BULLETIN DE LA S. M. F.

G. J. RÉMOUNDOS

Sur les couples de fonctions d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 536-548
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__536_1>

SUR LES COUPLES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE CORRESPONDANT AUX POINTS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE;

Par M. Georges-J. Rémoundos.

1. Dans un travail paru en 1912 dans les *Rend. del Circolo Matem. di Palermo* (tomo XXXIII, 1° sem. 1912), M. É. Picard a établi le théorème suivant, qui présente une certaine analogie avec la généralisation du célèbre théorème de M. Picard, aujourd'hui classique, obtenue en 1904 par M. Landau, à savoir :

I. « *Considérant une courbe*

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre supérieur à l'unité, on met à la place de x dans l'équation (1) *une fonction méromorphe de z dans un certain domaine autour de l'origine, dont le développement taylorien est*

$$x = \alpha + \alpha_1 z + \ldots. \tag{2}$$

» *On tire de* (1) *la fonction y de z prenant pour $z = 0$ la valeur β. Les deux fonctions x et y de z ne pourront être simultanément méromorphes dans un cercle de centre origine et de rayon supérieur à une quantité* R(α, α_1) *ne dépendant que des α et α_1* [*et nullement des autres coefficients du développement* (2)]. »

Pour établir ce théorème M. Picard a utilisé une fonction $\lambda(x,y)$ du point analytique (x,y), qui résulte de la théorie des fonctions fuchsiennes et qui est holomorphe dans le voisinage de tout point de la surface de Riemann correspondant à (1) et pour laquelle le coefficient de i est toujours positif.

2. Nous nous proposons ici d'utiliser la même fonction $\lambda(x,y)$ pour généraliser le théorème de M. Picard ci-dessus énoncé en cherchant ce que nous pouvons obtenir dans cette voie pour les fonctions algébroïdes $x = \mathrm{a}(z)$, $y = \mathrm{b}(z)$ qui satisfont à l'équation (1).

Il est clair que, si dans l'équation (1) nous remplaçons x par une fonction $\mathrm{a}(z)$ algébroïde, on en tirera une fonction $y = \mathrm{b}(z)$ aussi algébroïde et à chaque point z correspondent un certain nombre de points analytiques (a_1, b_1), $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, ...

Supposons que le point $z = 0$ soit critique (singulier) pour un système circulaire de n branches de la fonction $\mathrm{a}(z)$, prenant en $z = 0$ la valeur α, et pour un système circulaire de n_1 branches de la fonction $\mathrm{b}(z)$, prenant en $z = 0$ la valeur β et soient

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha_1 z^{\frac{1}{n}} + \alpha_2 z^{\frac{2}{n}} + \ldots, \\ y &= \beta + \beta_1 z^{\frac{1}{n_1}} + \beta_2 z^{\frac{2}{n_1}} + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

les séries qui représentent, dans le voisinage de $z = 0$, les branches des deux systèmes circulaires. En posant $z^{\frac{1}{nn_1}} = \zeta$, où le premier membre désigne une des racines $\sqrt[nn_1]{z}$, nous obtenons les séries

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \alpha + \alpha_1\zeta^{n_1} + \alpha_2\zeta^{2n_1} + \ldots = \varphi_1(\zeta), \\ y = \beta + \beta_1\zeta^{n} + \beta_2\zeta^{2n} + \ldots = \varphi_2(\zeta), \end{cases}$$

qui représentent deux fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\varphi_1(\zeta)$, correspondant à une branche de chaque système circulaire (3), holomorphes dans le voisinage du point $\zeta = 0$ et satisfaisant à l'équation donnée (1).

Or, d'après le théorème ci-dessus énoncé de M. Picard, il existe une quantité $R(\alpha, \alpha_1)$ telle que dans un cercle de centre origine et de rayon supérieur à $R(\alpha, \alpha_1)$ les deux fonctions $\varphi(\zeta)$ et $\varphi_1(\zeta)$ ne peuvent pas être simultanément méromorphes.

