G. PÓLYA

Sur certaines transformations fonctionnelles linéaires des fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 519-532
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__519_1>

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. G. PÓLYA.

On s'est souvent occupé des transformations fonctionnelles qui échangent entre elles les séries ordonnées suivant les puissances entières d'une variable. Or la série entière est élément d'une fonction analytique, elle n'est pas la fonction elle-même. C'est entendu, la transformation porte d'abord sur l'élément initial, puis elle se transmet par une sorte de «contagion», essentielle aux fonctions analytiques, de l'élément atteint aux éléments contigus. L'exposition des résultats, dus surtout comme on sait à C. Bourlet et à M. S. Pincherle (1), ne changerait pas beaucoup en substance, mais

(1) Voir l'article de M. S. PINCHERLE, *Équations et opérations fonctionnelles* (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 5).

gagnerait en netteté si l'on faisait ressortir dès le commencement un peu davantage la différence entre les transformations des séries entières et celles des fonctions analytiques. On pourrait aussi suivre avec un peu plus d'attention la propagation des transformations au cours du prolongement analytique.

La méthode d'exposition que j'adopte dans les lignes suivantes a peut-être quelques avantages. Pour ne pas être trop long et pour donner quelque chose de nouveau, je ne m'occupe ici que d'une classe particulière de transformations fonctionnelles linéaires qui fut souvent remarquée et appréciée à cause de la simplicité de ses propriétés formelles. J'y trouve quelque chose d'autre à apprécier : elle force l'élément transformé de suivre très fidèlement le prolongement analytique de l'élément primitif. Je tâcherai d'éclaircir les raisons de cette fidélité exceptionnelle en caractérisant la classe de transformations en question par quelques postulats *a priori* mettant en relief ses propriétés essentielles. Pour terminer je donne quelques indications rapides sur les applications les plus simples des transformations discutées. J'espère revenir à une autre occasion aux détails omis ici et à d'autres applications plus cachées.

1. Je veux d'abord préciser ce qu'on doit entendre par une transformation.

Une série entière

$$c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + \ldots = \varphi(z), \tag{1}$$

convergente pour plus d'une valeur de la variable z, sera appelée élément dans ce qui suit (c'est-à-dire élément d'une fonction analytique). Un élément est donné par une suite ordonnée des constantes

$$c, \quad c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots,$$

c est le centre; c_0, c_1, c_2, ... sont les coefficients de l'élément considéré. Ces constantes sont assujetties à la condition unique que

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

est fini. Les éléments seront désignés par de petites lettres grecques.

On considère des transformations (univoques) applicables soit à tous les éléments, soit à un champ plus restreint d'éléments. Si la transformation s'applique à l'élément (1) elle le change en un élément déterminé

$$(2) \qquad c_0^* + c_1^*(z - c^*) + c_2^*(z - c^*)^2 + \ldots = \varphi^*(z),$$

qui en général diffère de (1). Les nombres de la suite transformée $c^*, c_0^*, c_1^*, c_2^*, \ldots$ dépendent de tous les nombres de la suite primitive $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ selon une loi qui n'est assujettie qu'à la condition qu'elle donne une valeur finie à

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n^*|}$$

toutes les fois qu'elle est applicable. Les transformations seront désignées par de grands caractères gras. On exprime par l'équation

$$\varphi^*(z) = \mathbf{T}\varphi(z) \qquad \text{ou} \qquad \varphi^* = \mathbf{T}\varphi$$

que l'élément (2) provient de l'élément (1) par application de la transformation **T** ou, en d'autres mots, que la série (2) est transformée de (1) par **T**.

Nous avons défini des transformations de certaines suites ordonnées, qui en général n'ont rien à faire aux fonctions analytiques. Des éléments liés ensemble par le prolongement analytique sont transformés en général en éléments incohérents. Écrivons en détail quelques transformations particulières assez arbitrairement choisies.

