigg\}\,dz.
\end{aligned}$$

8. Les séries qui apparaissent dans l'intégrale du second membre sont uniformément convergentes si

$$(a)\qquad 0\leqq z<1-\varepsilon,\qquad a\leqq x\leqq y\leqq b,$$

a et b étant les limites entre lesquelles peuvent varier x et y, et ε est une quantité aussi petite que l'on veut.

On pourra écrire l'intégrale qui apparaît dans le second membre de la formule (I) sous la forme

$$(6)\qquad \varphi(z\,|\,x,y) = m\int_0^z (1-z)^{m-1}\,\Phi(z\,|\,x,y)\,dz,$$

où $\varphi(z\,|\,x,y)$ est une fonction finie et continue, et l'on aura

$$\left[\overset{*}{F}{}^0 + z(\overset{*}{F}-\overset{*}{F}{}^0)\right]^m = (1-z)^m\overset{*}{F}{}^0 + \varphi(z\,|\,x,y).$$

Soit $m=\frac{p}{q}$, cette fraction rationnelle étant réduite à sa plus simple expression.

Il sera

$$(\mathrm{I}_a)\qquad \left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z\left(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^p = \left[(1-z)^{\frac{p}{q}}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + \varphi(z\,|\,x, y)\right]^q,$$

d'où l'on tire

$$(\mathrm{I}_b)\quad p(1-z)^{p-1}\mathrm{F} + \frac{p(p-1)}{1.2}(1-z)^{p-2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \ldots + \overset{*}{\mathrm{F}}{}^p$$
$$= q(1-z)^{\frac{p(q-1)}{q}}\varphi + \frac{q(q-1)}{1.2}(1-z)^{\frac{p(q-2)}{q}}\overset{*}{\varphi}{}^2 + \ldots + \overset{*}{\varphi}{}^q(z\,|\,x, y).$$

Supposons maintenant que

$$(b)\qquad m\int_0^1 (1-z)^{m-1}\,\Phi(z\,|\,x, y)\,dz$$

soit convergente. Il représentera une fonction

$$\varphi(x, y)$$

et l'on aura

$$(c)\qquad \varphi(x, y) = \lim_{z=1} \varphi(z\,|\,x, y).$$

Or il serait suffisant que l'intégrale (b) fût uniformément convergente, c'est-à-dire que la limite (c) eût lieu uniformément pour toutes les valeurs de x, y qui satisfont aux relations (a) pour déduire de la relation (c) que toutes les puissances entières de composition de $\varphi(z\,|\,x, y)$ tendent pour $z = 1$ vers les puissances de composition de $\varphi(x, y)$ ayant le même exposant.

En général cette convergence uniforme ne subsiste pas, mais elle n'est pas nécessaire pour la vérification de la propriété précédente. Il suffit par exemple que l'intégrale (b) converge uniformément pour

$$a \leqq x < y - \eta \leqq b - \eta,$$

η étant une quantité arbitraire et que

$$|\,\varphi(z\,|\,x, y)\,|$$

soit inférieure à une quantité finie M ou même à $\dfrac{\mathrm{M}}{(y-x)^h}$, h étant < 1.

9. Nous dirons que *l'intégrale* (b) *et ses puissances entières sont convergentes régulièrement* lorsque $\varphi(z\,|\,x, y)$ et ses puis-

sances entières tendent, pour $z=1$, vers $\varphi(x, y)$ et les puissances de $\varphi(x, y)$ ayant le même exposant.

Supposons que cette condition soit satisfaite, et revenons à l'équation (Π_b). Lorsque z tend vers 1, on aura

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^p = \lim_{z=1} \overset{*}{\varphi}{}^q(z \mid x, y) = \overset{*}{\varphi}{}^q(x, y).$$

Donc

$$\varphi(x, y) = \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\frac{p}{q}}.$$

On pourra étendre, sous certaines conditions, ce résultat au cas où $\frac{p}{q}$ tend vers un nombre irrationnel ([1]).

Mais arrêtons-nous au cas de m rationnel.

