BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JULIA

Sur quelques applications de la représentation conforme à la résolution d'équations fonctionnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 279-315
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__279_0>

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA REPRÉSENTATION CONFORME A LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. GASTON JULIA.

INTRODUCTION.

1. Il s'agira ici d'équations fonctionnelles où la variable ne figure pas explicitement : le problème est de déterminer une fonction analytique $f(z)$ de la variable z, telle qu'entre les valeurs de la fonction aux deux points variables z et $z_1 = S(z)$, de son domaine d'existence, liés par la relation donnée *a priori* $z_1 = S(z)$, on ait une relation donnée *a priori*

$$F\{f(z), f[S(z)]\} = 0.$$

Ce problème comporte évidemment la détermination du domaine d'existence de la fonction inconnue. Soit $d(z)$ ce domaine : il pourra être constitué par une aire, finie ou infinie, du plan z, ou par une surface de Riemann étalée sur le plan. Il est clair que $d(z)$ devra rester invariant par la transformation $z_1 = S(z)$. On ne parlera bien entendu de solution $f(z)$ que si $d(z)$ comprend une partie *d'un seul tenant*, telle que, si z la décrit, z_1 la décrit aussi, et de façon que l'on puisse passer d'un point z arbitraire au point z_1 correspondant par un chemin continu sans sortir de $d(z)$, c'est-à-dire sans rencontrer de point singulier de $f(z)$. Si $d(z)$ comportait deux parties telles que, z décrivant l'une, z_1 décrive l'autre, et de façon qu'il soit impossible de joindre z à z_1 par un chemin continu sans rencontrer de point singulier de $f(z)$, on ne considérerait pas ces parties comme appartenant au domaine d'existence d'une véritable solution de l'équation fonctionnelle considérée. $d(z)$ devra donc se composer d'une ou plusieurs parties individuellement invariantes par la transformation $z_1 = S(z)$. Cette transformation sera le plus souvent du premier degré :

$$z_1 = Sz, \quad z_1 = z + a$$

et le domaine d'existence sera alors une aire du plan z, à un seul feuillet. Elle pourra être une relation rationnelle $z_1 = R_1(z)$ et le domaine d'existence sera alors une surface de Riemann à *une infinité de feuillets*, sur laquelle la relation $z_1 = R_1(z)$ définira une transformation biunivoque et analytique entre les points z et z_1.

Lorsque z parcourt $d(z)$, le point $Z = f(z)$ parcourt, dans le plan Z, un domaine $D(Z)$ qui est en général une surface de Riemann. A la relation $z_1 = S(z)$ qui transforme en lui-même le domaine d'existence de $d(z)$, correspond une transformation biunivoque du domaine $D(Z)$ en lui-même : par cette transformation se correspondent les points

$$Z = f(z) \qquad \text{et} \qquad Z_1 = f(z_1) = f[S(z)];$$

cette transformation, si l'on veut, peut être définie par la relation donnée *a priori*, $F[Z, Z_1] = 0$. $D(Z)$, que nous appellerons *domaine des valeurs de* $f(z)$, sera, comme $d(z)$, d'un seul tenant, ou composé de parties d'un seul tenant, de telle façon que $Z = f(z)$ et $Z_1 = f[S(z)]$ soient simultanément intérieurs à la même partie. La relation $Z = f(z)$ peut alors être considérée comme réalisant une *correspondance point par point entre les points* z *et* Z *de* d *et* D, correspondance analytique en tout point intérieur à d.

Ainsi conçu, le problème de la résolution d'une équation fonctionnelle se décompose en trois problèmes partiels indépendants :

1° La recherche d'un domaine d (le plus grand possible), invariant par la substitution $z_1 = S(z)$.

2° La recherche d'un domaine D (le plus grand possible), invariant par la substitution $[Z \mid Z_1]$ que définit la relation

$$F(Z, Z_1) = 0.$$

3° L'établissement d'une correspondance analytique et biunivoque entre les *points intérieurs* à d et D, telle que la substitution $[z \mid z_1]$ sur d se transforme, par cette correspondance, précisément en la substitution $[Z \mid Z_1]$ sur D. Le problème n'est pas toujours possible comme on le verra plus loin. Mais, dès maintenant, apparaît une condition à laquelle on devra se soumettre dans la résolution des trois problèmes partiels qu'on vient d'énumérer : *les domaines* d *et* D *doivent avoir le même ordre de connexion.*

D'autre part, la relation $Z = f(z)$ étant conçue comme correspondance entre les points de d et D, il pourra y avoir avantage à déterminer *z en fonction de Z*, c'est-à-dire à déterminer la *fonction inverse* $z = \varphi(Z)$ de l'équation fonctionnelle envisagée. $\varphi(Z)$ admet D pour domaine d'existence; d est le domaine des valeurs de $\varphi(Z)$.

Les substitutions $[Z \mid Z_1]$ que nous envisageons ici seront toujours du type $Z_1 = R_2(Z)$, R_2 étant une fonction rationnelle. Il en sera de même pour les substitutions $[z \mid z_1]$. Plus particulièrement nous étudierons dans le Mémoire actuel les substitutions du premier degré entre z et z_1, lesquelles, selon que leurs points doubles sont distincts ou confondus, peuvent être prises sous l'une ou l'autre des deux formes canoniques

$$z_1 = Sz, \quad z_1 = z + a.$$

Nous choisirons alors des domaines $d(z)$ ne couvrant *qu'une fois* le plan z, en tout ou partie de façon que $f(z)$ soit UNIFORME dans $d(z)$. Nous déterminerons d'abord $D(Z)$, sur lequel les points Z et Z_1, $Z_1 = R_2(Z)$ se correspondent d'une manière *biunivoque*. Puis nous ferons la *représentation conforme de* $D(Z)$ *sur une aire simple* $d(z)$ *du plan* z, par la relation $z = \varphi(Z)$; aux points Z et Z_1 de D correspondront des points z et z_1, et il faudra examiner si la relation entre z et z_1 est bien une relation du premier degré. On pourra dire alors que, par la relation $z = \varphi(Z)$, la substitution $[Z \mid Z_1]$ du domaine D en lui-même a été *linéarisée*, c'est-à-dire transformée en une substitution *linéaire* de $d(z)$ en lui-même.

2. On peut présenter de cette façon la théorie des fonctions fuchsiennes ou kleinéennes. Considérant en effet un groupe fuchsien ou kleinéen engendré par les substitutions fondamentales

$$z_1 = S_i(z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

une fonction fuchsienne ou kleinéenne de ce groupe est une fonction, uniforme et analytique dans le domaine où le groupe est proprement discontinu, douée de certaines propriétés au voisinage des points singuliers essentiels du groupe, satisfaisant aux p équations fonctionnelles

$$f[S_i(z)] = f(z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Le domaine $d(z)$ est ici une aire du plan z, invariante par toutes les substitutions $[z \mid S_i(z)]$, dont les points frontières sont les points où le groupe cesse d'être proprement discontinu : cette aire peut être une aire circulaire (groupe fuchsien) ou limitée par une courbe de Jordan (groupe kleinéen) ou limitée par un ensemble parfait discontinu (groupes de Schottky). La frontière du domaine d'existence de $f(z)$ est l'ensemble dérivé de l'ensemble constitué par les points doubles de toutes les substitutions du groupe. Le domaine $D(Z)$, formé par les valeurs que prend $Z = f(z)$ dans le domaine $d(z)$ recouvre tout le plan Z sans exception; si l'on considère seulement les valeurs de $Z = f(z)$ dans un domaine fondamental d_0 du groupe considéré, ces valeurs constituent dans le plan Z une surface de Riemann algébrique Σ à k feuillets [k étant l'ordre de la fonction fuchsienne ou kleinéenne, nombre de racines de $f(z) - a = 0$ dans le domaine fondamental, nombre indépendant de a], étalée sur le plan Z, y compris le point à l'infini. Le domaine $D(Z)$ est alors composé d'une infinité de surfaces de Riemann *identiques à* Σ, empilées sur le plan Z, raccordées les unes aux autres par des lignes de croisement qui sont, dans le plan Z, les transformées des côtés du polygone fondamental du plan z et de ses homologues dans le groupe. Le domaine $d(z)$ reste invariant par chacune des substitutions $[z \mid S_i(z)]$. Une telle substitution échange simplement entre eux les divers domaines fondamentaux qu'on a déduits du domaine fondamental primitif d_0 par toutes les substitutions du groupe considéré, et dont l'ensemble recouvre $d(z)$ sans omission ni répétition. Aux points z et $z_1 = S_i(z)$ correspondent des points $Z = f(z)$ et $Z_1 = f[S_i(z)]$ tels que $Z = Z_1$. Les points Z et Z_1 du domaine $D(Z)$ sont *superposés*. A toutes les substitutions du groupe considéré correspondent ainsi des transformations du domaine $D(Z)$ en lui-même dans lesquelles les points correspondants sont SUPERPOSÉS. Lorsque Z décrit une des surfaces de Riemann Σ en lesquelles $D(Z)$ se décompose, son transformé Z_1 décrit une surface identique Σ_1 superposée à Σ et sur ces deux surfaces les points superposés Z et Z_1 occupent des positions homologues.

3. Toutes ces propriétés se déduisent sans peine de la théorie des fonctions fuchsiennes ou kleinéennes telle qu'elle est donnée par

Poincaré dans ses travaux mémorables. Mais elles peuvent aujourd'hui servir à établir l'*existence* des fonctions fuchsiennes et kleinéennes. C'est ainsi par exemple que procède M. Koebe. Soit à prouver l'existence des fonctions fuchsiennes du type Schottky. On part d'une surface de Riemann algébrique quelconque Σ étalée sur un plan Z et on la découpe par le procédé connu à l'aide de p courbes fermées (si Σ est de genre p) de manière à en faire une surface Σ' que toute courbe fermée morcellera, chacune des coupures faites ayant deux bords, Σ' peut être considérée comme ayant pour frontière $2p$ courbes fermées. On considère une infinité de surfaces identiques à Σ'. Sur Σ' on placera une Σ'_1 identique à Σ', les coupures de Σ'_1 étant superposées à celles de Σ'. On choisira une de ces coupures et on reliera par une ligne de croisement un de ses bords pris sur Σ' au bord opposé pris sur Σ'_1. Σ' se trouve ainsi unie à Σ'_1 par une de ses $2p$ courbes frontières. On unira de même Σ' à $2p-1$ autres surfaces identiques à Σ', superposées à Σ'; par ses $2p-1$ autres courbes frontières. A ce stade, Σ' est encadrée dans $2p$ surfaces identiques dont chacune a maintenant $2p-1$ bords libres. Mais Σ' n'a plus de bord libre. On continue indéfiniment sur chacune des $2p$ surfaces encadrant Σ' ce qu'on vient de faire sur Σ'. La limite du processus fournit une surface D à une infinité de feuillets, sans frontière à distance finie, que toute courbe fermée morcelle, mais sur laquelle il y a une infinité de courbes fermées ne délimitant aucun domaine à distance finie. [Ces courbes proviennent des courbes fermées qu'on peut tracer sur Σ' et qui divisent Σ' en deux parties dont chacune contient parmi ses lignes-frontière au moins une des lignes-frontière de Σ'.] Cette surface D(Z) a un ordre de connexion infini. M. Koebe l'appelle une « surface de recouvrement de Σ sans point de ramification ».