Exemple I. — La transformation (formation de la fonction entière « associée » de M. Borel, le centre restant le même) est applicable à tous les éléments. Elle change $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ en

$$c^* = c;$$

$$c_0^* = c_0, \qquad c_1^* = \frac{c_1}{1!}, \qquad c_2^* = \frac{c_2}{2!}, \qquad \ldots, \qquad c_n^* = \frac{c_n}{n!}, \qquad \ldots.$$

Exemple II. — La transformation [elle change e^z en e^z, toute autre fonction $f(z)$ en $\frac{1}{2}f(z)$] s'applique à tous les éléments. Elle donne en tous cas $c^* = c$. Si l'on a

$$c_0 = e^c, \qquad c_1 = \frac{e^c}{1!}, \qquad \ldots, \qquad c_n = \frac{e^c}{n!}, \qquad \ldots,$$

la transformation donne $c_n^* = c_n$; dans tous les autres cas elle donne $c_n = \frac{1}{2}c_n \, (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Exemple III. — La transformation (elle n'est définie que pour les fonctions de la forme ae^z, a constante) ne s'applique qu'aux éléments dont les coefficients satisfont à la condition

$$n c_n = c_{n-1}$$

et donne pour ceux-là $c^* = c$, $c_0^* = c_0$, $c_1^* = c_1$, ..., $c_n^* = c_n$, ...

Exemple IV. — La transformation (multiplication par z) est applicable à tous les éléments. Elle remplace la suite $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ par

$$c^* = c\,;$$

$$c_0^* = c c_0, \qquad c_1^* = c_1 c + c_0, \qquad \ldots, \qquad c_n^* = c_n c + c_{n-1}, \qquad \ldots.$$

Dans tous ces exemples on a $c^* = c$, c'est-à-dire l'élément primitif et l'élément transformé sont *concentriques*. Je continuerai à me borner à ce cas.

2. J'envisage un exemple plus général et plus utile.

Soit donnée la suite $l_0, l_1, l_2, \ldots$ satisfaisant à la condition que

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|l_n|} = \mathrm{H} \tag{3}$$

est fini. Soit ρ le rayon de convergence de l'élément $\varphi(z)$ dont le centre est c, $\rho > \mathrm{H}$. Dans ces conditions la série

$$l_0 \varphi(z) - \frac{l_1}{1!}\varphi'(z) + \frac{l_2}{2!}\varphi''(z) - \ldots + (-1)^n \frac{l_n}{n!}\varphi^{(n)}(z) + \ldots \tag{4}$$

converge dans l'aire circulaire $|z - c| < \rho - \mathrm{H}$ et converge uniformément dans chaque aire circulaire concentrique de rayon moindre.

Pour prouver ce lemme, introduisons deux constantes positives R et R* telles que

$$0 < \mathrm{R}^* < \mathrm{R} - \mathrm{H} < \rho - \mathrm{H}. \tag{5}$$

Soit M le maximum de $|\varphi(z)|$ dans l'aire circulaire fermée $|z - c| \leqq \mathrm{R}$. Soit z^* un point quelconque de l'aire circulaire fermée concentrique de rayon R*, c'est-à-dire

$$|z^* - c| \leqq \mathrm{R}^*. \tag{6}$$

Dans le cercle de centre z^* et de rayon $(\mathrm{R} - \mathrm{R}^*)$ le maximum de

$|\varphi(z)|$ ne surpasse pas M ; on a par conséquent

$$\frac{|\varphi^{(n)}(z^*)|}{n!} \leq \frac{M}{(R - R^*)^n}.$$

Cette inégalité, rapprochée aux conditions (3) et (5), démontre la convergence de la série (4) pour $z = z^*$. De plus on a sous la la condition (6)

$$(7) \qquad \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l_n \varphi^{(n)}(z^*)}{n!} \right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|l_n|}{(R - R^*)^n}.$$

Envisageons maintenant la transformation remplaçant l'élément $\varphi(z)$ en question par le développement taylorien concentrique $\varphi^*(z)$ de la fonction (4). En conservant les notations (1), (2) on a

$$c^* = c;$$

$$c_n^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu l_\nu \binom{n+\nu}{\nu} c_{n+\nu} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

La transformation ainsi définie a certaines propriétés dignes de remarque. Nous avons démontré qu'elle assure la *coexistence* de l'élément transformé dès que le rayon de convergence de l'élément primitif dépasse une certaine limite H. Elle assure même cette coexistence dans une certaine étendue assignable pourvu que l'élément primitif existe dans une aire suffisamment large. Puis la transformation est *bornée* d'une certaine manière exprimée par l'inégalité (7). Ensuite elle est distributive ou *linéaire*, en transformant une somme en la somme des transformés. Enfin elle est *prolongeable*, en transformant une suite d'éléments cohérents, c'est-à-dire liés ensemble par le prolongement analytique, en une suite cohérente. Ce point est évident, puisque le prolongement analytique de la dérivée est la dérivée du prolongement analytique.