La quantité $R(\alpha, \alpha_1)$ de M. Picard est la suivante : Si nous développons la fonction $\lambda(x, y)$ suivant les puissances de $x - \alpha$ dans le voisinage du point analytique (α, β), nous obtenons la série

$$(5) \qquad \lambda(x, y) = \mu(\alpha) + (x - \alpha)\,\mu'(\alpha) + \ldots,$$

et, alors, nous avons :

$$(6) \qquad R(\alpha, \alpha_1) = \left| \frac{\mu(\alpha) - \mu_0(\alpha)}{\alpha_1\,\mu'(\alpha)} \right|,$$

$\mu_0(\alpha)$ étant le conjugué de $\mu(\alpha)$, dans le cas particulier où $n_1 = 1$ [1].

Nous en concluons que, dans un cercle de rayon supérieur à $R(\alpha, \alpha_1)$, il existe un nouveau (en dehors de $z = 0$) point singulier de l'une au moins des fonctions algébroïdes $a(z)$ et $b(z)$.

Ce résultat est valable pour tous les systèmes circulaires de branches qui se permutent autour de $z = 0$.

3. Or, dans un travail publié en 1913 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* [t. XLI, p. 340-346, généralisation d'un théorème de M. Laudau] j'ai démontré que, si la fonction algébroïde $x = a(z)$ est définie par l'équation

$$(7) \qquad x^\nu + A_1(z)x^{\nu-1} + A_2(z)x^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)x + A_\nu(z) = 0,$$

---

[1] Dans le cas général la formule qui donne $R(\alpha, \beta)$ est plus compliquée mais facile à trouver (*voir* la Note citée de M. Picard); la valeur de R ne dépend encore que des α et α_1.

où

$$(8)\quad \begin{cases} A_1(z) = a_1 + b_1 z + \ldots, \qquad A_2(z) = a_2 + b_2 z + \ldots, \qquad \ldots, \\ A_\nu(z) = a_\nu + b_\nu z \ldots + \ldots \end{cases}$$

et si les polynomes

$$(9)\quad \begin{cases} p(z) = z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + a_2 z^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1} z + a_\nu, \\ q(z) = \qquad b_1 z^{\nu-1} + b_2 z^{\nu-2} + \ldots + b_{\nu-1} z + b_\nu \end{cases}$$

n'ont pas de racine commune, les coefficients : α et α_1 des séries (3) ne dépendent que des coefficients : $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ et des degrés de multiplicité des racines du polynome $p(x)$.

Nous avons donc obtenu le théorème suivant :

II Théorème. — Soit

$$(10)\qquad f(x, y) = 0$$

une courbe de genre supérieur à l'unité. Si l'on met à laplace de x dans l'équation (10) *une fonction $x = \mathfrak{a}(z)$ algébroïde dans le voisinage de $z = 0$, définie par l'équation* (7) *et les formules* (8), *où les polynomes*

$$p(z) = z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu-1} z + a_\nu$$

et

$$q(z) = b_1 z^{\nu-1} + b_2 z^{\nu-2} + \ldots + b_{\nu-1} z + b_\nu$$

n'ont pas de racine commune, on tire de l'équation (10) *une fonction $y = \mathfrak{b}(z)$ aussi algébroïde dans le voisinage de $z = 0$.*

Alors, une au moins de ces deux fonctions $\mathfrak{a}(z)$ et $\mathfrak{b}(z)$ aura un (au moins) nouveau (différent de $z = 0$) point singulier (critique) dans tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à une quantité

$$R(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu, n_1, n_2, \ldots)$$

ne dépendant que des coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu$, et des degrés $n_1, n_2, \ldots$ de multiplicité des racines du polynome $p(z)$ [1].

[1] La démonstration est faite en détail pour les cas où $n = 1$ ou bien n_1 est multiple de n, mais il est facile de l'étendre dans le cas général.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS VALABLES POUR TOUTES LES COURBES ALGÉBRIQUES.