Il démontre qu'on peut en faire la représentation conforme $z = \varphi(Z)$, sur une aire $d(z)$ du plan z *limitée par un ensemble parfait discontinu* de points. Aux diverses surfaces Σ' dont est composée D(Z) correspondent des aires σ' du plan z limitées chacune par $2p$ courbes fermées. On montre que deux quelconques de ces aires sont transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire $\left(z \,\middle|\, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ qui laisse $d(z)$ invariant. Toutes ces substitutions forment un groupe du type Schottky, proprement discontinu dans $d(z)$, dont chaque σ' est un domaine fondamental. La fonction $Z = f(z)$, inverse de $z = \varphi(Z)$, est une fonction uniforme et analytique dans le domaine $d(z)$, invariante par les substitutions du groupe précédent; elle est méromorphe en tout point intérieur à $d(z)$, c'est une fonction fuchsienne ou kleinéenne du type Schottky.

Les problèmes qu'il a fallu résoudre par cette méthode sont : 1° détermination de $D(Z)$ domaine des valeurs de $f(z)$; 2° représentation conforme de $D(Z)$ sur une aire $d(z)$ du plan z, domaine d'existence de $f(z)$. Dans le Mémoire actuel on va utiliser cette idée de la représentation conforme pour résoudre d'autres équations fonctionnelles. Le principe sera toujours : 1° détermination du domaine des valeurs $D(Z)$ de la fonction cherchée; 2° repésentation conforme de ce domaine sur le plan z ou sur une autre surface de Riemann. En d'autres termes : 1° détermination du domaine d'existence $D(Z)$ de la fonction $z = \varphi(Z)$ inverse de la fonction cherchée; 2° détermination du domaine des valeurs de $\varphi(Z)$, qui n'est autre que le domaine $d(z)$ où existe la fonction cherchée.

CHAPITRE I.

RAPPEL DE RÉSULTATS OBTENUS SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME.

4. Envisageons un domaine D étalé sur le plan Z à la manière d'une surface de Riemann ayant un nombre fini ou une infinité dénombrable de feuillets. On le suppose simplement connexe, c'est-à-dire que toute courbe fermée tracée sur D ou toute ligne joignant deux points frontières de D morcelle D. Le domaine D peut avoir à son intérieur un nombre fini ou une infinité dénombrable de points de ramification : l'ordre de chacun de ces points devra cependant être *fini*, c'est-à-dire que le nombre des feuillets sur lesquels on doit passer en décrivant sur D une courbe fermée infiniment petite autour du point considéré (ordre augmenté de l'unité) doit être *fini*. Des points autour desquels se ramifieraient une infinité de feuillets de D sont des points frontières de D. Il s'agit ici de points tels que, sans sortir d'un cercle arbitrairement petit les entourant, on puisse, en restant sur D, décrire un chemin

continu qui traverse une infinité de feuillets de D. [Cela ne veut pas dire que tout point *du plan* Z qui est point limite de *projections sur le plan Z de points de ramification de* D soit point frontière de D, car il peut se faire que dans un cercle arbitrairement petit ayant pour centrè ce point on ne puisse trouver une infinité de feuillets se ramifiant les uns aux autres à l'intérieur du cercle, la partie de D à l'intérieur de ce cercle étant formée d'une infinité de surfaces de Riemann dont chacune est d'un seul tenant, d'un nombre limité de feuillets, ces diverses surfaces étant sans lien deux à deux à l'intérieur du cercle considéré ([1]).]

Tout point P intérieur à D sera donc tel que : 1° ou bien l'aire d'un certain cercle γ, ayant pour centre P, sur le feuillet auquel appartient P, soit formée de points intérieurs à D : alors le point P est un point ordinaire (non point de ramification); 2° ou bien la portion, projetée à l'intérieur d'un certain cercle γ de centre P, d'une certaine surface de Riemann à un nombre fini K de feuillets, tous ramifiés entre eux au point P, limitée par le cercle considéré parcouru K fois dans le même sens, est formée de points tous intérieurs à D : cette surface de Riemann est la portion d'un seul tenant avec P, découpée dans D par le cylindre projetant γ. Le domaine D peut avoir des points ou des lignes-frontière quelconques sur chacun de ses feuillets pourvu cependant qu'il reste simplement connexe. Cela étant, on peut faire la représentation conforme de ce domaine D sur une aire d du plan z à un seul feuillet, les points intérieurs à d et les points intérieurs à D se correspondant d'une manière biunivoque et analytique. L'aire du plan z sera : 1° ou bien limitée par *un cercle;* 2° ou bien limitée par un point unique qu'on peut toujours supposer être le point à l'infini (*plan pointé*), elle comprend alors tout le plan sauf ce point; 3° ou bien elle pourra être constituée par le plan tout entier y compris le point à l'infini (*plan complet* ou sphère de Riemann). La représentation conforme sera déterminée par une fonction

([1]) Ce phénomène se produit par exemple aux points $Z = -1$ et $Z = +1$ de la surface de Riemann sur laquelle la fonction arc sin Z est uniforme. La portion de cette surface projetée dans un cercle arbitrairement petit de centre $Z = 1$ compte une infinité de fragments identiques chacun composé de deux feuillets ramifiés en $Z = 1$ et limité par le cercle considéré parcouru deux fois dans le même sens.

$z = \varphi(Z)$, uniforme sur D, analytique en tout point intérieur à D. Le domaine d sera le domaine des valeurs que prend $\varphi(Z)$ sur D. Dans le premier cas $\varphi(Z)$ est holomorphe et bornée sur D, dans le deuxième elle est holomorphe sur D mais non bornée. Le troisième cas ne peut se présenter que si le domaine D est une surface de Riemann sans frontière, fermée, recouvrant chaque point du plan Z d'un nombre égal et fini K de feuillets, cette surface étant une surface de Riemann algébrique du genre zéro. Ce résultat est dû à Schwarz [*Ueber die Integration der partiellen Differential gleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *unter vorgeschriebenen Grenz-und Unstetigkeitsbedingungen*, *Berliner Monatsberichte* (1870)]. L'existence de $\varphi(Z)$ dans le premier cas est établie par Poincaré dans son Mémoire de 1883 *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bulletin de la Société mathémathique de France*, t. XI). La démonstration ne s'applique toutefois qu'aux domaines D qui laissent à découvert au moins trois points du plan Z. C'est une restriction due à l'emploi de la fonction modulaire : elle est artificielle. Poincaré l'a lui-même levée dans un Mémoire du Tome 31 des *Acta mathematica* (*Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*) où il établit sans restriction, par sa méthode du balayage, l'existence de la fonction $\varphi(Z)$ dans les premier et deuxième cas.

M. Koebe a consacré plusieurs Mémoires et Notes à l'uniformisation des fonctions analytiques, les fonctions uniformisantes jouissant de propriétés diverses assignées *a priori*. Une des questions principales qu'il a traitées est justement celle de la représentation conforme des aires simplement connexes (*voir* par exemple *Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* dans *Göttinger Nachrichten*, 1907). Voici, brièvement résumée, la méthode qu'il emploie et que nous allons aussi employer dans la suite.

5. On détermine une suite de domaines D_1, D_2, ..., D_n, ... simplement connexes et jouissant des propriétés suivantes. Tout point intérieur à un domaine D_n est intérieur au domaine D que l'on considère : on dira en abrégé que D_n *est intérieur à* D; chaque D_n ne comporte qu'un *nombre fini de feuillets*, ne

possède à son intérieur qu'un *nombre fini des points de ramification* de D et ne peut être limité que par un nombre fini de lignes analytiques, par exemple, des segments de droite. Chaque D_n est intérieur à D_{n+1} et à tous les D_i d'indice $> n$. Enfin tout point P, intérieur à D, est à partir d'un certain rang n_0 intérieur à tous les D_n. On peut dire que D *est la limite du domaine* D_n *quand n croît indéfiniment, les domaines* D_n *successifs étant emboîtés les uns dans les autres.*

Choisissant un point O intérieur à D_1, et qui ne soit pas point de ramification de D_1, on considère les *fonctions de Green* u_n relatives à tous les D_n (1) et au pôle O. u_n est une fonction uniforme et harmonique, du point P qui décrit D_n, nulle sur la frontière de D_n, devenant infinie en O de façon que la différence $u_n - \log \frac{1}{r}$ reste régulière en O $\left[r = \overline{OP}\right]$. D_n étant contenu dans D_{n+1} on aura en tout point de D_n $u_{n+1} > u_n$. Considérant en un point P de D toutes les fonctions u_n relatives aux domaines D_n qui, à partir d'un certain rang contiennent P, on voit que ces fonctions *croissent avec n* et la séparation des deux cas de la représentation conforme dépend de la limite des u_n pour $n = \infty$. Si cette limite est finie, on est dans le premier cas, si elle est infinie on est dans le deuxième. Voici comment on peut, d'après l'allure de u_n autour de O, séparer ces deux cas. Développant u_n au voisinage de O, on aura

$$u_n = \log \frac{1}{r} + c_n + \text{fonction harmonique régulière de P, nulle au point O,}$$

$u_{n+1} - u_n$ étant régulière, harmonique et positive dans D_n et prenant en O la valeur $c_{n+1} - c_n$, on voit que les c_n vont en croissant

$$c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n < \ldots.$$

6. Dans ces conditions : 1° Ou bien $\lim_{n=\infty} c_n$ est une quantité finie c. On démontre alors qu'en tout point P de D la suite des u_n a une limite finie u. Cette limite est une fonction du point P,

---

(1) C'est là un problème qu'on sait résoudre, pour les D_n ayant les propriétés indiquées, depuis Schwarz.

uniforme sur D et harmonique. En O elle devient infinie comme $\log \frac{1}{r}$

$$u = \log \frac{1}{r} + c + \text{fonction homonique régulière de P, nulle en O.}$$

C'est la fonction de Green du domaine D. Elle tend vers zéro quand P tend vers un point frontière de D ou s'éloigne sur des feuillets de D d'ordre indéfiniment croissant. La fonction harmonique v, conjuguée de u sur D, est alors parfaitement définie. La fonction

$$\varphi(Z) = e^{-(u+iv)}$$

est une fonction uniforme sur D, holomorphe et inférieure en module à l'unité; en deux points différents de D elle prend des valeurs différentes : elle fournit la représentation conforme de D sur *l'intérieur d'un cercle de rayon* 1. On est ici dans le premier cas.