La transformation définie étant prolongeable et assurant la coexistence de l'élément transformé donne certaines chances au prolongement de celui-ci. Si l'élément primitif φ est prolongeable le long d'un chemin de largeur 2 H (l'aire fermée balayée par un cercle de rayon H dont le centre se meut sur un arc de courbe C) l'élément transformé φ^* est prolongeable le long du milieu de ce chemin(¹) (la courbe C) et l'élément variable issu de φ^* dont le centre se déplace le long de C ne cesse pas d'être le transformé de l'élément concentrique issu de φ.

3. Essayons d'isoler les quatre propriétés rencontrées au numéro précédent d'une manière appropriée à un traitement «axiomatique ».

Une transformation $\mathbf{L}$, donnant des transformés concentriques, arbitraire à part cela et définie comme au nº 1, peut jouir d'une ou de quelques-unes ou d'aucune des propriétés suivantes :

I. *Transformations prolongeables.* — Soient φ un élément de centre c, d un point intérieur au cercle de convergence de φ,

$$\chi(z) = \varphi(d) + \frac{z-d}{1!}\varphi'(d) + \frac{(z-d)^2}{2!}\varphi''(d) + \dots$$

le prolongement immédiat de φ de centre d. Si $\mathbf{L}$ s'applique à φ et à χ, et si, en outre, le point d est intérieur au cercle de convergence de $\mathbf{L}\varphi$, $\mathbf{L}\chi$ est le prolongement immédiat de $\mathbf{L}\varphi$ de centre d.

II. *Transformations linéaires.* — Soient a et b deux constantes, φ et ψ deux éléments concentriques auxquels la transformation $\mathbf{L}$ s'applique ; alors on a

$$\mathbf{L}(a\varphi + b\psi) = a\mathbf{L}\varphi + b\mathbf{L}\psi.$$

III. *Coexistence de la série transformée.* — La transformation $\mathbf{L}$ s'applique à chaque élément φ dont le rayon de convergence dépasse un certain nombre donné R et le transforme en un élément $\mathbf{L}\varphi$ dont le rayon de convergence dépasse un certain nombre R^*.

IV. *Transformations bornées.* — Supposons que l'élément $\varphi(z)$ de centre c existe dans une aire circulaire fermée, de rayon R et de centre c, où $\varphi(z)$ a un maximum M et supposons que l'élément transformé $\mathbf{L}\varphi(z)$ existe dans une aire circulaire fermée concentrique, de rayon R^*, où $\mathbf{L}\varphi(z)$ a un maximum M^*. Alors on a

$$M^* \leq KM.$$

Les nombres R, R^*, K sont des constantes attachées à la trans-

(¹) *Voir* H. Cramér, *Arkiv for mat. astr. och. fys.*, t. 13, 1918, p. 22.

formation qui ne dépendent nullement de l'élément particulier auquel elle est appliquée.

On ne pourrait pas modifier les propriétés I ou II sans changer complètement l'aspect de la transformation. Par contre III et IV sont aisément modifiables. Nous garderons l'hypothèse que R, R*, K sont des constantes, caractéristiques à la transformation. Mais si au lieu de cela on faisait dépendre ces grandeurs d'une manière convenable de la position du centre de l'élément qui subit la transformation, on embrasserait des cas voisins simples comme l'exemple IV du n° 1, qui ne possède pas la propriété IV. La dépendance indiquée serait d'ailleurs un principe utile de classification.

Les propriétés I, II, III, IV sont compatibles, les transformations considérées au n° 2 possédant toutes les quatre. Ces propriétés sont ajustées de manière qu'elles soient indépendantes. En effet, l'exemple I du n° 1 ne possède pas la propriété I mais il possède les trois autres et montre ainsi que I n'est pas une conséquence de II, III, IV réunies. Les trois autres exemples du n° 1 rendent le même service pour les trois autres propriétés.