Si l'intégrale (b) et ses puissances entières sont *convergentes régulièrement* la formule (Π) sera valable.

De même si *a priori* on sait que $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^m$ existe et que

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^m = \lim_{z=1} \left\{ \left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z\left(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^{\frac{p}{q}} - (1-z)^{\frac{p}{q}} \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 \right\},$$

la limite de $\varphi(z \mid x, y)$ existera et elle donnera l'expression de $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^m$ par la formule (Π).

Mais dans beaucoup de cas il suffira de vérifier que l'intégrale (Π) est convergente.

On calculera alors $\varphi(x, y)$ et l'on tâchera de vérifier *a posteriori* que sa puissance $m^{\text{ième}}$ reproduit F. C'est ce que nous verrons dans les exemples suivants.

Dans tous les cas où la formule (Π) sera valable, si F est d'ordre entier et positif n on pourra calculer en se servant de cette formule la racine $n^{\text{ième}}$ de F en prenant

$$m = \frac{1}{n}$$

et, par suite, on aura résolu le problème posé dans le paragraphe 6.

10. Montrons dans deux cas particuliers que l'intégrale (Π) est convergente et retrouvons ainsi des résultats connus.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. V, § 7.

Posons d'abord

$$F = 1, \qquad 1 > m > 0, \qquad u = y - x > 0$$

et la formule (II) deviendra

$$(\mathrm{II}') \quad \overset{*}{1}{}^{m} = m \int_0^1 (1-z)^{m-1} \times \left\{ \left[1 + (m-1)\frac{z}{1-z}\overset{*}{1}{}^{2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2}\overset{*}{1}{}^{3} + \ldots \right] - \left[(m-1)\frac{z}{1-z} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2}\overset{*}{1}{}^{2} + \ldots \right] \right\} dz,$$

d'où [*voir* formule (A)]

$$(\mathrm{II}'') \qquad \overset{*}{1}{}^{m} = m \int_0^1 (1-z)^{m-1} \left\{ \mathrm{P}_m(v) - \frac{z}{1-z}\mathrm{P}'_m(v) \right\} dz.$$

Or si $u > 0$ cette intégrale est convergente parce que $\mathrm{P}_m(v)$ est fini et [*voir* formule (10)]

$$\left| \frac{z}{1-z}\mathrm{P}'_m(v) \right| = \left| \frac{1}{u} v \mathrm{P}'_m(v) \right| < \frac{1-m}{u}.$$

Donc, d'après ce que nous avons dit dans le paragraphe 7, tâchons d'employer l'égalité (II″) pour calculer $\overset{*}{1}{}^{m}$.

11. Pour sommer les séries et calculer les intégrales, posons

$$(11) \qquad f(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-1}\mathrm{P}_m(v)\, dz.$$

On aura

$$(12) \qquad f'(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-1} \frac{z}{1-z}\mathrm{P}'_m(v)\, dz.$$

Donc

$$(\mathrm{II}''') \qquad \overset{*}{1}{}^{m} = m[f(u) - f'(u)].$$

L'équation (12) s'écrit

$$f'(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-2}\mathrm{P}'_m(v)\, dz - \int_0^1 (1-z)^{m-1}\mathrm{P}'_m(v)\, dz,$$

par suite

$$u f'(u) = \int_0^1 (1-z)^m \frac{d}{dz} \mathrm{P}_m(v)\, dz - u \int_0^1 (1-z)^{m-1} \mathrm{P}'_m(v)\, dz.$$

En intégrant par parties la première intégrale on trouve

$$u f'(u) = -1 + m \int_0^1 (1-z)^{m-1} \mathrm{P}_m(v)\, dz - u \int_0^1 (1-z) \mathrm{P}'_m(v)\, dz,$$

d'où

$$u[f(u) - f'(u)] = 1 - m f(u) + u \int_0^1 (1-z)^{m-1} [\mathrm{P}'_m(v) + \mathrm{P}_m(v)]\, dz,$$

et en dérivant par rapport à u

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{du} \left\{ u[f(u) - f'(u)] \right\} \\
&\quad = -m f'(u) + \int_0^1 (1-z)^{m-1} \frac{d}{du} \left\{ u \mathrm{P}'_m(v) + \mathrm{P}_m(v)] \right\} dz \\
&\quad = -m f'(u) + \int_0^1 (1-z)^{m-1} \frac{d}{dv} \left\{ v [\mathrm{P}'_m(v) + \mathrm{P}_m(v)] \right\} dz.
\end{aligned}$$

Tenons compte maintenant de l'équation (B).