7. 2° Ou bien $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$. Alors, en tout point de D, la suite des u_n devient infinie. Mais on démontre alors que la suite des $U_n = u_n - c_n$ est convergente en tout point P de D. Soit U la limite de cette suite, elle est harmonique et uniforme sur D, et devient infinie en O comme $\log \frac{1}{r}$

$$U = \log \frac{1}{r} + \text{fonction harmonique régulière de P, nulle en O.}$$

Soit V la fonction conjuguée. La fonction

$$z = \Phi(Z) = e^{-[U+iV]},$$

uniforme et holomorphe sur D, nulle en O, fournit la représentation conforme de D sur le *plan z pointé* limité par le seul point à l'infini. On le voit aisément en remarquant que, V_n étant la fonction conjuguée de U_n (ou de u_n), la fonction

$$z_n = \Phi_n(Z) = e^{-(U_n+iV_n)} \text{ (1)}$$

(1) v_n, conjuguée de u_n, n'est définie qu'à une constante réelle près. On déterminera cette constante par la condition qu'à une certaine direction OT issue de O sur D corresponde une direction *ot* issue de l'origine dans ce plan z. Cette direction *ot* ne dépendant pas de n, la suite des v_n convergera vers la fonction V conjuguée de U et satisfaisant à la condition de correspondance des directions OT et *ot*. Faute d'avoir pris cette précaution, la suite des V_n ne convergerait pas nécessairement.

fournit la représentation conforme de D_n sur un cercle du plan z ayant son centre à l'origine et dont le rayon (valeur de e^{-U_n} sur le contour de D_n] égal à e^{c_n} *devient infini avec n*. La fonction $\Phi(Z)$ est la limite des $\Phi_n(Z)$, uniformément atteinte dans tout domaine intérieur à D. On est ici dans le *deuxième cas :* $\Phi(Z)$ fournit la représentation conforme de D *sur le plan pointé à l'infini.*

Dans le premier cas, considérons la fonction

$$z_n = \varphi_n(Z) = e^{-(u_n + iv_n)},$$

v_n étant conjuguée de u_n [1], sur D_n. Elle fournit la représentation conforme de D_n sur un cercle du plan z qui a son centre à l'origine et *pour rayon l'unité.* D étant alors représentable sur un cercle dont on peut toujours supposer le rayon égal à 1, *la fonction* $\varphi(Z)$, *qui fournit la représentation conforme, est la limite, pour* $n = \infty$, *des fonctions* $\varphi_n(Z)$ *qui représentent les* D_n *sur ce même cercle de rayon* 1. Dans le deuxième cas, considérons cette même fonction

$$\varphi_n(Z) = e^{-(u_n + iv_n)}.$$

Elle fournit la représentation conforme de D_n sur un cercle de rayon 1, mais D n'étant pas représentable sur un cercle, la suite des φ_n *tend vers zéro en tout point intérieur à* D. On a en effet la relation.

$$\Phi_n(Z) = e^{c_n}.\,\varphi_n(Z)$$

puisque $U_n = u_n - c_n$ et $V_n = v_n$. La convergence des $\Phi_n(Z)$ vers une limite finie $\neq 0$ en tout point de D différent de O entraîne la convergence des φ_n vers zéro.

8. On peut comprendre les deux cas dans une même considération.

Reprenons la fonction

$$\varphi_n(Z) = e^{-(u_n + iv_n)}$$

---

[1] La même précaution doit être prise pour définir v_n que dans la note [1] qui précède.

dans laquelle le choix de la constante réelle entrant dans v_n aura été fait de telle façon que $\varphi'_n(o)$ *soit réel et positif*, ce qui veut dire que les deux directions OT et *ot* correspondantes sont parallèles.

On a

$$u_n + iv_n = -\log \varphi_n(Z).$$

Donc

$$u_n = -R \log(\varphi_n(Z) = -\log|\varphi_n(Z)|,$$

$$v_n = -\arg \varphi_n(Z).$$

Or on a autour de O

$$\varphi_n(Z) = Z\varphi'_n(o) + \frac{Z^2}{2!}\varphi''_n(o) + \ldots = Z\varphi'_n(o)[1+\varepsilon]$$

en supposant que le point O est l'origine des coordonnées du plan Z.

Donc

$$u_n = -\log|Z\varphi'_n(o)[1+\varepsilon]| = -\log|Z| - \log|\varphi'_n(o)| - \log|1+\varepsilon|.$$

On voit ainsi que la constante c_n du développement de u_n, au voisinage de o, est $-\log[\varphi'_n(o)]$. Puisque $\varphi'_n(o)$ est réel et positif, $\varphi'_n(o) = e^{-c_n}$.

D'autre part, on aura

$$v_n = -\arg Z - \arg \varphi'_n(o) - \arg(1+\varepsilon);$$

$\varphi'_n(o)$ étant réel on prendra la constante figurant dans v_n de façon que $V_n + \arg Z$ tende vers *zéro* avec Z. $\varphi_n(Z)$ est alors bien déterminée. La fonction $\varphi_n(Z)$ donne, on l'a vu, la représentation conforme de D_n sur le cercle de rayon 1, de centre l'origine. La fonction

$$\Phi_n(Z) = \frac{\varphi_n(Z)}{\varphi'_n(o)} = Z + \lambda_2^{(n)} Z^2 + \ldots$$

donnera la représentation conforme de D_n sur un cercle concentrique à celui-là mais de rayon $\frac{1}{\varphi'_n(o)} = e^{c_n}$. De plus $\Phi'_n(o) = 1$.

Dans le premier cas les $\varphi_n(Z)$ ont pour limite $\varphi(Z)$ qui représente D sur le cercle de rayon 1; les $\Phi_n(Z)$ auront ici pour limite une fonction

$$\Phi(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\varphi'(o)} = Z + \lambda_2 Z^2 + \ldots$$

telle que $\Phi'(o) = 1$ et qui représentera D *sur un cercle de rayon* e^c, $c = -\log \varphi'(o)$ est la limite des $c_n = -\log \varphi'_n(o)$.

Dans le deuxième cas les fonctions $\Phi_n(Z) = e^{-(U_n + iV_n)}$ que nous avons formées au n° 7 sont précisément celles que nous venons maintenant de former au n° 8, cela résulte aussitôt de ce que $U_n = u_n - c_n$ et, par conséquent, puisque $V_n = v_n$,

$$\Phi_n(Z) = e^{c_n} \varphi_n(Z) = \frac{\varphi_n(Z)}{\varphi'_n(o)}.$$

On a $\Phi'_n(o) = 1$ et les $\Phi_n(Z)$, fournissant la représentation conforme de D_n sur un cercle e^{c_n}, ont pour limite la fonction $\Phi(Z) = e^{-(U+iV)}$ indiquée au n° 7, telle que $\Phi'(o) = 1$ et qui représente D sur un cercle de rayon $e^{\lim c_n} = \infty$, c'est-à-dire sur le plan pointé à l'infini.

En définitive on déterminera la fonction $\Phi_n(Z)$ nulle en O, *dont la dérivée* $\Phi'_n(o)$ *soit* $= 1$, et qui fournisse la représentation conforme de D_n (¹) sur un cercle du plan z, ayant son centre à l'origine. Ce cercle aura un rayon e^{c_n} qui croît avec n :

1° *Si ce rayon a une limite finie* e^c pour $n = \infty$, on est dans le premier cas, et les fonctions $\Phi_n(Z)$ ont pour limite une fonction $\Phi(Z)$, $\Phi(o) = o$, $\Phi'(o) = 1$, fournissant la représentation conforme de D *sur un cercle de rayon* e^c;

2° *Si ce rayon devient infini avec* n, on est dans le deuxième cas et les fonctions $\Phi_n(Z)$ ont encore pour limite une fonction $\Phi(Z)$, $\Phi(o) = o$, $\Phi'(o) = 1$, fournissant la représentation conforme de D *sur le plan pointé à l'infini.*

CHAPITRE II.

L'ÉQUATION DE SCHRÖDER $\Phi[R(Z)] = s\,\varphi(Z)$ ET L'ÉQUATION ASSOCIÉE $f(sz) = R[f(z)]$.

9. Elles sont associées par ce fait que $z = \varphi(Z)$, solution de la première, est fonction inverse de $Z = f(z)$, solution de la

(¹) Ce problème, relatif à un domaine D_n, est un problème que l'on sait résoudre depuis Schwarz, ainsi qu'on l'a dit plus haut.

deuxième. Poincaré a prouvé [1] que, si la substitution $[Z|R(Z)]$ a un point double répulsif à l'origine

$$[R(0)=0, \quad |s=R'(0)|>1],$$

l'équation

$$f[sz]=R[f(z)] \tag{1}$$

admet une solution et une seule, telle que $f(0)=0$, $f'(0)=1$, et cette solution est méromorphe dans tout le plan z. On prouve par la méthode des majorantes qu'elle admet une telle solution holomorphe, unique au voisinage de $z=0$, et l'équation (1) elle-même fournit l'extension de $f(z)$ comme fonction méromorphe à tout le plan z, sauf l'infini. *Le domaine d (z) est ici le plan z moins le point à l'infini.*

Posant

$$z_1=sz, \qquad Z=f(z), \qquad Z_1=f(sz)=f(z_1),$$

on aura

$$Z_1=R(Z).$$

La substitution $[z|sz]$ transforme en lui-même d'une façon biunivoque le domaine d'existence d de $f(z)$, $z=0$ étant seul point double intérieur à d.

La substitution $[Z|R(Z)]$ transformera en lui-même d'une façon biunivoque le domaine des valeurs D de $f(z)$, $Z=0$ étant point double intérieur à D.

Or il est facile de construire *a priori* D. $f(z)$ étant holomorphe en 0 et $f'(0)=1$ un petit cercle autour de $z=0$ devient, par $Z=f(z)$, une petite aire du plan Z entourant $Z=0$ et limitée par une courbe fermée analytique. Si l'on envisage au contraire $\varphi(Z)$, fonction inverse de $f(z)$, elle transforme un petit cercle (C_0), de centre $Z=0$, en une petite aire simple (c_0) entourant $z=0$ et limitée par une courbe fermée analytique. Les valeurs de $f(z)$ dans (c_0) recouvrent (C_0). Les valeurs de f dans l'aire $(c_1)=(sc_0)$ [obtenue en multipliant par s les affixes z de tous les points intérieurs à (c_0)] recouvrent l'aire (C_1) transformée de (C_0) par la substitution $[Z|R(Z)]$. D'une façon générale on aura les valeurs de f dans l'aire $(c_n)=(s^n c_0)$ en soumettant l'aire (C_0) n fois de

---

(1) *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* (*Journal de Jordan*, 1890).

suite à la substitution $[Z \mid R(Z)]$, c'est-à-dire en l'itérant n fois. *Le domaine* D *des valeurs de* $f(z)$ *dans le plan* z *sera la limite de* (C_n) *itérée* $n^{ième}$ *de* (C_0), *quand* n *devient infini.* On va étudier cette limite.