4. Nous allons déterminer toutes les transformations $\mathbf{L}$ jouissant des propriétés I, II, III, IV à la fois.

Les propriétés I, II, IV sont valables *en tant* que l'élément transformé existe, l'existence de celui-ci n'étant garantie que par III. Ignorant si elles s'appliquent aussi à d'autres éléments, nous n'envisagerons nos transformations qu'en tant qu'elles s'appliquent aux éléments dont le rayon de convergence surpasse R.

Commençons par déduire des propriétés I, II, III, IV quelques conséquences générales et immédiates.

Les éléments dont tous les coefficients sont nuls admettent la transformation $\mathbf{L}$ d'après III. On tire ou bien de II ou bien de IV

$$\mathbf{L}0 = 0. \tag{8}$$

Si un élément représente une fonction entière, l'élément transformé, existant d'après III, peut être indéfiniment prolongé le long d'un chemin quelconque, comme on voit en tenant compte alternativement des propriétés I et III. On a la nouvelle propriété suivante :

V. L'élément transformé est une fonction entière si l'élément primitif en est une.

Les propriétés II, III, IV impliquent la suivante :

VI. Soient $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... des éléments concentriques de centre c, réguliers dans le cercle $|z-c| < \rho$ et soit la série infinie

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \ldots + \varphi_n(z) + \ldots = \varphi(z)$$

uniformément convergente dans le même cercle. Soit $\rho > \mathrm{R}$. Alors on a

$$\mathbf{L}\varphi_1(z) + \mathbf{L}\varphi_2(z) + \ldots + \mathbf{L}\varphi_n(z) + \ldots = \mathbf{L}\varphi(z),$$

la série étant uniformément convergente dans le cercle concentrique $|z-c| \leqq \mathrm{R}^\star$.

Le rayon de convergence de l'élément φ n'étant pas inférieur à ρ est supérieur à R. D'après III, $\mathbf{L}\varphi$ existe dans le cercle $|z-c| \leqq \mathrm{R}^\star$. On a d'après II

$$\mathbf{L}\varphi - \mathbf{L}\varphi_1 - \mathbf{L}\varphi_2 - \ldots - \mathbf{L}\varphi_n = \mathbf{L}(\varphi - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_n).$$

Le membre droit est, en vertu de IV et de l'hypothèse de la convergence uniforme, arbitrairement petit dans le cercle $|z-c| \leqq \mathrm{R}^\star$ dès que n est suffisamment grand.

5. Appliquons maintenant la transformation $\mathbf{L}$ possédant les propriétés I, II, III, IV et par conséquent les propriétés V, VI à quelques éléments particuliers.

Considérons z^n comme élément de centre o ; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. L'élément transformé que nous désignerons par

$$\xi_n(z) = \mathbf{L}z^n$$

représente, d'après V, une fonction entière.

On a, d'après VI, en désignant par u une quantité indépendante de z,

$$\mathbf{L}e^{-uz} = \xi_0(z) - \frac{u}{1!}\xi_1(z) + \frac{u^2}{2!}\xi_2(z) - \ldots.$$

Nous nous occuperons de la fonction

$$e^{uz}\mathbf{L}e^{-uz} = \lambda_0(z) + \frac{u}{1!}\lambda_1(z) + \frac{u^2}{2!}\lambda_2(z) + \ldots = \mathrm{L}(u; z). \tag{9}$$

On a les relations

$$z^n\xi_0 - \binom{n}{1}z^{n-1}\xi_1 + \binom{n}{2}z^{n-2}\xi_2 - \ldots + (-1)^n\xi_n = \lambda_n,$$

$$z^n\lambda_0 - \binom{n}{1}z^{n-1}\lambda_1 + \binom{n}{2}z^{n-2}\lambda_2 - \ldots + (-1)^n\lambda_n = \xi_n. \tag{10}$$

L'élément $\lambda_n(z)$, de centre o, représente, tout comme $\xi_0(z)$, $\xi_1(z), \ldots, \xi_n(z)$ une fonction entière.