On aura

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \left\{ u[f(u) - f'(u)] \right\} &= -m f'(u) + \int_0^1 (1-z)^{m-1} m \mathrm{P}_m(v)\, dz \\
&= m[f(u) - f'(u)].
\end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{\dfrac{d}{du} \left\{ u[f(u) - f'(u)] \right\}}{u[f(u) - f'(u)]} = \frac{m}{u}. \tag{13}$$

En l'intégrant on trouve, en vertu de l'équation (II″),

$$1^m = m[f(u) - f'(u)] = m \mathrm{C} u^{m-1}, \tag{14}$$

C étant une quantité constante.

12. Pour calculer la constante C, remarquons que l'on tire de l'équation précédente

$$f(u) = \mathrm{C}_1 e^u - \mathrm{C} e^u \int_0^u e^{-\xi} \xi^{m-1}\, d\xi.$$

Si nous faisons dans la formule (11) $u = 0$ nous obtenons

$$f(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-1}\,dz = \frac{1}{m};$$

donc

$$C_1 = \frac{1}{m}$$

et

$$f(u) = e^u \left\{ \frac{1}{m} - C\int_0^u e^{-\xi}\xi^{m-1}\,d\xi \right\}. \tag{15}$$

Or [formule (11)],

$$f(u) = \int_0^\alpha (1-z)^{m-1} P_m(v)\,dz + \int_\alpha^1 (1-z)^{m-1} P_m(v)\,dz,$$

α étant un nombre compris entre 0 et 1.

Par suite, en vertu de l'équation (7),

$$f(u) < \frac{1}{m}[1-(1-\alpha)^m] + \int_\alpha^1 (1-z)^{m-1} P_m(v)\,dz.$$

En prenant α suffisamment petit on pourra rendre le premier terme aussi petit que l'on veut. α étant fixé, en augmentant u on pourra rendre aussi petit que l'on veut le second terme à cause de (9). Nous aurons donc

$$\lim_{u=\infty} f(u) = 0$$

et en vertu de (15)

$$\frac{1}{m} - C\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{m-1}\,d\xi = 0.$$

On tire de là

$$mC = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{m-1}\,d\xi} = \frac{1}{\Gamma(m)}.$$

L'équation (14) devient finalement

$$\overset{*}{1}{}^m = \frac{u^{m-1}}{\Gamma(m)} \quad ([1]). \tag{III}$$

13. Passons au second exemple. C'est pourquoi revenons à la

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. I, § 9.

formule (II) et posons-y

$$F = (y - x), \qquad m = \frac{1}{2}, \qquad y - x = u.$$

La formule (II) s'écrira

$$(16)\quad (y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\times \left\{ \left[u - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)\frac{u^3}{3!} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^5}{5!} + \ldots \right.\right.$$
$$\left. + (-1)^h \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2h-1)}{2}}{h!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h+1}}{(2h+1)!} + \ldots \right]$$
$$- \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)u + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^3}{3!} + \ldots \right.$$
$$\left.\left. + (-1)^h \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2h-1)}{2}}{h!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h-1}}{(2h-1)!} + \ldots \right] \right\} dz.$$

Nous verrons que les intégrales sont convergentes.