10. Si l'on a choisi (C_0) assez petit, il résulte d'une étude élémentaire de l'itération de la substitution $[Z \mid R(Z)]$, autour du point double répulsif $Z = 0$, déjà faite par M. Kœnigs (et qu'on pourra retrouver dans le Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1918, *Sur l'itération des fractions rationnelles*, n° 1, 10, 19, 28), que (C_1) est une aire limitée par un contour analytique fermé C_1 et contenant (C_0) à son intérieur, les frontières de (C_0) et (C_1) ne se rencontrent pas. Les aires (C_0) et (C_1) seront considérées comme tracées sur un même feuillet étalé sur le plan Z, le premier. Par l'itération de $[Z \mid R(Z)]$, (C_1) devient une aire analogue (C_2) qui contient (C_1) à son intérieur comme (C_1) contenait (C_0); (C_3) contient (C_2), etc. Les aires (C_i) successives vont en s'agrandissant; à partir d'un certain indice p, elles se recouvrent elles-mêmes en tout ou partie. Cela arrivera dès l'indice p si l'aire (C_{p-1}) renferme au moins deux points *distincts* où $R(Z)$ reprend la même valeur. On considérera alors que l'aire (C_p) est tracée sur deux ou plusieurs feuillets. Le nombre de ces feuillets s'obtiendra en ajoutant l'unité au nombre maximum de racines Z, distinctes de ζ et distinctes entre elles, qu'on pourra trouver à l'intérieur de (C_{p-1}) pour l'équation en Z, $R(Z) = R(\zeta)$, lorsque ζ décrira (C_{p-1}).

En supposant que (C_{p-1}) est à un seul feuillet, on déduira (C_p) de (C_{p-1}) par la substitution $[Z \mid R(Z)]$ à l'aide de la méthode du prolongement analytique. Tout d'abord la partie de (C_{p-1}) qui coïncide avec (C_{p-2}) devient (C_{p-1}).

Envisageons l'anneau entre les courbes C_{p-2} et C_{p-1}. Cet anneau ne contient qu'un nombre fini de racines de $R'(Z) = 0$. Si, autour d'une de ces racines ζ, d'ordre K [1], nous décrivons un cercle γ de rayon assez petit, intérieur à l'anneau (C_{p-2}, C_{p-1}), l'aire transformée de ce cercle (γ) par la substitution $[Z \mid R(Z)]$ est une partie de surface de Riemann $[R(\gamma)]$ à $(K+1)$ feuillets,

[1] K est inférieur ou égal à $d-1$, K étant le dégré de R (Z).

tous ramifiés entre eux au point $R(\zeta)$, portion limitée par une courbe fermée $R(\gamma)$ transformée de γ, courbe qui fait $(K+1)$ tours autour de $R(\zeta)$ en parcourant les $(K+1)$ feuillets précédents. Si même on remplace le cercle γ par une courbe fermée convenable γ_1 entourant ζ, la courbe $R(\gamma_1)$ sera un cercle de centre $R(\zeta)$, parcouru $(K+1)$ fois dans le même sens. Si, sur la frontière C_{p-1} on trouvait une racine de $R'(Z)=0$, on ne considérerait que la partie de l'aire (γ_1) intérieur à l'anneau. Isolant ainsi chacune des racines de $R'(Z)=0$ situées dans l'anneau (C_{p-2}, C_{p-1}) ou sur sa frontière par une petite aire telle que (γ_1) par exemple, il reste un ensemble fermé constitué par les points intérieurs à cet anneau ou sur sa frontière, extérieurs aux petites aires précédentes ou sur leur frontière. En tout point de cet ensemble $|R'(Z)| \geqq \varepsilon$, ε ayant une valeur fixe positive. Chaque point peut donc être entouré d'un cercle (γ') de rayon assez petit, pour que l'aire transformée de ce cercle par $[Z|R(Z)]$ soit une aire simple à un seul feuillet. L'ensemble tout entier peut être recouvert à l'aide *d'un nombre fini de ces cercles* (théorème de Borel-Lebesgue). En définitive l'anneau (C_{p-2}, C_{p-1}) peut être recouvert par un nombre fini de cercles (γ') ou d'aires (γ_1) dont les transformées par $[Z|R(Z)]$ sont ou bien des aires simples $[R(\gamma')]$ à un seul feuillet, ou bien des portions de surface de Riemann $[R(\gamma_1)]$ à $(K+1)$ feuillets, limitées par un cercle parcouru $(K+1)$ fois dans le même sens, les $(K+1)$ feuillets se ramifiant entre eux au centre du cercle qui est un point d'ordre K. Il sera alors facile de constituer l'anneau (C_{p-1}, C_p), transformé par $[Z|R(Z)]$ de l'anneau (C_{p-2}, C_{p-1}) à l'aide des aires transformées des aires (γ') et (γ_1), en partant de la courbe C_{p-1} tracée sur le premier feuillet et juxtaposant les aires précédentes sur autant de feuillets qu'il sera nécessaire, de manière à observer entre les aires $[R(\gamma')]$, $[R(\gamma_1)]$ et (C_{p-1}) toutes les connexions qui existent entre les aires (γ'), (γ_1) et (C_{p-2}); deux telles aires empiètant l'une sur l'autre se transformant nécessairement, par $[Z|R(Z)]$, en deux aires qui empiètent aussi l'une sur l'autre. Le degré de $R(Z)$ étant d, l'aire (C_p) aura ainsi au plus d feuillets et elle ne contiendra qu'un nombre fini de points de ramification. En ce qui concerne le numérotage des feuillets, on sait d'abord que (C_{p-1}) est tracée sur le premier feuillet. Parcourons le contour (C_{p-2}) dans le sens positif et rangeons dans l'ordre où nous les rencontrerons à partir d'une aire (γ') déterminée, les aires (γ') et (γ_1) en nombre fini que nous traverserons ainsi; à l'aide de ces aires et de (C_{p-2}) nous recouvrons une partie (Γ_1) de (C_{p-1}) dont nous désignons le contour par Γ_1 (¹) (Γ_1 contient C_{p-2}). Décrivant Γ_1 dans le sens positif, nous rangerons dans l'ordre où nous les rencontrerons, et à la suite des précédentes, les aires (γ') et (γ_1) en nombre fini que nous traverserons. Adjoignant ces aires aux précédentes, nous recouvrons une partie (Γ_2) de (C_{p-1}) dont Γ_2 sera le contour. Répétant eette opération autant de fois qu'il sera nécessaire, nous aurons classé les aires (γ') et (γ_1) qui recouvrent l'anneau (C_{p-2}, C_{p-1}) dans un ordre déterminé. Cela étant, nous disposerons d'abord les aires $R(\gamma')$ et $R(\gamma_1)$ transformées des aires (γ') et (γ_1) qui nous ont servi à constituer (Γ_1), de façon que ces aires empiètent toutes sur (C_{p-1}) comme leur aires antécédentes empiétaient sur (C_{p-2}), et en observant les principes suivants :

1° Tout point Z n'appartenant pas à (C_{p-1}) et qu'on est amené à recouvrir par les aires $R(\gamma')$ et $R(\gamma_1)$ sera considéré comme du premier feuillet la première fois qu'il sera recouvert, comme du deuxième la deuxième fois qu'il le sera, etc., les aires $R(\gamma')$ et $R(\gamma_1)$ étant rangées dans l'ordre où l'étaient les (γ') et (γ_1) de Γ_1.

2° Tout point Z recouvert déjà par (C_{p-1}), et qu'on est amené à recouvrir encore par les aires $R(\gamma')$ et $R(\gamma_1)$ précédentes sera considéré comme du deuxième, du troisième, ... feuillets, la première, la deuxième, ... fois qu'il sera recouvert par une de ces aires $R(\gamma')$ et $R(\gamma_1)$.

On constituera ainsi le domaine transformé de (Γ_1). En observant ces mêmes principes, on constituera ensuite le transformé de (Γ_2) { en substituant dans les considérations précédentes (Γ_1) à (C_{p-2}) et $[R(\Gamma_1)]$ à (C_{p-1}) } en prenant successivement les (γ') et (γ_1) dans l'ordre défini plus haut, puis le transformé de (Γ_2), ... On a ainsi un procédé régulier pour constituer l'anneau (C_{p-1}, C_p)

(¹) Il pourrait arriver que ce contour fût composé de plusieurs courbes distinctes.

transformé de (C_{p-2}, C_{p-1}) et par suite pour constituer (C_p) sur plusieurs feuillets numérotés.

L'ensemble des opérations précédentes peut être conçu de la façon suivante. Envisageons sur le plan Z la surface de Riemann algébrique σ, de genre zéro, sur laquelle la fonction inverse de $R(Z)$ est uniforme. On peut dire que cette surface est décrite par le point $Z_1 = R(Z)$ lorsque Z décrit le plan Z complété par l'infini. Elle a d feuillets et il y a correspondance biunivoque entre elle et le plan Z. On peut toujours la supposer bâtie de telle sorte qu'au point O du premier feuillet corresponde le point O du plan Z (c'est-à-dire que l'on part de O sur le premier feuillet avec la branche de fonction inverse nulle en O). On peut dire alors que $[Z|R(Z)]$ transforme le premier feuillet de σ (plan Z) en la surface σ, l'origine O étant un *point double répulsif*

$$[|S = R'(o)| > 1];$$

dans ces conditions les aires (C_0), (C_1), ..., (C_{p-1}) seront tracées sur le premier feuillet de σ et (C_p) sera tracée sur deux ou plusieurs feuillets de σ, (C_p) sera une aire fermée sur σ et C_p une courbe analytique fermée sur σ.