Les prolongements de e^{-uz} et de $\mathbf{L}e^{-uz}$ dont le centre commun est le même point z_0 sont liés l'un à l'autre par la transformation $\mathbf{L}$, d'après I Dans le cercle

$$|z - z_0| \leqq \mathrm{R}$$

on a évidemment

$$|e^{-uz}| = |e^{-uz_0}|\,|e^{u(z_0-z)}| \leqq |e^{-uz_0}|\,e^{|u|\mathrm{R}}.$$

On obtient donc en appliquant IV aux prolongements en question

(11) $$|(\mathbf{L}e^{-uz})_{z=z_0}| \leqq \mathrm{K}\,|e^{-uz_0}|\,e^{|u|\mathrm{R}}.$$

Le point z_0 est quelconque. En le remplaçant par z on obtient en vertu de (9), (11)

(12) $$|\mathrm{L}(u, z)| \leqq |e^{uz}|\,\mathrm{K}\,|e^{-uz}|\,e^{|u|\mathrm{R}} = \mathrm{K}e^{|u|\mathrm{R}}.$$

La série (9), convergente pour chaque valeur de u, représente pour chaque valeur fixe de z une fonction entière de la variable u. En y appliquant l'inégalité de Cauchy et tenant compte de (12), on a

$$\frac{|\lambda_n(z)|}{n!} \leqq \frac{\mathrm{K}e^{|u|\mathrm{R}}}{|u|^n}$$

et en particulier pour $|u| = n\mathrm{R}^{-1}$

(13) $$|\lambda_n(z)| \leqq \mathrm{K}n!\,e^n n^{-n}\mathrm{R}^n.$$

z étant *quelconque*, l'inégalité (13) montre que la fonction entière $\lambda_n(z)$ n'est qu'une constante. Mettons

(14) $$\lambda_n(z) = l_n.$$

L'équation (10) s'écrit

$$\mathbf{L}z^n = l_0 z^n - \frac{l_1}{1!}nz^{n-1} + \frac{l_2}{2!}n(n-1)z^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{l_n}{n!}n(n-1)\ldots 2.1.$$

Remarquons qu'en vertu de (13), (14)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|l_n|} \leqq \mathrm{R}.$$

Donc en tant qu'il ne s'agit que d'une des fonctions $1, z, z^2, z^3, \ldots, z^n, \ldots$, la transformation $\mathbf{L}$ jouissant des propriétés I, II, III, IV coïncide avec une certaine des transformations définies au n° 2.

Alors elle coïncide tout à fait, en vertu des propriétés II et VI, tout élément de fonction analytique pouvant être approché uniformément par des combinaisons linéaires de $1, z, z^2, \ldots$ à coefficients constants. Les transformations du n° 2 sont les transformations les plus générales possédant les propriétés I, II, III, IV.

6. Ayant suffisamment étudié la définition de nos transformations, disons quelque chose de leur étude détaillée.

La suite infinie $l_0, l_1, l_2, \ldots$ qui détermine la transformation est déterminée en donnant une des deux séries

$$\frac{l_0}{z}+\frac{l_1}{z^2}+\frac{l_2}{z^3}+\ldots+\frac{l_n}{z^{n+1}}+\ldots=l(z), \tag{15}$$

$$l_0+\frac{l_1}{1!}z+\frac{l_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{l_n}{n!}z^n+\ldots=L(z). \tag{16}$$

Nous avons déja rencontré $L(z)$ au n° 5. Ces deux fonctions $l(z)$ et $L(z)$ sont d'égale importance pour la transformation. La condition (3) exprime évidemment que la série (15) converge à l'extérieur et diverge à l'intérieur de la circonférence $|z|=H$. La condition (3) exprime aussi une propriété simple de $L(z)$: en désignant par $M(r)$ le maximum de $|L(z)|$ sur le cercle $|z|=r$ on a

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log M(r)}{r}=H. \tag{17}$$

N'ayant pas à utiliser ce fait dans ce qui suit, j'omets la démonstration qui est facile.

En désignant par $\mathbf{D}$ le symbole de la dérivation on peut écrire la série qui définit la transformation comme suit :

$$\left(l_0-\frac{l_1\mathbf{D}}{1!}+\frac{l_2\mathbf{D}^2}{2!}-\frac{l_3\mathbf{D}^3}{3!}+\ldots\right)\varphi=L(-\mathbf{D})\varphi.$$

Exprimons maintenant la transformation par $l(z)$. Soit z le centre d'une aire circulaire fermée de rayon r dans laquelle l'élément $\varphi(z)$ est régulier et soit $r>H$. On a alors, la ligne d'intégration étant la circonférence $|u|=r$ parcourue en sens positif,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\varphi(z-u)l(u)\,du&=\frac{1}{2\pi i}\int\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(\mu)}(z)(-u)^{\mu}}{\mu!}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{l_\nu}{u^{\nu+1}}\,du\\&=l_0\varphi(z)-\frac{l_1\varphi'(z)}{1!}+\frac{l_2\varphi''(z)}{2!}-\ldots,\end{aligned} \tag{18}$$

vu que pour $|u| = r$ les deux séries sous signe d'intégration convergent absolument et uniformément.