Soit

$$\mathfrak{M}(u, z) = u - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)\frac{u^3}{3!} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^5}{5!} + \ldots$$
$$+ (-1)^h \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2h-1}{2}}{h!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h-1}}{(2h-1)!} + \ldots,$$

l'équation précédente deviendra

$$(16')\quad (y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}\left[\mathfrak{M}(u, z) - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}(u, z)}{\partial u^2}\right] dz.$$

Or,

$$\frac{\partial \mathfrak{M}(u, z)}{\partial u} = 1 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{z}{1-z}\right)u^2 + \frac{1}{2^4}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^4}{(2!)^2} + \ldots$$
$$+ (-1)^h \frac{1}{2^{2h}}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h}}{(h!)^2} + \ldots$$

et en posant

$$(17)\qquad u\sqrt{\frac{z}{1-z}} = v,$$

on aura

$$(\mathrm{D})\quad \frac{\partial \mathfrak{M}(u, z)}{\partial u} = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{v}{2}\right)^4 - \ldots + \frac{(-1)^h}{(h!)^2}\left(\frac{v}{2}\right)^{2h} + \ldots = \mathrm{J}_0(v)$$

qui est la fonction de Bessel d'ordre o [1].

De l'équation (7) on tire

$$(17')\qquad \frac{\partial v}{\partial u} = \sqrt{\frac{z}{1-z}}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\frac{1-z}{z}}\int_0^v \mathrm{J}_0(v)\,dv\right] = \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,\mathrm{J}_0(v)\frac{\partial v}{\partial u} = \mathrm{J}_0(v),$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{M}(u, z) = \sqrt{\frac{1-z}{z}}\int_0^v \mathrm{J}_0(v)\,dv$$

et la formule (16') deviendra

$$(16'')\qquad (y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^v \mathrm{J}_0(v)\,dv - \frac{1}{\sqrt{1-z}}\frac{\partial \mathrm{J}_0(v)}{\partial u}\right] dz.$$

Mais à cause de (17')

$$\frac{\partial \mathrm{J}_0(v)}{\partial u} = \mathrm{J}'_0(v)\sqrt{\frac{z}{1-z}} = \frac{v}{u}\mathrm{J}'_0(v).$$

L'équation (16″) s'écrit donc

$$(y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^v \mathrm{J}_0(v)\,dv - \frac{1}{\sqrt{1-z}}\,\frac{v}{u}\,\mathrm{J}'_0(v)\right] dz.$$

En appliquant aux deux termes du second membre des intégrations par parties il viendra

$$\begin{aligned}(y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = {} & \left[\sqrt{z}\int_0^v \mathrm{J}_0(v)\,dv\right]_{z=0}^{z=1} + \left[\sqrt{1-z}\,\frac{v}{u}\,\mathrm{J}'_0(v)\right]_{z=0}^{x=1} \\ & - \int_0^1 \left[\sqrt{z}\frac{d}{dz}\int_0^v \mathrm{J}_0(v)\,dv + \frac{\sqrt{1-z}}{u}\,\frac{d}{dz}[v\,\mathrm{J}'_0(v)]\right] dz.\end{aligned}$$

---

[1] TODHUNTER, *An elem. Treat. on Laplace's functions, Lamé functions, Bessel's functions*, p. 284.

Or,

$$\left[\sqrt{z}\int_0^{v} \mathrm{J}_0(v)\,dv\right]_{z=0}^{z=1} = \int_0^{\infty} \mathrm{J}_0(v)\,dv = 1 \quad (^1),$$

$$\left[\sqrt{1-z}\,\frac{v}{u}\,\mathrm{J}'_0(v)\right]_{z=0}^{z=1} = \left[\sqrt{z}\,\mathrm{J}'_0(v)\right]_{z=0}^{z=1} = 0 \quad (^2),$$

c'est pourquoi, étant $\frac{\sqrt{1-z}}{u} = \frac{\sqrt{z}}{v}$,

$$(y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \int_0^1 \sqrt{z}\left[\frac{d}{dz}\int_0^{v} \mathrm{J}_0(v)\,dv + \frac{1}{v}\,\frac{d}{dz}[v\,\mathrm{J}'_0(v)]\right] dz.$$