11. Pour passer maintenant de (C_p) à (C_{p+1}) on observera que la partie (C_{p-1}) de (C_p) devient (C_p) par $[Z|R(Z)]$. Reste l'anneau (C_{p-1}, C_p) à plusieurs feuillets. *Sur chacun des feuillets de cet anneau*, on fera, outre les opérations qu'on a faites précédemment pour l'anneau (C_{p-2}, C_{p-1}) du premier feuillet, une nouvelle opération. On isolera les points de ramification ω de (C_{p-1}, C_p) par les aires de Riemann $R(\gamma_1)$ qui ont justement défini ces points de ramification (ou par des aires concentriques, de rayon plus petit qu'on appellera aires γ_2); puis on isolera sur chaque feuillet les racines de $R'(Z) = o$ distinctes des points précédents par des aires du type des aires (γ_1). Il restera alors un ensemble fermé qu'on pourra recouvrir par un nombre fini de cercles du type (γ'), chacun d'eux se transformant par $[Z|R(Z)]$ en une aire simple à un seul feuillet. On sait ce que deviennent, par $[Z|R(Z)]$, les aires de ces deux sortes. Une aire (γ_2) entourant un point de ramification est un morceau de surface de Riemann limité par une seule courbe fermée analytique tournant $(K+1)$

fois autour d'un point ω d'ordre K autour duquel se ramifient les $(K+1)$ feuillets de cette surface de Riemann. Si le point de ramification ω n'est pas une racine de $R'(Z)=0$, et si l'aire (γ_2) ne renferme pas de telle racine (ce qu'on peut toujours supposer en la remplaçant par une aire concentrique, de rayon suffisamment petit), (γ_2) deviendra une aire $[R(\gamma_2)]$ de même caractère que (γ_2), à $(K+1)$ feuillets ramifiés entre eux au point $R(\omega)$ transformé de ω. Mais si ω est une racine d'ordre K' de $R'(Z)=0$, l'aire $[R(\gamma_2)]$ aura $(K+1)(K'+1)$ feuillets ramifiés entre eux au point $R(\omega)$ et sera limitée par une courbe fermée analytique tournant $(K+1)(K'+1)$ fois autour de ce point. Sachant ce que deviennent, par $[Z|R(Z)]$, les trois espèces d'aires, en nombre fini, dont on a recouvert l'anneau (C_{p-1}, C_p), on classera ces aires dans un ordre déterminé en procédant comme au n° 10, et considérant d'abord celles de ces aires qu'on traverse en parcourant le contour C_p dans le sens positif, les adjoignant à (C_p) pour continuer un domaine (Γ'_1), puis considérant celle des aires en question qu'on rencontre en décrivant le contour de (Γ'_1), etc. Puis on établira entre les aires transformées les mêmes connexions qu'entre les aires primitives, et ces aires transformées servant à définir l'anneau (C_p, C_{p+1}) seront ainsi réparties sur un nombre de feuillets certainement $\leqq d^2$, feuillets qui seront numérotés en observant les principes déjà indiqués par la construction de C_p.

1° Tout point Z *non recouvert par* (C_p) et qu'on est amené à recouvrir par une des aires transformées est considéré comme appartenant au premier feuillet, puis au deuxième si une deuxième aire transformée le recouvre, ..., dans l'ordre où ces aires se présentent dans la transformation.

2° Tout point Z, recouvert par δ feuillets de (C_p), est recouvert par des feuillets n^{os} 1, 2, ..., δ de (C_p) en vertu du principe 1° observé par (C_p); si l'on est amené à le recouvrir δ' fois par les nouvelles aires précédentes, qui définissent l'anneau (C_p, C_{p-1}), on numérotera, dans l'ordre où se présentent ces aires, par $\delta+1$, $\delta+2$, ..., $\delta+\delta'$ les nouveaux feuillets.

En observant ces principes on définira l'aire (C_{p+1}) transformée de l'aire (C_p) par $[Z|R(Z)]$. (C_{p+1}) pourra aussi être conçue comme une aire fermée tracée sur la surface de Riemann σ_2 de la fonction algébrique inverse de $R_2(Z) = R[R(Z)]$ et se déduisant de $(C_{p-1}$ par la transformation $[Z | R_2(Z)]$ comme C_p a été déduite (sur σ) de (C_{p-1}) par $[Z | R(Z)]$. σ_2 ayant d^2 feuillets et un nombre fini de points de ramification, (C_{p+1}) sera simplement connexe, aura au plus d^2 feuillets, et aura un nombre fini de points de ramification.

12. A l'aide des mêmes principes, observés de proche en proche, on pourra définir aisément (C_n) à partir de (C_{n-1}). *Les aires* (C_n) *successives, simplement connexes, seront contenues chacune dans les suivantes et chacune à un nombre fini de feuillets et de points de ramification.* L'étude des projections de ces aires sur le plan Z, faite dans le Mémoire cité au n° 9, prouve que ces projections vont en s'élargissant constamment et que :

1° Dans le cas général une certaine aire (C_n) recouvre tout le plan sans exception.

2° Si la substitution $Z_1 = R(Z)$ se ramène (par une même substitution homographique sur Z et Z_1) à la forme canonique où R est un polynome, seul un point du plan reste extérieur à toutes les (C_n).

3° Si cette substitution se ramène à la forme canonique où $R(Z) = Z^{\pm k}$ (K entier positif), deux points seulement restent extérieurs à toutes les (C_n).

Dans tous les cas, le voisinage de l'origine sera certainement recouvert une deuxième fois par une certaine (C_n). Donc $Z_n = R_n(Z)$ transforme (C_0) en (C_n) recouvrant deux fois au moins l'origine. Par suite, si (C_0) tout entière est recouverte deux fois par (C_n) il est clair que

$$Z_{2n} = R_{2n}(Z) = R_n[R_n(Z)]$$

transformera (C_0) en une aire (C_{2n}) qui recouvrira quatre fois au moins (C_0), l'aire (C_{3n}) recouvrira au moins 2^3 fois (C_0)..., $(C_{\mu n})$ recouvrira au moins 2^μ fois (C_0). Or on peut toujours supposer que (C_n) recouvre deux fois au moins (C_0) tout entière, en remplaçant au besoin (C_0) par une de ses antécédentes (C_{-i}) (antécédentes qui tendant vers zéro sont, à partir d'un certain indice, toutes recouvertes deux fois au moins par (C_n)] et R_n par R_{n+i}.

Ceci montre que *le nombre de feuillets de* (C_n) *grandit indéfiniment avec n et que sur chaque feuillet tout point est recouvert dans le cas général* [1]. C'est seulement dans les cas 2° et 3° que, sur chaque feuillet, un ou deux points restent extérieurs aux (C_n), ces points exceptionnels, d'ailleurs les mêmes pour tous les feuillets, étant ceux qu'on a signalés plus haut. Enfin, les frontières des aires (C_n) consécutives n'ont jamais de point commun.

Ces aires (C_n) sont de celles auxquelles peut s'appliquer la méthode rappelée au n° 8 du présent Mémoire.

13. *Le domaine* D(Z), *des valeurs prises par* $Z = f(z)$ *dans* $d(z)$, *est la limite de* C_n *pour* $n = \infty$. C'est une surface de Riemann Σ à une infinité dénombrable de feuillets. Et sur chaque feuillet *de numéro fini* tout point est recouvert dans le cas général et c'est un point ordinaire ou de ramification d'ordre fini. Dans le cas où $Z_1 = R(Z)$ se ramène au cas du polynome, un seul point est extérieur à tous les feuillets de Σ, et dans le cas où $Z_1 = R(Z)$ se ramène à $Z_1 = Z^{\pm k}$, deux points seulement restent extérieurs à tous les feuillets de Σ. Dans ces deux derniers cas, le ou les points exceptionnels sont des points frontières de Σ, sur chaque feuillet de Σ. Il peut cependant arriver que l'on puisse décrire sur Σ un chemin continu dont la projection sur le plan Z ait pour limite *un point* ζ, de façon que le chemin, considéré sur Σ, passe sur des feuillets successifs de Σ dont le numéro soit de plus en plus élevé et tende vers l'infini. On en verra des exemples simples dans une étude plus détaillée de Σ que nous espérons avoir l'occasion de faire ailleurs. Le point ζ est alors, pour la fonction $z = \varphi(Z)$, inverse de $Z = f(z)$, un point *transcendant non directement critique*, limite de points critiques algébriques, pour employer les dénominations de M. Iversen (*Thèse*, § VII et VIII), tandis qu'il existe une infinité de branches de $\varphi(Z)$ finies au point ζ, et pour lesquelles ζ est un point ordinaire ou un point critique algébrique.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que Σ *ne dépend*

---

[1] D'ailleurs, en vertu des principes observés, les feuillets successifs qui recouvrent un point Z sont numérotés dans un ordre croissant.

pas du domaine initial (C_0). En effet, les domaines antécédents (C_{-1}), (C_{-2}), ... sont emboîtés l'un dans l'autre et tendent vers O. Si l'on remplace (C_0) par un quelconque (C_{-i}), l'itération indéfinie de (C_{-i}) redonnera Σ. Remplaçons C_0 par un cercle de rayon plus petit, ou par une courbe fermée quelconque Γ_0, intérieure, entourant o et délimitant une aire (Γ_0); il est clair que, (Γ_0) étant contenue dans (C_0), donnera par itération des aires (Γ_n) contenues dans (C_n), donc la limite des (Γ_n) sera contenue dans Σ. Mais (Γ_0) contenant (C_{-i}) pour une certaine valeur de i, (Γ_n) contiendra (C_{-i+n}), et il est clair aussi que la limite des (Γ_n) contiendra Σ, limite des aires itérées de (C_{-i}). La limite des (Γ_n) sera donc identique à Σ. Le raisonnement serait le même si (Γ_0) contenait (C_0), car à partir d'un certain rang i il serait contenu dans (C_i).

14. Le plan pointé $d(z)$ et la surface Σ se correspondent analytiquement d'une façon biunivoque par $Z=f(z)$. La fonction $z=\varphi(Z)$, inverse de $Z=f(z)$, doit donc fournir une représentation conforme de Σ sur le plan pointé z. Ceci suffit à la définir.

Σ étant, en effet, la surface de Riemann trouvée au n° 13, comme limite des aires (C_n), soit $\Phi(Z)$ la fonction, nulle au point O du premier feuillet de Σ, telle que $\Phi'(o)=1$ et qui fournit la représentation conforme de Σ sur une aire du plan z. Pour la trouver, on opère comme au n° 8. Soit $\Phi_n(Z)$ la fonction fournissant la représentation conforme de (C_n) sur un cercle du plan z de façon que

$$\Phi_n(o)=o \qquad \text{et} \qquad \Phi'_n(o)=1.$$

Au point O du premier feuillet de toutes les C_n correspondra toujours l'origine $z=o$.

On a évidemment $\Phi_0(Z)=Z$, puisque (C_0) est un cercle de centre O et (C_0) se représente sur un cercle égal Γ_0 du plan z par $z=\Phi_0(Z)=Z$.