La fonction $l(z)$ est régulière au point $z = \infty$. Considérons le plus petit domaine convexe et fermé contenant les singularités de $l(z)$. Ce domaine sera désigné par $\bar{\mathrm{I}}$ dans ce qui suit et appelé le *diagramme conjugué*. Voici une définition plus exacte du diagramme conjugué : il existe des cercles (aires circulaires fermées) à l'extérieur desquels le prolongement de la série (15) ne rencontre aucun point singulier. L'ensemble des points contenus dans tous ces cercles forme un domaine convexe fermé, le domaine $\bar{\mathrm{I}}$. Un point a appartenant à $\bar{\mathrm{I}}$, par lequel on peut faire passer une droite qui ne contient qu'un seul point appartenant à $\bar{\mathrm{I}}$ (*voir* le point a), sera appelé *point d'appui* de $\bar{\mathrm{I}}$. L'ensemble des points d'appui définis jusqu'ici a peut-être des points limites : ceux-ci aussi seront appelés points d'appui. Les points d'appui d'un polygone sont ses sommets. Ces définitions impliquent que chaque point d'appui de $\bar{\mathrm{I}}$ est un point singulier de $l(z)$. Les points sur la frontière de $\bar{\mathrm{I}}$ qui ne sont pas des points d'appui forment des segments de droite ouverts, en nombre fini ou dénombrable.

Le diagramme conjugué défini à l'aide de $l(z)$ peut être construit aussi en partant de $\mathrm{L}(z)$. En fixant un angle φ et en faisant parcourir à r toutes les valeurs positives, formons

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log |\mathrm{L}(re^{i\varphi})|}{r} = h(\varphi).$$

La fonction $h(\varphi)$ exprime la dépendance de la croissance de $\mathrm{L}(z)$ de la direction. Le diagramme conjugué contient les points $w = u + iv$ satisfaisant à l'inégalité

$$h(\varphi) - u\cos\varphi + v\cos\varphi \leqq 0$$

pour $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Pour démontrer ce que je viens d'énoncer on n'a qu'à reprendre les raisonnements par lesquels M. Borel a déterminé son polygone bien connu de sommabilité exponentielle. Le résultat énoncé diffère en forme et aussi un peu en substance du résultat classique de M. Borel[1]. On obtiendrait une démonstration diffé-

---

(1) *Voir* G Pólya, *Math. Annalen*, t. 89, 1923, p. 179-191; *Sitzungsberichte d. Akademie*, Berlin, 1923, p. 45-50.

rente en partant de (17). Je suis obligé de ne pas m'arrêter aux détails.

En désignant par c un point donné et par w un point parcourant $\bar{I}$, je désignerai l'ensemble des points $c + w$ par $c + \bar{I}$ et l'ensemble des points $c - w$ par $c - \bar{I}$.

7. On peut préciser notablement le dernier énoncé du n° 2 relatif au prolongement d'un élément transformé.

Envisageons les fonctions analytiques $f(z)$ et $f^\star(z)$ issues de l'élément primitif et de l'élément transformé. $f(z)$ est supposée régulière dans une aire circulaire *fermée* de rayon H. Au voisinage du centre de cette aire on a d'après (18)

$$f^\star(z) = \frac{1}{2\pi i}\int f(z-u)\, l(u)\, du. \tag{19}$$

L'intégration est étendue le long d'un cercle dont le rayon surpasse H. On peut remplacer ce cercle par un contour fermé et convexe entourant $\bar{I}$ et se rapprochant de $\bar{I}$ autant qu'on veut. Les valeurs de $f(z)$ qui contribuent à l'intégrale proviennent des points situés sur un contour fermé convexe entourant le domaine $z - \bar{I}$. Si le point z décrit une courbe quelconque, led omaine $z - \bar{I}$ se déplace en restant parallèle à sa position initiale. On tire de la formule (19), en suivant un raisonnement classique de M. Hadamard, le théorème suivant : *Si le domaine en mouvement $z - \bar{I}$ ne se heurte jamais contre un point singulier de $f(z)$, la fonction $f^\star(z)$ est prolongeable le long du chemin décrit par z.*