Mais

$$\frac{d}{dz}\cdot dz = \frac{d}{dv}\cdot dv,$$

donc puisque pour $z = 1$ on a $v = \infty$,

$$(y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \int_0^{\infty} \sqrt{z}\left[\frac{d}{dv}\int_0^{v} \mathrm{J}_0(v)\,dv + \frac{1}{v}\,\frac{d}{dv}[v\,\mathrm{J}'_0(v)]\right] dv$$
$$= 1 - \int_0^{\infty} \sqrt{z}\left[\mathrm{J}_0(v) + \frac{1}{v}\,\frac{d}{dv}[v\,\mathrm{J}'_0(v)]\right] dv.$$

En rappelant que la fonction de Bessel J_0 vérifie l'équation différentielle (³)

(E) $$\mathrm{J}_0(v) + \frac{1}{v}\,\frac{d}{dv}[v\,\mathrm{J}'_0(v)] = 0$$

on aura finalement

$$(y \overset{*}{-} x)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (^4),$$

ce qui prouve en même temps la convergence des intégrales de la formule (16).

14. Il est intéressant, dans le cas précédemment considéré, de voir le résultat auquel on est conduit directement par la formule (3).

Si dans cette formule nous prenons $m = \frac{3}{2}$, $\mathrm{F} = (y - x)$, elle

---

(¹) Todhunter, *An elem. Treat. on Laplace's functions, Lamé's functions, Bessel's functions*, p. 361.

(²) *Ibid.*, Chap. XXXIII.

(³) *Ibid.*, p. 284.

(⁴) Volterra et Pérès, *Ouvrage cité*, p. 10.

$$\left\{ \overset{*}{1}{}^{0} + z\left[\left(y \overset{*}{-} x\right) - \overset{*}{1}{}^{0}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1-z)^{\frac{1}{2}}\overset{*}{1}{}^{0} + \sqrt{z}\left[\sum_{1}^{\infty}{}_{h} (-1)^{h-1}\frac{1}{2^{2(h-1)}[(h-1)!]^{2}}\frac{v^{2}}{(2h}\right.$$

où l'on a posé $v = \sqrt{\frac{z}{1-z}}$ [*voir* formule (17)].

Or [*voir* (D)]

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{v} d\eta \int_{0}^{\eta} J_{0}(\xi)\,d\xi = \sum_{1}^{\infty}{}_{h}(-1)^{h-1}\frac{1}{2^{2(h-1)}[(h-1!]^{2}}\frac{}{(2h}$$

donc la formule précédente s'écrira

$$\left\{ \overset{*}{1}{}^{0} + z\left[\left(y \overset{*}{-} x\right) - \overset{*}{1}{}^{0}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}}\overset{*}{1}{}^{0} + \frac{\sqrt{z}}{v}\int_{0}^{v} d\eta \int_{0}^{\eta}$$

à la limite pour $x = 1$, $v = \infty$, on trouvera

$$\left(y \overset{*}{-} x\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{v=\infty}\frac{1}{v}\int_{0}^{v} d\eta \int_{0}^{\eta} J_{0}(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{\infty} J_{0}(\xi)\,d\xi =$$

15. On peut étendre ce résultat à l'opération général
tion de la racine carrée de composition d'une fonction
ordre.

Soit F de second ordre, alors

$$F = (y-x)f_{0}(x,y) = uf_{0}(x,y),$$

où $f_{0}(x, y)$ est une fonction de premier ordre, et

$$\overset{*}{F}{}^{h} = \frac{u^{2h-1}}{(2h-1)!}f_{h-1}(x,y),$$

où f_{h-1} est une fonction de premier ordre qu'on calcul
lement (1).

---

(1) VOLTERRA et PÉRÈS, *Ouvrage cité*, Chap. I, § 11.

Si dans la formule (3) nous prenons $m = \frac{3}{2}$ elle s'écrira

$$\left[\overset{*}{1}{}^{0} + z\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{1}{}^{0}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}}\overset{*}{1}{}^{0} + z^{\frac{1}{2}}\sum_{1}^{\infty}{}_{h}(-1)^{h-1}\frac{1}{2^{2(h-1)}[(h-1)!]^2}\,\frac{v^{2k-1}}{(2h-1)2h}f_{h-1}.$$

où $v = \sqrt{\frac{z}{1-z}}\,u$ [*voir* (17)].