4. Supprimons maintenant toute restriction sur le genre de la courbe (1) et supposons que la fonction algébrique $y = \varphi(x)$, définie par l'équation (1), possède deux au moins points critiques $x = c_1$ et $x = c_2$ distincts à distance finie. Si, dans l'équation (1), nous remplaçons x par une fonction $\mathrm{M}(z)$ holomorphe dans le voisinage de $z = 0$, on en tire une fonction $y = \mathrm{b}(z)$ algébroïde dans le voisinage de $z = 0$.

D'après le théorème de M. Landau, si $\mathrm{M}(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots$ est le développement taylorien de $\mathrm{M}(z)$, il existe une quantité $\mathrm{R}(\alpha_0, \alpha_1, c_1, c_2)$ ne dépendant que des coefficients α_0, α_1 et des points c_1 et c_2, telle que, dans tout cercle C de centre origine et de rayon supérieur à R, la fonction $\mathrm{M}(z)$, ou bien n'est pas régulière, ou bien prend une au moins des valeurs c_1 et c_2. Supposons qu'elle [1] prenne en $z = \alpha$ la valeur c_1 et soit

$$x = c_1 + (z - \alpha)^m \xi(z) \qquad \xi(\alpha) \neq 0 \tag{11}$$

si $m \neq 0$, le point α est un zéro de degré m de multiplicité pour la fonction $\mathrm{M}(z) - c_1$. D'autre part, comme le point $x = c_1$ est, par hypothèse, critique pour la fonction $y = \varphi(x)$, nous aurons, pour un au moins système circulaire de branches permutables autour de $x = c_1$, un développement

$$y = \beta_1 + (x - c_1)^{\frac{\rho}{q}} \eta(x) \qquad (q \leqq \mu) \tag{12}$$

où, la fonction $\frac{\rho}{q}$ étant irréductible, l'entier μ désigne le degré en y de l'équation (1), et la fonction $\eta(x)$ est holomorphe en $x = c_1$ pour chaque branche du système circulaire considéré.

La comparaison des deux formules (11) et (12) nous donne la suivante :

$$y - \beta_1 = \eta(x)(z - \alpha)^{\frac{\rho m}{q}} [\xi(z)]^{\frac{\rho}{q}}$$

ou bien

$$y - \beta_1 = (z - \alpha)^{\frac{\rho m}{q}} \sigma(z), \tag{13}$$

---

[1] Étant régulière dans le cercle C.

où $\sigma(z)$ désigne une fonction holomorphe et différente de zéro dans le voisinage du point $z=\alpha$. Si donc l'entier m n'est pas multiple du dénominateur q, alors la formule (13) montre que le point a sera singulier critique pour la fonction $y=\mathrm{b}(z)$.

Nous en concluons le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Considérant une courbe algébrique*

$$f(x, y)=0 \tag{14}$$

de genre quelconque dont l'équation définisse une fonction $y=\varphi(x)$ *possédant deux au moins points critiques distincts* $(c_1, \beta_1), (c_2, \beta_2)$, *on met à la place de* x *une fonction* $\mathrm{M}(z)$ *holomorphe dans le voisinage de* $z=0$

$$\mathrm{M}(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots \tag{15}$$

On tire de (14) *la fonction* $y=\mathrm{b}(z)$ *prenant pour* $z=0$ *la valeur* β. *Alors, il existe une quantité* $\mathrm{R}(\alpha_0 \alpha_1, c_1, c_2)$ *ne dépendant que des coefficients* α_0 *et* α_1 [*et nullement des autres coefficients du développement* (15)] *et des points* c_1, c_2, *telle que dans tout cercle* C *de centre* $z=0$ *et de rayon supérieur à* R *ou bien l'une au moins des fonctions* $x=\mathrm{M}(z)$ *et* $y=\mathrm{b}(z)$ *admet un au moins point singulier ou bien les degrés de multiplicité de tous les zéros des fonctions* $\mathrm{M}(z)-c_1$ *et* $\mathrm{M}(z)-c_2$, *qui se trouvent dans le cercle* C, *sont des multiples respectivement du nombre des branches des systèmes circulaires correspondant aux points critiques* (c_1, β_1) *ou* (c_2, β_2).