Puisque (C_1) se déduit de (C_0) par $[Z\,|\,R(Z)]$, il est visible que (C_1) se transforme en C_0 par $[Z\,|\,R_{-1}(Z)]$, $R_{-1}(Z)$ étant la branche de la fonction inverse de $R(Z)$ nulle en O et holomorphe dans (C_0). Mais $R'_{-1}(O)=\frac{1}{s}$. Par conséquent,

$$z=\Phi_1(Z)=sR_{-1}(Z)$$

est une fonction uniforme et régulière dans (C_1) qui transforme

(C_1) en un cercle (sC_0) et telle que $\Phi'_1(o) = 1$. C'est donc la fonction qui fournit la représentation conforme de (C_1) sur un cercle du plan z qui n'est autre que le cercle $s\Gamma_0$ dont les points se déduisent de ceux de Γ_0 en les multipliant par s.

En raisonnant de même, on verra que

$$R_{-2}(Z) = R_{-1}[R_{-1}(Z)]$$

est une fonction uniforme dans (C_2) qui transforme (C_2) en (C_0)

$$R_{-2}(o) = o \qquad \text{et} \qquad R'_{-2}(o) = \frac{1}{s^2}.$$

Donc

$$z = \Phi_2(Z) = s^2 R_{-2}(Z)$$

est une fonction nulle en o, $\Phi'_2(o) = 1$ qui fournit la représentation conforme de (C_2) sur le cercle $s^2\Gamma_0$ du plan z. D'une façon générale il est clair que la branche nulle en O, de la fonction inverse $R_{-n}(Z)$ de l'itérée $n^{\text{ième}}$ de $R(Z)$ sera uniforme et analytique sur (C_n) et transforme (C_n) en (C_0) $R'_{-n}(o) = \frac{1}{s^n}$. Donc

$$z = \Phi_n(Z) = s^n R_{-n}(Z)$$

fournit la représentation conforme de (C_n) sur le cercle $s^n\Gamma_0$ du plan z et l'on a

$$\Phi_n(o) = o, \qquad \Phi'_n(o) = 1.$$

D'après les considérations du n° 8, les $\Phi_n(Z)$ auront une limite $\Phi(Z)$ qui sera atteinte uniformément dans toute aire intérieure à Σ, c'est-à-dire, en particulier, dans toute aire (C_n) et $z = \Phi(Z)$ fournira la représentation conforme de Σ sur le plan z pointé à l'infini puisque le cercle $s^n\Gamma_0$ correspondant à (C_n) devient infini avec n.

Conclusion. — La suite de fonctions $s^n R_{-n}(Z)$ converge uniformément dans toute aire intérieure à Σ définie au n° 13 (1). Et sa limite fournit la représentation de Σ sur le plan pointé.

---

(1) Il n'est pas difficile de prouver directement qu'elle converge uniformément dans C_0 par exemple, mais la méthode précédente a l'avantage de donner un sens géométrique intuitif aux fonctions de la suite.

Considérant les fonctions inverses

$$Z = f_0(z) = z, \quad f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = 1;$$
$$Z = f_1(z) = R\left(\frac{z}{s}\right);$$
$$Z = f_2(z) = R_2\left(\frac{z}{s^2}\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$Z = f_u(z) = R_n\left(\frac{z}{s^n}\right), \quad f_u(0) = 0, \quad f_n'(0) = 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Elles transforment respectivement les cercles Γ_0, $s\Gamma_0$, $s^2\Gamma_0$, ..., $s^n\Gamma_0$, ... en C_0, C_1, ..., C_n, ...

La suite des $f_n(z)$ est uniformément convergente dans toute aire finie du plan z et sa limite est la fonction $Z = f(z)$ fonction inverse de $z = \varphi(Z)$. $f(z)$ est une fonction méromorphe dans le plan z, l'infini est son point singulier essentiel.

15. En vertu de sa définition même comme limite des (C_n), il est clair que Σ reste invariante par la transformation $[Z \mid R(Z)]$. *Sur* Σ cette relation établit une transformation *biunivoque* qui transforme (C_n) en (C_{n+1}) et laisse *le seul point* O *du premier feuillet invariable*. Posant

$$Z = f(z) \quad \text{et} \quad Z_1 = R(Z) = f(z_1),$$

considérons les points z et z_1 du plan z qui sont les images dans le plan z des points Z et Z_1 DE Σ, qui se correspondent dans la transformation biunivoque précédente. Il est visible que, lorsque z décrit le plan pointé, z_1 en est une fonction uniforme et d'ailleurs analytique : il en est de même pour z considéré comme fonction de z_1. Lorsque z vient à l'origine, z_1 y vient aussi puisque les points Z et Z_1 correspondants de Σ viennent alors se confondre au point O du premier feuillet. $z_1(z)$ et $z(z_1)$ sont des fonctions holomorphes dans tout le plan, sauf peut-être à l'infini, et elles s'annulent à l'origine. On en conclut $z_1 = \lambda z$, λ étant un coefficient constant. La fonction $f(z)$ satisfait alors, dans le plan z, à l'équation fonctionnelle

$$f(\lambda z) = R[f(z)],$$

et la considération des valeurs des dérivées de deux membres pour $z = 0$ prouve que $\lambda = s$, $f(z)$ est donc bien la fonction cherchée, solution unique, holomorphe en o, de l'équation

$$f(sz) = R[f(z)],$$

pour laquelle

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Son inverse $\Phi(Z)$ satisfait à la relation

$$\Phi[R(Z)] = s\Phi(Z),$$

et c'est la solution cherchée de l'équation de Schröder indiquée au début de ce Chapitre.

On a ainsi trouvé à la fois $f(z)$ et $\Phi(Z)$ et leurs domaines d'existence.

16. Une courte indication suffira maintenant pour avoir toutes les solutions régulières en $z = 0$ de l'équation

$$F_k(\lambda z) = R[F_k(z)],$$

pour lesquelles

$$F_k(z) = z^k + \ldots (k > 1),$$

car on peut toujours supposer égal à 1 le premier coefficient de $F_k(z)$ sans restreindre la généralité. D'abord il faudra prendre $\lambda = s^{\frac{1}{k}}$. Quant au domaine des valeurs de la fonction $F_k(z)$ il s'obtiendra en remplaçant le cercle (C_0) par une portion de surface de Riemann (σ_0) à k feuillets tous ramifiés en $Z = 0$, limitée par un cercle de centre O parcouru k fois dans le même sens et en soumettant (σ_0) à une infinité d'itérations successives par $[Z | R(Z)]$ et ses puissances. On se rend compte aisément que la surface de Riemann (Σ_k), limite des surfaces (σ_n) itérées de (σ_0), peut se représenter sur le plan z d'abord en faisant sur un plan z_k la représentation conforme de Σ du nº 15 par $z_k = \Phi(Z)$, puis en faisant la transformation $z = z_k^{\frac{1}{k}}$ parce que, en somme, Σ_k se déduit de Σ par la transformation $Z_k = Z^k$ [comme (σ_0) de (C_0)]. Il est alors visible que

$$F_k(z) = f(z^k),$$

$f(z)$ étant la fonction de Poincaré déterminée au nº 15. Corrélativement, la fonction inverse $\Phi_k(Z)$ a un point critique algébrique d'ordre $k - 1$ en $Z = 0$ et elle vérifie

$$\Phi_k[R(Z)] = s^{\frac{1}{k}}\Phi_k(Z).$$

On a d'ailleurs

$$\Phi_k(Z) = [\Phi(Z)]^{\frac{1}{k}}.$$

On aurait eu d'autres solutions holomorphes en O, de l'équation de Schröder en prenant

$$\Phi_{\frac{1}{k}}(Z) = [\Phi(Z)]^k.$$

Ce sont les inverses de fonctions

$$F_{\frac{1}{k}}(z) = f\left(z^{\frac{1}{k}}\right),$$

qui ne sont plus uniformes, mais n'ont à distance finie qu'un point critique algébrique, le point $z = 0$.

On a les relations

$$F_{\frac{1}{k}}(s^k z) = R[F_{\frac{1}{k}}(z)]$$

et

$$\Phi_{\frac{1}{k}}[R(Z)] = s^k\Phi_{\frac{1}{k}}(Z).$$

On déterminera ailleurs [1] des solutions de l'équation

$$F(\lambda z) = R[F(z)],$$

pour lesquelles $z = 0$ est un point singulier essentiel.

CHAPITRE III.

L'ÉQUATION D'ABEL $\Phi[R(Z)] = \Phi(Z) + a$ ET L'ÉQUATION ASSOCIÉE $f(z + a) = R[f(z)]$.

17. Comme au n° 9 du Chapitre II, les fonctions $f(z)$ et $\varphi(Z)$ sont inverses l'une de l'autre. Le problème résolu au Chapitre II

---

[1] *Voir* des indications sur cette question dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, p. 800 : *Sur la transformation des substitutions rationnelles en substitutions linéaires*, § 1.

revient à transformer, grâce à la substitution $Z = f(z)$, la substitution *rationnelle* $Z_1 = R(Z)$ en une substitution *linéaire* $z_1 = sz$. Mais il a fallu supposer que la substitution rationnelle avait un *point double répulsif* $[\alpha = R(\alpha); |s = R'(\alpha)| > 1]$. Ce point double a servi d'origine dans le plan Z. La substitution linéaire admet alors également un point double répulsif.

Or il résulte de l'étude de l'itération des fractions rationnelles (*voir* Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1918, et spécialement *note additionnelle* n° **118**) que, si une certaine itérée $[Z | R_k(Z)]$ a toujours des points doubles répulsifs, la substitution $[Z | R(Z)]$ elle-même peut ne pas en avoir, mais on voit aisément qu'elle admet alors un point *double indifférent*, c'est-à-dire un point α pour lequel

$$\alpha = R(\alpha) \qquad \text{et} \qquad R'(\alpha) = 1.$$

On va dans ce cas prouver que la méthode générale, indiquée au Chapitre I et appliquée au Chapitre II, permet de déterminer des solutions de l'équation d'Abel et de l'équation associée, c'est-à-dire, par la substitution $Z = f(z)$, de transformer la substitution rationnelle $Z_1 = R(Z)$ en une substitution linéaire $z_1 = z + a$ où les deux points doubles sont confondus en un point *double indifférent* (¹) à l'infini.

Signalons que l'équation d'Abel et son associée ont été étudiées par M. Fatou dans son Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome **47**, à l'aide des méthodes élémentaires de la théorie des fonctions.