Posons

(D′) $$J(v \mid x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_{h}(-1)^{h}\frac{v^{2h}}{2^{2h}(h!)^2}f_h(x, y)$$

et regardons v, x, y comme des variables indépendantes. On voit immédiatement que

$$\frac{1}{v}\int_0^v d\xi\int_0^{\eta} d\xi\, J(\xi \mid x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_{h}(-1)^{h-1}\frac{1}{2^{2(h-1)}[(h-1)!]^2}\,\frac{v^{2h-1}}{(2h-1)2h}f_{h-1};$$

donc

$$\left[\overset{*}{1}{}^{0} + z\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{1}{}^{0}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = (1-z)^{\frac{1}{2}}\overset{*}{1}{}^{0} + \frac{\sqrt{z}}{v}\int_0^v d\eta\int_0^{\eta} J(\xi \mid x, y)\, d\xi.$$

A la limite

$$\overset{*}{F}{}^{\frac{1}{2}} = \lim_{v=\infty}\frac{1}{v}\int_0^v dy\int_0^y J(\xi \mid x, y)\, d\xi.$$

Si l'intégrale

$$\int_0^{\infty} J(\xi \mid x, y)\, d\xi$$

est convergente, il viendra

$$\lim_{v=\infty}\frac{1}{v}\int_0^v d\eta\int_0^{\eta} J(\xi \mid x, y) = \int_0^{\infty} J(\xi \mid x, y)\, d\xi,$$

on pourra donc énoncer le résultat suivant :

Si

$$\overset{*}{F}{}^{h} = \frac{(y-x)^{2h-1}}{(2h-1)!}f_{h-1}(x, y),$$

F *étant d'ordre supérieur au premier, on aura*

(IV) $$\overset{*}{F}{}^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} J(\xi \mid x, y)\, d\xi$$

où

$$(\text{V}) \qquad J(\xi \mid x, y) = \sum_0^\infty (-1)^h \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2h}}{(h!)^2} f_h(x, y)$$

lorsque d'une manière quelconque on pourra s'assurer (§ 7) *que* $\overset{*}{F}{}^{\frac{1}{2}}$ *existe et que*

$$\lim_{z=1} \left\{ \left[\overset{*}{1}{}^0 + z\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{1}{}^0\right)\right]^{\frac{1}{2}} - (1-z)^{\frac{1}{2}} \overset{*}{1}{}^0 \right\} = \overset{*}{F}{}^{\frac{1}{2}}.$$

Il est évident que la formule (IV) est valable dans le cas où $f_0(x, y)$ serait de second ordre ou d'ordre supérieur. Alors les fonctions $f_h(x, y)$ seraient aussi d'ordre supérieur.

16. On peut obtenir le même résultat en employant la formule (II).

Remarquons en effet qu'en posant

$$(\text{D}'_1) \qquad \bar{J}(\xi \mid x, y) = \sum_0^\infty (-1)^h \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2h}}{(h!)^2} f_{h-1}(x, y),$$

où $f_{-1}(x, y)$ est une fonction arbitraire, on a

$$(\text{E}') \qquad \frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\bar{J}}{d\xi}\right) + \xi J = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\bar{J}}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \xi J(\xi)\, d\xi = -\int_0^\xi J(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\xi}\int_0^\xi d\eta \int_0^\eta J(\xi)\, d\xi,$$

c'est pourquoi si l'intégrale (IV) est convergente

$$(18) \qquad \lim_{\xi=\infty} \frac{d\bar{J}}{d\xi} = -\int_0^\infty J(\xi)\, d\xi + \int_0^\infty J(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Soit

$$\mathfrak{M}(u, z \mid x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_h (-1)^h \frac{1}{2^{2h}(h!)^2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h+1}}{2h+1} f_h,$$