5. Nous allons maintenant généraliser le théorème précédent en remplaçant, dans l'équation (14), x par une fonction algébroïde $x=\mathrm{a}(z)$ à ν branches en $z=0$ définie par l'équation (7) et en supposant que la fonction algébrique $y=\varphi(x)$ admette 2ν au moins points critiques distincts

$$(c_1, \beta_1), \quad (c_2, \beta_2), \quad (c_3, \beta_3), \quad \ldots, \quad (c_{2\nu}, \beta_{2\nu}).$$

J'ai établi autrefois [1] une extension parfaite du théorème

[1] *Sur le nodule et les zéros des fonctions analytiques* (*Comptes rendus*, t. 170, p. 1557, séance du 28 juin 1920).

Picard-Landau, ci-dessus utilisé, aux fonctions algébroïdes, qui consiste en ce qu'il existe une quantité

$$R[\nu, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2\nu}, a(o), \lambda]$$

ne dépendant que des nombres ν, c_1, c_2, c_3, ..., $c_{2\nu}$, des valeurs en $z = o$ de la fonction $x = a(z)$ et du nombre λ qui désigne un quelconque coefficient des développements (8) différent de zéro et des a_i, et ayant la propriété suivante :

Dans tout cercle C de centre origine et de rayon supérieur à R la fonction $x = a(z)$, ou bien n'est pas algébroïde et finie, ou bien prend au moins une fois l'une des valeurs c_1, c_2, c_3, ..., $c_{2\nu}$.

Si, donc, la fonction $x = a(z)$ est algébroïde et finie dans le cercle C, elle y prend l'une au moins des valeurs c_1, c_2, c_3, ..., $c_{2\nu}$, par exemple la valeur c_i; alors, nous n'avons qu'à répéter les raisonnements utilisés à la démonstration du théorème précédent pour arriver à la conclusion que les zéros de $a(z) - c_i$ seront, en général, des points critiques d'ordre au moins $q - 1$ de certaines branches de la fonction $y = b(z)$; ils ne le seront que dans le cas où la fraction $\frac{\rho m}{q}$ est réductible, c'est-à-dire dans le cas où le numérateur de m (qui peut être aussi fractionnaire) [1] est divisible par q. Si nous écartons ce cas, la fonction $y = b(z)$ aura des branches dont le nombre dépasse ν. En effet, en chaque point z_0 du cercle C la fonction $x = a(z)$ prend ν valeurs que nous obtenons lorsque le point z décrit divers chemins dans C en revenant au point z_0 sans entourer le point α; d'autre part, si

$$\frac{\rho m}{q} = \frac{l}{\delta} \qquad \left(\text{où la fraction } \frac{l}{\delta} \text{ est irréductible}\right)$$

chacune des ν branches de $x = a(z)$ ci-dessus indiquées donne naissance à d'autres que nous obtenons en décrivant des lacets autour du point α; il en résulte que la fonction $y = b(z)$ aura au moins $\nu\delta$ branches permutables par des chemins décrits dans le cercle C. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème IV. — *Considérant une courbe algébrique de*

---

[1] Dans le cas où le nombre m est fractionnaire, son numérateur (la fraction étant irréductible) sera appelé degré de multiplicité du zéro $z = \alpha$ de $a(z) - c_i$ pour les branches considérées.

genre quelconque dont l'équation définit une fonction $y = \varphi(x)$ *possédant* 2ν *au moins points critiques distincts :*

$$(16) \qquad (c_1, \beta_1), \quad (c_2, \beta_2), \quad (c_3, \beta_3), \quad \ldots, \quad (c_{2\nu}, \beta_{2\nu})$$

on met à la place de x *une fonction* $x = \mathrm{a}(z)$ *algébroïde à* ν *branches et finie dans le voisinage du point* $z = 0$. *On tire de* (14) *une nouvelle fonction algébroïde* $y = \mathrm{b}(z)$ *prenant en* $z = 0$ *la valeur* β.