18. On va s'occuper ici du cas le plus simple : celui où $R'(\alpha)$ étant $= 1$, on a $R''(\alpha) \neq 0$, et rappeler d'abord quelques propriétés établies dans le Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1918, *Sur l'itération d'une fraction rationnelle au voisinage d'un point double indifférent* (*voir* 4ᵉ Partie, nᵒˢ **104** à **108**). Soit une demi-droite quelconque issue de α; on peut, en général,

(¹) Si en effet on pose $z = \frac{1}{t}$, $z_1 = \frac{1}{t_1}$, on aura $t_1 = \frac{t}{1 + at}$ et l'origine, transformée du point double $z = \infty$, est un point double indifférent de $t_1 = \rho(t)$ puisque $t_1 = t - at^2 + \ldots$, $\rho(0) = 0$ et $\rho'(0) = 1$.

trouver un segment de cette demi-droite terminé d'un côté en α et tel que, lorsque le centre d'un cercle (C_0) passant par α est choisi sur ce segment, l'aire antécédente (C_{-1}) de l'aire (C_0), c'est-à-dire transformée de (C_0) par la substitution inverse $[Z | R_{-1}(Z)]$, est une aire simple intérieure à (C_0), dont le contour est une courbe fermée C_{-1} intérieure à C_0 qu'elle touche au seul point α. Pour préciser, le segment signalé existe sur toute demi-droite issue de α, excepté une seule direction exceptionnelle *bien déterminée par la valeur de* $R''(\alpha)$, et qui est telle que le segment *tende vers zéro* lorsque la direction non exceptionnelle sur laquelle il est porté tend vers la direction exceptionnelle. Bien entendu, $R'(\alpha)$ étant $= 1$, il est clair que dans toute une région entourant α et par conséquent dans tous les cercles (C_0) précédents, la branche de fonction $R_{-1}(Z)$ égale à α au point α est uniforme.

19. Choisissons une direction non exceptionnelle et un cercle (C_0) qui contiendra sa courbe antécédente (C_{-1}). L'aire conséquente (C_1) sera une aire simple à un seul feuillet limitée par une courbe analytique fermée (C_1) contenant (C_0), pourvu que (C_0) soit assez petit. C_0 et C_1 seront tangents en α et ce sera leur seul point commun. De même (C_2), transformée de (C_1) par $[Z | R(Z)]$, sera une aire simple contenant (C_1) et les frontières seront tangentes en α. Les aires itérées successives iront constamment en s'agrandissant. Leurs frontières seront tangentes en α. A partir d'un certain indice (p) ces aires s'étaleront sur plusieurs feuillets reliés entre eux en des points de ramification qui, ainsi qu'on l'a expliqué aux n^{os} 10 et suivants, sont les conséquents successifs des racines de l'équation $R'(Z) = 0$. On les construira de proche en proche par le procédé de prolongement analytique indiqué aux n^{os} 10 et suivants du Chapitre II, l'aire (C_0) et les aires $(C_1), \ldots, (C_{p-1})$ étant supposées tracées sur le premier feuillet, puis introduisant de nouveaux feuillets à partir de (C_p). Toutes ces aires (C_n) seront simplement connexes, à un nombre fini de feuillets, et compteront un nombre fini de points de ramification intérieurs. Elles seront contenues chacune dans la suivante et leurs frontières n'auront en commun que le point α du premier feuillet. Par $[Z \; R(Z)]$ chacune se transforme dans la suivante.

L'étude de (C_n) faite dans le Mémoire du *Journal de Mathématique*, 1918, déjà cité prouve que :

1° Dans le cas où $[Z \mid R(Z)]$ ne se ramène pas à un polynome, le nombre des feuillets de (C_n) augmente indéfiniment avec n, tout point de chaque feuillet étant recouvert à partir d'une certaine (C_n), exception faite pour le point α, *du premier feuillet*, qui est point frontière pour toutes les (C_n). [Le point α, sur les autres feuillets, est un point intérieur (¹).]

2° Dans le cas où $[Z \mid R(Z)]$ se ramène à un polynome, le nombre de feuillets de (C_n) devient infini avec n, mais un point du plan complet et un seul reste extérieur sur tous les feuillets à (C_n) quel que soit n. ($Z_1 = Z^{\pm k}$ n'est pas à considérer ici, car il n'y aurait pas alors de point double indifférent.)

La limite de (C_n), pour $n = \infty$, sera une surface de Riemann simplement connexe Σ à une infinité de feuillets, sur laquelle α, du premier feuillet, est un point *frontière*. Les (C_n) qui la définissent satisfont aux conditions du n° **8**; on va prouver que Σ est représentable sur un plan pointé, tout comme la surface de Riemann du n° **13**.

20. A cet effet, nous adopterons pour la substitution $Z_1 = R(Z)$ une forme canonique en supposant d'abord $R''(\alpha)$ réel et négatif (ceci peut être réalisé par une rotation des axes de coordonnées), ensuite en envoyant α à l'infini par une même transformation homographique sur Z et Z_1. On a alors la forme canonique

$$Z_1 = Z + a + \rho(Z) \qquad (a \text{ réel et positif}),$$

$\rho(Z)$ étant une fonction rationnelle, nulle à l'infini, dont le développement de Laurent serait

$$\rho(Z) = \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z} + \cdots.$$

(¹) Il faut observer ici que, pour un certain indice k, (C_k) contiendra à *son intérieur* une racine au moins de $R(Z) = \alpha$, par conséquent (C_{k+1}) recouvrira α comme point *intérieur* à un ou plusieurs feuillets, mais ces feuillets recevront successivement les n°s 2, 3, ..., le point α du premier feuillet ayant déjà été obtenu comme point frontière de (C_0), (C_1)....

Ici la direction exceptionnelle sera celle des parallèles à l'axe réel dans le sens négatif de cet axe réel. Pour cercle (C_0) nous pourrons choisir un demi-plan (P_0) situé *à gauche* d'une demi-droite $\mathcal{R}(Z) = \delta$, δ nombre réel, qui peut être positif ou négatif, devant être inférieur à une certaine limite afin que l'aire (P_1), transformée du demi-plan (P_0) $[\mathcal{R}(Z) \leqq \delta]$, contienne à son intérieur le demi-plan (P_0). Les aires (P_n) successives sont emboîtées l'une dans l'autre, et, sur chacune d'elles, l'infini est un point frontière.

Choisissons sur le premier feuillet un point déterminé ω, intérieur à (P_0) et faisons la représentation conforme de l'aire (P_n) sur un cercle du plan ζ, ayant son centre à l'origine, de façon que le point ω de (P_n) devienne l'origine, et de façon que la fonction $\zeta = \Phi_n(Z)$, fournissant la représentation, ait sa dérivée égale à 1 au point ω

$$\Phi_n(\omega) = 0, \qquad \Phi'_n(\omega) = 1$$

Nous allons, de proche en proche, former les $\Phi_n(Z)$. Si l'on prend d'abord $z = \varphi_0(Z) = Z$, P_0 est transformé en Π_0 demi-plan z défini par $\mathcal{R}(z) \leqq \delta$. En prenant

$$\Phi_0 = \frac{\varphi_0 - \omega}{\varphi_0 - \omega'_0}(\omega - \omega'_0),$$

on verra immédiatement que

$$\Phi_0(\omega) = 0, \qquad \Phi'_0(\omega) = 1,$$

et P_0 est transformé en un cercle Γ_0 de centre O de rayon $|\omega - \omega'_0|$. {On a choisi ω'_0 symétrique de ω par rapport à la droite $\mathcal{R}(Z) = \delta$, c'est-à-dire $\omega'_0 = \omega + 2[\delta - \mathcal{R}(\omega)]$.}

D'une façon générale, la branche de fonction $R_{-n}(Z)$ [fonction inverse de l'itérée $R_n(Z)$], qui devient infinie avec Z, est, par la définition même de (P_n), une fonction uniforme sur (P_n), et lorsque Z décrit (P_n), le point $R_{-n}(Z)$ décrit (P_0); cela résulte simplement de ce que lorsque Z décrit P_0, le point $P_n(Z)$ décrit (P_n). La substitution $[Z | R_{-n}(Z)]$ transforme donc (P_n) en (P_0), mais elle altère ω. Elle transforme ω en ω_{-n} qui s'obtient en appliquant n fois de suite à ω la substitution $[Z | R_{-1}(Z)]$ qui est uniforme dans (P_0) et pour laquelle l'infini est un point double. ω_{-n} est *antécédent d'ordre n* de ω, dans l'itération $[Z | R(Z)]$, par la branche de R_{-1} infinie à l'infini.

Considérons alors la fonction

$$z = \varphi_n(Z) = R_{-n}(Z) - \omega_{-n} + \omega.$$

Elle transformera (P_n) en un demi-plan (Π_n) du plan z, défini par

$$\mathcal{R}(z) \leqq \delta - \mathcal{R}(\omega_{-n}) + \mathcal{R}(\omega) = \delta_n.$$

Toutefois

$$\varphi_n(\omega) = \omega \qquad \text{et} \qquad \varphi'_n(\omega) = R'_{-n}(\omega).$$

Considérons enfin la fonction

$$\zeta = \Phi_n(Z) = \frac{\varphi_n(Z) - \omega}{\varphi_n(Z) - \omega'_n} \, \frac{\omega - \omega'_n}{\varphi'_n(\omega)};$$

ω'_n est le point symétrique de ω par rapport à la droite $\mathcal{R}(z) = \delta_n$, c'est-à-dire

$$\omega'_n = \omega + 2[\delta_n - \mathcal{R}(\omega)].$$

Elle fera correspondre au demi-plan $\mathcal{R}[\varphi_n(Z)] \leqq \delta_n$ un cercle Γ_n de centre O de rayon $\left|\dfrac{\omega - \omega'_n}{\varphi'_n(\omega)}\right|$ dans le plan ζ.

On a

$$\Phi_n(\omega) = 0, \qquad \Phi'_n(\omega) = 1.$$

La fonction $\Phi_n(Z)$ fournit la représentation conforme de (P_n) sur un cercle du plan ζ dans les conditions réclamées au point ω.

La suite des fonctions $\Phi_n(Z)$ converge uniformément dans toute aire intérieure à Σ et sa limite $\Phi(Z)$ fournit la représentation conforme de Σ sur un cercle du plan ζ ayant son centre en O ou bien sur le plan ζ, pointé à l'infini, selon que le rayon de Γ_n a une limite finie ou devient infini. On va montrer que cette limite est infinie, d'où il résultera que Σ *est représentable sur un plan pointé.*

21. On va en effet prouver d'une part que $\omega'_n - \omega$ devient infini et d'autre part que $\varphi'_n(\omega)$ a une limite finie $\neq 0$.

On a

$$\omega'_n - \omega = 2[\delta_n - \mathcal{R}(\omega)] = 2[\delta - \mathcal{R}(\omega_{-n})];$$

il faut donc étudier ω_{-n} pour $n = \infty$. On va voir que ω_{-n} devient infini et que sa valeur asymptotique est $-na$; $\dfrac{\omega_{-n}}{-na}$ tend vers l'unité lorsque n devient infini. Donc $\mathcal{R}(\omega_{-n})$ tend vers $-\infty$. Par suite, $\omega'_n - \omega$ tend vers $+\infty$.