Ce théorème peut être précisé si $f(z)$ est uniforme. Désignons par s un point quelconque situé sur la frontière du domaine d'existence de $f(z)$ [un point singulier de $f(z)$ si l'on veut]. L'ensemble des domaines $s + \bar{I}$ recouvre un certain ensemble fermé de points. Dans la partie connexe de l'ensemble complémentaire qui contient le centre de l'élément initial, $f^\star(z)$ est régulière et *uniforme ;* c'est aussi une conséquence immédiate de (19).

Supposons enfin que la fonction $f(z)$ est uniforme et n'a que des points singuliers isolés s_1, s_2, s_3, ... situés de telle manière que les domaines $s_1 + \bar{I}$, $s_2 + \bar{I}$, $s_3 + \bar{I}$, ... sont deux à deux sans points communs. Dans ce cas-là la fonction $f^\star(z)$ (régulière et uniforme dans le domaine de connexion multiple situé en dehors de $s_1+\overline{I}$, $s_2+\overline{I}$, ..., comme nous avons vu) *aura chaque point d'appui de* $s_n+\overline{I}$ *pour point singulier*, $n=1, 2, 3, \ldots$. La démonstration est un peu longue dans le cas général mais elle est immédiate si $s_1, s_2, s_3, \ldots$ sont des pôles simples. Mettons en effet

$$f(z)=\frac{A_1}{z-s_1}+\frac{A_2}{z-s_2}+\ldots+\frac{A_n}{z-s_n}+f_n(z);$$

$A_1, A_2, \ldots A_n$ sont des constantes, $f_n(z)$ est régulière aux points $s_1, s_2, \ldots s_n$. On obtient en vertu de II

$$\begin{aligned}L(-\mathbf{D})f(z)&=A_1 l(z-s_1)+A_2 l(z-s_2)+\ldots\\&\quad+A_n l(z-s_n)+L(-\mathbf{D})f_n(z).\end{aligned}$$

D'après ce qui précède $l(z-s_1), \ldots l(z-s_{n-1}), L(-\mathbf{D})f_n(z)$ sont régulières aux points d'appui du domaine $s_n+\overline{I}$, points singuliers de $l(z-s_n)$.

Choisissons comme exemple la fonction

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-2n\pi i}\\&=\frac{1}{2}+e^{-z}+e^{-2z}+e^{-3z}+\ldots=-\frac{1}{2}-e^{z}-e^{2z}-e^{3z}-\ldots;\end{aligned}$$

le premier développement est valable dans chaque point régulier, le second pour $\Re z>0$, le troisiène pour $\Re z<0$. Supposons la fonction $L(z)$ telle que le diagramme conjugué soit compris entre deux droites parallèles à l'axe réel dont la distance est plus petite que 2π. En appliquant la transformation on obtient la fonction

$$\begin{aligned}f^*(z)&=L(-\mathbf{D})\frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-z}}{1-e^{-z}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}l(z-2n\pi i)\\&=\frac{1}{2}L(0)+L(1)\,e^{-z}+L(2)\,e^{-2z}+L(3)\,e^{-3z}+\ldots\\&=-\frac{1}{2}L(0)-L(-1)\,e^{z}-L(-2)\,e^{2z}-L(-3)\,e^{3z}-\ldots\end{aligned}\tag{20}$$

qui étant régulière et uniforme en dehors des domaines $2n\pi i+\overline{I}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, cesse d'être régulière dans leurs points d'appui ; la validité des développements est facile à discuter d'après IV. Les singularités de la fonction (20) furent envisagées par de nombreux auteurs dont je cite particulièrement MM. Le Roy, Lindelöf et Carlson (1).

---

(1) *Voir* F. Carlson, *Sur une classe des séries de Taylor*, Thèse, Upsala, 1914, p. 1-23; *Math. Zeitschrift*, t. 11, 1921, p. 1-23, surtout § 2.