$$\overline{\mathfrak{M}}(u, z \mid x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_h (-1)^h \frac{1}{2^{2h}(h!)^2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h+1}}{2h+1} f_{h-1},$$

la formule (II) deviendra, en prenant $m = \frac{1}{2}$,

$$\overset{*}{\mathrm{F}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^{\frac{1}{2}} \left[\mathfrak{M} - \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{M}}}{\partial u^2} \right] dz$$

et en observant que

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} = \mathrm{J}(v \mid x, y), \qquad \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial u} = \overline{\mathrm{J}}(v \mid x, y)$$

on arrivera par des calculs analogues à ceux du paragraphe 11 et en tenant compte des égalités (E') et (18) à la formule (IV).

17. Il est très facile de généraliser les résultats précédents à l'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ de composition d'une fonction d'ordre n.

Soit

$$\mathrm{F} = (y-x)^{n-1} f_0(x, y) = u^{n-1} f_0(x, y),$$

où $f_0(x, y)$ est une fonction finie et continue.

On aura

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^h = \frac{u^{nh-1}}{(nh-1)!} f_{h-1},$$

où f_{h-1} est finie et continue.

En employant la formule (3) où l'on remplace m par $\frac{1}{n} + 1$ on aura

$$(19) \qquad \left[\overset{*}{\mathrm{F}} + z\left(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0\right)\right]^{\frac{1}{n}} - (1-z)^{\frac{1}{n}} \mathrm{F}^0 = z^{\frac{1}{n}} \Psi(v \mid x, y),$$

en prenant

$$\Psi(v \mid x, y) = \sum_1^{\infty} (-1)^{h-1} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots[(h-1)n-1]}{n^{h-1}(h-1)!(nh)!} v^{nh-1} f_{h-1}.$$

Si donc on peut s'assurer que $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\frac{1}{n}}$ existe et que le premier membre de l'équation (19) tend vers $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\frac{1}{n}}$ pour $z = 1$ on aura l'expression asymptotique

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\frac{1}{n}} = \Psi_{v=\infty}(v \mid x, y)$$

que l'on peut mettre aussi d'une infinité de manières sous forme d'une intégrale, par exemple

$$\overset{*}{F}^{\frac{1}{n}} = \int_0^\infty \chi(v \mid x, y)\, dv,$$

où

$$\chi(v \mid x, y) = \sum_1^\infty (-1)^{h-1} \frac{(n-1)(2n-1)\ldots[(h-1)n-1)]}{n^h h!(nh-2)} v^{nh-2} f_{h-1}.$$

18. Dans les formules précédentes on trouve souvent des intégrales de séries. Dans ces cas on a évidemment à faire avec des limites doubles. Or la nature de la question est telle que les deux limites ne sont pas invertibles, mais il faudra d'abord sommer les séries qui figurent sous les intégrales et après en intégrer les sommes.

Il est nécessaire de faire cette remarque pour ne pas tomber dans des erreurs grossières. En effet les séries sont des séries de puissances et les limites des intégrales sont o et ∞; donc l'intégrale appliquée à chaque terme amène à une intégrale qui n'est pas convergente tandis que l'intégration appliquée à la somme est convergente.

19. Si n est un nombre entier, on vérifie facilement que toute fonction permutable avec $\overset{*}{F}^{\frac{1}{n}}$ est permutable avec F, parce qu'une fonction permutable avec une fonction donnée est permutable avec toutes ses puissances de composition entières et positives.

La proposition réciproque est-elle vraie?

C'est-à-dire les fonctions permutables avec F le sont-elles aussi avec $\overset{*}{F}^{\frac{1}{n}}$?

Nous n'avons pas de démonstrations à ce sujet.

Mais fixons notre attention sur les formules (b) et (c). La fonction (b) est évidemment permutable avec toutes les fonctions permutables avec F. Si cette propriété se conserve à la limite [*voir* (c)], $\overset{*}{F}^{\frac{1}{n}}$ sera aussi permutable avec toutes les fonctions permutables avec F.