Alors, il existe une quantité

$$\mathrm{R}[\nu, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2\nu}, \mathrm{a}(0), \lambda]$$

ne dépendant que des nombres $\nu, c_1, c_2, \ldots, c_{2\nu}$, *des valeurs* $\mathrm{a}(0)$ [*de la fonction* $\mathrm{a}(z)$ *en* $z = 0$] *et du nombre* λ : *un quelconque des coefficients des développements* (8) *qui sont différents de zéro et des* a_i, *telle que dans tout cercle de centre origine et de rayon supérieur à* R, *dans lequel* $x = \mathrm{a}(z)$ *est algébroïde et finie, ou bien l'algébroïde* $y = \mathrm{b}(z)$ *possède des branches plus nombreuses que celles de* $x = \mathrm{a}(z)$ [*le nombre des branches de* $y = \mathrm{b}(z)$ *dépasse le nombre* ν *des branches de* $x = \mathrm{a}(z)$], *ou bien les degrés de multiplicité des zéros, situés dans le cercle* C, *des fonctions*

$$\mathrm{a}(z) - c_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2\nu)$$

sont tous des multiples du nombre des branches des systèmes circulaires respectifs relatifs aux points critiques c_i, β_i *de la fonction* $y = \varphi(x)$.

Ce théorème offre, d'une part, une extension, dans certains points de vue, à un genre quelconque des théorèmes I et II et, d'autre part, une précision au théorème II en supprimant la restriction qu'il impose aux deux polynomes $p(z)$ et $q(z)$.

FAMILLES ET SUITES DE COUPLES DE FONCTIONS.

6. Considérons une suite

$$(17) \quad x_1 = \mathrm{a}_1(z), \quad x_2 = \mathrm{a}_2(z), \quad x_3 = \mathrm{a}_3(z), \quad \ldots, \quad x_n = \mathrm{a}_n(z), \quad \ldots$$

de fonctions algébroïdes à ν branches dans le voisinage d'un point $z = a$. Nous allons introduire une nouvelle notion sur de telles suites (illimitées), qui nous sera très utile.

A chaque indice n correspond un rayon de convergence ρ_n (le plus grand possible) des développements de tous les systèmes circulaires des branches de la fonction $\mathfrak{a}_n(z)$ autour du point $z = a$. Or, la suite

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

peut avoir le zéro comme valeur limite; il est donc nécessaire d'introduire la notion suivante : *S'il existe un rayon* $\rho \neq 0$ (*indépendant de* n) ([1]) *de convergence des développements des systèmes circulaires, autour de* $z = a$, *des branches de toutes les fonctions* $\mathfrak{a}_n(z)$, *nous dirons que la suite* (17) *de fonctions algébroïdes est canonique dans le voisinage du point* $z = a$.

Cela posé, revenons à l'équation algébrique (1) de genre supérieur à l'unité.

A chaque fonction $x_n = \mathfrak{a}_n(z)$, substituée dans l'équation (1), correspond une autre fonction algébroïde $y_n = \mathfrak{b}_n(z)$ correspondant à un point analytique (α_n, β_n) et nous obtenons ainsi une nouvelle suite :

$$(18) \qquad y_1 = \mathfrak{b}_1(z), \qquad y_2 = \mathfrak{b}_2(z), \qquad \ldots, \qquad y_n = \mathfrak{b}_n(z) \qquad \ldots,$$

de fonctions aussi algébroïdes dans le voisinage du point $z = a$.

Si $\mathfrak{a}_n(z)$ est à ν branches et $\mathfrak{b}_n(z)$ à N branches, nous pouvons dire que le couple des fonctions $\mathfrak{a}_n(z)$ et $\mathfrak{b}_n(z)$ admet ν.N branches.

Dans mon Mémoire *Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Acta mathematica*, t. XXXVII, avril 1914, p. 241-300), ainsi que dans mon Mémoire *Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. XXIII della série III, p. 1 e seguenti) nous avons donné la définition de la convergence d'une suite de fonctions algébroïdes ayant le même nombre de branches ainsi que de la convergence uniforme dans un domaine et nous prions le lecteur de s'y rapporter pour ces notions qui nous seront utiles dans les pages suivantes.

([1]) Et différent de zéro.

Une famille de fonctions algébroïdes et finies dans un domaine D sera dite *normale* dans D lorsque de toute suite de fonctions de la famille nous pouvons extraire une nouvelle suite convergeant uniformément dans D vers des fonctions algébroïdes et finies dans D ou vers la constante infinie. Cette notion est donnée par M. Montel pour les familles de fonctions holomorphes dans un domaine et étendue par moi aux familles de fonctions multiformes.

7. Supposons que les deux suites (17) et (18) soient canoniques dans le voisinage de tout point d'un domaine D et qu'il en soit de même dans tout le domaine; j'entends par là qu'il existe un rayon ρ (indépendant de n et des points du cercle) de convergence uniforme des systèmes circulaires pour toutes les fonctions des suites et pour tous les points du domaine.

Alors, à chaque point z du domaine D correspond un cercle C_z de centre z_0 et de rayon ρ et, d'après un théorème classique de MM. Borel-Lebesgue, il y aura des cercles en nombre fini :

$$(19) \qquad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad \ldots, \quad C_k$$

appartenant à l'ensemble des C_z, tel que chaque point du domaine D appartienne à un cercle (19).

Commençons par le cercle C_1 et appliquons dans C_1 et pour chaque système circulaire de branches autour de son centre la méthode de M. Picard ([1]) et la mienne citée dans le n° 2 de ce Mémoire; alors, pour chaque système circulaire, la fonction

$$(19') \qquad G_n(z) = \frac{\lambda(x_n, y_n) - \lambda(\alpha_n, \beta_n)}{\lambda(x_n, y_n) - \lambda_0(\alpha_n, \beta_n)}$$

sera algébroïde dans C_1 et nous aurons

$$|G_n(z)| < 1$$

et la famille des fonctions

$$(20) \qquad G_1(z), \quad G_2(z), \quad G_3(z), \quad \ldots, \quad G_n(z) \quad \ldots$$

sera normale pour chaque couple de systèmes circulaires. [Cela résulte d'une part du théorème connu de M. Montel, puisque la

([1]) *Voir* le travail ci-dessus cité, p. 4 et 5.

famille en question est bornée en module et d'autre part de mon théorème [1] plus général sur les familles de fonctions algébroïdes bornées en module.] Elle sera donc normale, pour l'ensemble des couples de systèmes circulaires de branches, puisque leur nombre total sera inférieur à un nombre fixe qui est égal à $\nu^2 \mu$, où μ désigne le degré en y de l'équation $f(x, y) = 0$.

En faisant les mêmes raisonnements dans les autres cercles (19) nous voyons qu'à chaque cercle (19) correspond une famille telle que (20) normale dans le cercle respectif. A chaque suite de G_n convergeant vers des limites [2] correspondent une suite de x_n et une suite de y_n convergeant aussi vers des limites respectives puisque, comme il résulte de la théorie des fonctions fuchsiennes, l'inversion de $\lambda(x, y)$ se fait d'une manière uniforme pour x et y. Nous en concluons que la famille des couples (x_n, y_n) est normale dans chacun des cercles (19) et, comme le nombre de ces cercles est fini, la même famille est normale dans tout le domaine D. Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

Théorème V. — *Soit*

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\quad \ldots,\quad (x_n, y_n),\quad \ldots \tag{21}$$

une suite de couples de fonctions de z, algébroïdes dans un domaine D *à un nombre de branches borné et satisfaisant (chaque couple) à une équation*

$$f(x, y) = 0$$

de genre supérieur à un. *Si chacune des suites*

$$\begin{cases} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, & x_n, & \ldots, \\ y_1, & y_2, & y_3, & \ldots, & y_n, & \ldots \end{cases} \tag{22}$$

est canonique, la famille de ces couples est normale à l'intérieur du domaine D. *Nous entendons par là que, de toute suite de couples* (21) *on peut extraire une nouvelle suite de couples convergeant uniformément à l'intérieur de* D.

8. Supposons maintenant que la suite de couples (21) converge

[1] *Voir* mon Mémoire ci-dessus cité des *Acta mathematica*, p. 259-267.

[2] Dont le nombre est égal à celui des branches des termes de la suite (qui est commun).

pour une infinité de points du domaine D possédant au moins un point limite à son intérieur. Cela suppose, bien entendu, que le nombre des branches des x_n reste constant à partir d'un rang et qu'il en soit de même du nombre des branches de y_n.

Alors, comme la famille des x_n et celle des y_n sont normales, les suites x_n et y_n convergent dans tout le domaine D et uniformément à l'intérieur de D. Cela résulte immédiatement de l'extension aux fonctions algébroïdes des notions de convergence et de famille normale. Nous tenons à remarquer que l'application de la méthode même du numéro précédent combinée avec le théorème bien connu de M. Vitali, sur les suites de fonctions holomorphes qui convergent en une infinité de points, nous conduit à la conclusion ci-dessus énoncée.

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si la suite de couples* (21), *considérée dans le théorème précédent, converge en une infinité des points ayant un au moins point limite à l'intérieur du domaine* D, *la même suite converge en tous les points du domaine* D (*c'est-à-dire chacune des suites x_n et y_n converge dans* D) *et uniformément à son intérieur.*

9. Supposons que le domaine D soit un cercle C de centre origine et que la fonction x_n soit définie par l'équation

$$(23)\quad x_n^\nu + A_{n1}(z)x_n^{\nu-1} + A_{n2}(z)x_n^{\nu-2} + \ldots + A_{n,\nu-1}(z)x_n + A_{n\nu}(z) = 0,$$
$$A_{n1}(z) = a_1 + b_1 z + \ldots, \quad A_{n2}(z) = a_2 + b_2 z + \ldots, \quad A_{n\nu}(z) = a_\nu + b_\nu z + \ldots,$$

où l'un au moins des couples (a_1, b_1) (a_2, b_2) $\ldots$, (a_ν, b_ν) est fixe ne dépendant pas de n, tandis que tous les autres peuvent être variables avec n. Soit a_i, b_i ce couple et $b_i \neq 0$.

Si la suite des x_n et la suite des y_n sont canoniques dans tout le cercle C et si ces suites convergent en une infinité de points ayant un au moins point limite z_0 intérieur à C, elles convergeront, d'après le théorème précédent, uniformément à l'intérieur de C vers deux fonctions $\xi(\zeta)$ et $\eta(\zeta)$ aussi algébroïdes et finies à l'intérieur de C. Alors, en appliquant la méthode bien connue de M. Landau, nous arrivons à la conclusion que le rayon R de ce cercle sera inférieur à une quantité $q(a_i, b_i)$. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème VII. — *Soit* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ *une suite de couples de fonctions de* z, *algébroïdes et satisfaisant (chaque couple) à une équation*

$$f(x, y) = 0 \tag{24}$$

de genre supérieur à un, *et supposons que dans l'équation* (23) *qui définit la fonction* $x_n(z)$ *un au moins des couples* (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_\nu, b_\nu)$, *soit fixe (indépendant de* n*) ; soit* a_i, b_i *ce couple et* $b_i \neq 0$.

Alors, il existe une quantité $q(a_i, b_i)$ *ne dépendant que de ces coefficients* a_i *et* b_i *telle que dans tout cercle de centre origine et de rayon* $R > q$, *ou bien les deux suites* x_n *et* y_n *ne sauraient être toutes les deux canoniques, ou bien il n'existe pas à son intérieur de point limite de l'ensemble des points communs de convergence des deux suites* x_n *et* y_n.

Remarque. — Les fonctions algébroïdes, pour lesquelles un au moins des couples a_i, b_i est fixe, constituent une famille F. Alors, les fonctions x_n que nous substituons à la place de x dans l'equation (24) appartiennent à cette famille F.