D'autre part,

$$\varphi'_n(\omega) = R'_{-n}(\omega).$$

Il faut prouver que $R'_{-n}(\omega)$ a une limite finie $\neq 0$ lorsque n devient infini. Ce fait va résulter précisément de ce que $\frac{\omega_{-n}}{-na}$ a pour limite l'unité.

En effet, la branche de $R_{-1}(Z)$ uniforme dans (P_0) et infinie à l'infini peut s'y développer par la formule

$$R_{-1}(Z) = Z - a + \psi(Z),$$

$\psi(Z)$ étant nulle à l'infini et holomorphe dans (P_0) (il n'y a qu'à supposer δ assez petit pour cela). L'étude de l'itération de $R_{-1}(Z)$, faite au Mémoire déjà cité, prouve que (P_{-1}) transformée de (P_0) par $[Z \mid R_{-1}(Z)]$ est une aire intérieure à (P_0) et s'étendant à l'infini du côté de l'axe réel négatif. De même (P_{-2}) (deuxième antécédente de P_0) est contenue dans (P_{-1}), etc. D'une façon générale (P_{-n}) contient $[P_{-(n+1)}]$ et lorsque n devient infini, l'aire (P_{-n}) s'éloigne à l'infini et admet pour seul point limite le point à l'infini. ω_{-n} tend donc vers l'infini quand n devient infini :

$$\begin{aligned}
\omega_{-1} &= \omega &&- a + \psi(\omega),\\
\omega_{-2} &= \omega_{-1} &&- a + \psi(\omega_{-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\omega_{-n} &= \omega_{-(n-1)} &&- a + \psi[\omega_{-(n-1)}].
\end{aligned}$$

Donc, en ajoutant,

$$\omega_{-n} = \omega - na + [\psi(\omega) + \psi(\omega_{-1}) \dots + \psi(\omega_{(n-1)})],$$

$$\frac{\omega_{-n}}{-na} = 1 + \frac{-\omega}{na} - \frac{\psi(\omega) + \psi(\omega_{-1}) + \dots + \psi[\omega_{-(n-1)}]}{na}.$$

Il suffit de prouver que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n}$$

tend vers zéro pour démontrer que $\frac{\omega_{-n}}{-na}$ a pour limite l'unité (on sous-entend $\omega_0 = \omega$).

Or ω_{-i} devenant infini avec i, $\psi(\omega_{-i})$ tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$; on peut donc choisir un entier fixe p tel que pour $i \geqq p$ on ait

$$|\psi(\omega_{-i})| < \varepsilon,$$

ε nombre positif donné *a priori* arbitrairement petit.

On a alors si $n > p$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n} = \sum_{i=0}^{i=p-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n} + \sum_{i=p}^{n-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n}.$$

A cause du choix de p, on a

$$\left| \sum_{i=p}^{n-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n} \right| < \frac{n-p}{n} \varepsilon < \varepsilon.$$

p étant ainsi choisi on peut choisir n assez grand (et $> p$) de façon que

$$\left| \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n} \right| < \varepsilon,$$

car le premier membre est une somme de p termes dont chacun devient nul avec $\frac{1}{n}$.

On peut donc choisir n assez grand pour que

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\psi(\omega_{-i})}{n} \right| < 2\varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit.

Donc le premier membre de cette inégalité tend bien vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il en résulte que $\frac{\omega_{-n}}{-na}$ tend vers l'unité.

22. Montrons que $\varphi'_n(\omega) = R'_{-n}(\omega)$ a une limite finie et différente de zéro.

On a

$$R_{-n}(\omega) = R_{-1}[R_{-1}[\ldots R_{-1}(\omega)]\ldots];$$

par conséquent,

$$R'_{-n}(\omega) = R'_{-1}(\omega) - R'_{-1}(\omega_{-1})\ldots)R'_{-1}(\omega_{-(n-1)}).$$

D'autre part, $R'_{-1}(Z) = 1 + \psi'(Z)$ pour tout point Z de (P_0). Tous les ω_{-i} sont dans (P_0); on a donc

$$R'_{-n}(\omega) = \prod_{i=0}^{n-1} [1 + \psi'(\omega_{-i})].$$

Lorsque n devient infini, $R'_{-n}(\omega)$ a une limite finie et $\neq 0$ si la série

$$\sum_0^\infty |\psi'(\omega_{-n})|$$

est convergente.

Or, n devenant infini, ω_{-n} devient infini et reste dans (P_0); dans (P_0) on a

$$\psi(Z) = \frac{b_1}{Z^1} + \frac{b_2}{Z^2} + \ldots,$$

$$\psi'(Z) = -\frac{b_1}{Z^2} + \ldots,$$

c'est-à-dire que

$$\left| \frac{\psi'(Z)}{\frac{1}{Z^2}} \right|$$

reste borné quand Z devient infini en restant dans (P_0)

$$\left| \frac{\psi'(Z)}{\frac{1}{Z^2}} \right| < A;$$

comme, d'autre part, $\frac{\omega_{-n}}{-na}$ tend vers l'unité, on aura pour $n > n_0$

$$\left| \frac{1}{\omega_{-n}} \right| < \frac{1+\eta}{na},$$

η étant très petit et positif; par suite, pour $n > n_0$, on aura

$$|\psi'(\omega_{-n})| < \frac{A}{|\omega_{-n}|^2} < \frac{B}{n^2},$$

B étant indépendant de n.

La série

$$\sum_0^\infty |\psi'(\omega_{-n})|$$

est donc convergente; il en résulte que $R'_{-n}(\omega)$ a une limite finie et $\neq 0$ quand n devient infini.

On a ainsi prouvé que $\left|\frac{\omega'_n - \omega}{\varphi'_n(\omega)}\right|$ devient infini avec n, c'est-à-dire que Σ est représentable sur le plan ζ, pointé à l'infini, par $\zeta = \Phi(Z)$, Φ étant la limite des Φ_n, avec

$$\Phi_n(\omega) = 0, \qquad \Phi'_n(\omega) = 1.$$

On aura

$$\Phi(\omega) = 0, \qquad \Phi'_n(\omega) = 1.$$

23. Revenons à la suite des fonctions $z = \varphi_n(Z)$.

La relation entre φ_n et Φ_n, résolue par rapport à φ_n, donne

$$\varphi_n = \frac{\omega'_n(\Phi_n + \omega) - \omega^2}{\omega'_n + \Phi_n - \omega}.$$

Lorsque n devient infini, ω'_n devient infini comme $(\omega'_n - \omega)$. Et dans tout domaine intérieur à Σ, Φ_n converge uniformément vers $\Phi(Z)$, qui est finie; on voit donc que φ_n converge uniformément vers une limite

$$\varphi(Z) = \Phi(Z) + \omega.$$

La fonction $z = \varphi(Z)$ fournit donc une représentation conforme de Σ sur le plan z pointé à l'infini, dans laquelle, au point ω de Σ, correspond le point $z = \omega$.

Les fonctions $\Phi_n(Z)$ nous ont servi de simple intermédiaire pour appliquer le procédé classique du n° 8; *on voit que la suite des*

$$\varphi_n(Z) = R_{-n}(Z) - \omega_{-n} + \omega$$

a une limite uniformément atteinte dans tout domaine fermé intérieur à Σ [*et même dans tout domaine fermé* (P_i) *dont tous les points sont intérieurs à* Σ *sauf un point frontière confondu avec le point double indifférent* $\alpha = \infty$ *du premier feuillet qui est point frontière de* Σ] *et cette limite* $z = \varphi(Z)$ *fournit la représentation conforme cherchée.*

24. Considérant les fonctions inverses

$$\begin{aligned}
&Z = f_0(z) = z;\\
&Z = f_1(z) = R(z + h_1), && h_1 = \omega_{-1} - \omega;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&Z = f_n(z) = R_n(z + h_n), && h_n = \omega_{-n} - \omega;
\end{aligned}$$

elles transforment les demi-plans (Π_0), (Π_1), ..., (Π_n), ... du plan z en (P_0), (P_1), ..., (P_n), ... et de manière que le point à l'infini du plan z corresponde au point $\alpha = \infty$, du premier feuillet, de Σ, et que le point $z = \omega$ devienne le point ω du premier feuillet de Σ. La suite des $f_n(z)$ converge uniformément dans tout domaine fermé à distance finie du plan z et même dans tout demi-plan Π_n, ou dans tout demi-plan situé à gauche d'une perpendiculaire à l'axe réel. La limite est la fonction $Z = f(z)$, fonction inverse de $z = \varphi(Z)$; c'est une fonction méromorphe dans le plan z $f(\omega) = \omega$, et qui tend vers l'*infini* (valeur correspondant au point double indifférent $\alpha = \infty$ de Σ) quand z tend vers l'infini sur un chemin pour lequel $\mathcal{R}(z)$ reste inférieur à une limite fixe. L'infini est, pour $f(z)$, un point singulier essentiel.

23. D'après le mode de génération de Σ, la substitution $[Z \mid R(Z)]$ envisagée sur Σ laisse Σ invariante, elle y transforme simplement (P_n) en (P_{n+1}). C'est une transformation *biunivoque* et analytique de Σ en elle-même, par laquelle aucun point intérieur à Σ ne reste invariant : cela résulte de ce que, dans la transformation de (P_0) en (P_1), aucun autre point que α du premier feuillet ne reste invariant. Ce point α du premier feuillet de Σ, point frontière de Σ, est le seul point de Σ qui reste invariant par $[Z \mid R(Z)]$. Considérons les points z et z_1 qui correspondent aux points Z et $Z_1 = R(Z)$ de Σ par la représentation conforme $[Z = f(z), Z_1 = f(z_1)]$; un raisonnement identique à celui déjà fait au n° 15 prouve que la substitution $(z \mid z_1)$ sera une transformation biunivoque et analytique du plan z pointé à l'infini, dans laquelle aucun point à distance finie ne reste invariable. C'est donc une substitution linéaire

$$z_1 = z + \lambda.$$

La fonction $\varphi(Z)$ satisfait donc à l'équation d'Abel

$$\varphi[R(Z)] = \varphi(Z) + \lambda,$$

et son inverse, à l'équation associée

$$f(z + \lambda) = R[f(z)].$$

On peut aisément prouver que $\lambda = a$. En effet,

$$\varphi_n(Z) = R_{-n}(Z) - \omega_{-n} + \omega$$

ayant pour limite $\varphi(Z)$ dans Σ, il est clair que

$$\varphi_n[R(Z)] = R_{-n}[R(Z)] - \omega_{-n} + \omega = R_{-(n-1)}(Z) - \omega_{-n} + \omega$$

aura pour limite, dans Σ, la fonction $\varphi[R(Z)]$. On peut écrire

$$\varphi_n[R(Z)] = [R_{-(n-1)}(Z) - \omega_{-(n-1)} + \omega] + [\omega_{-(n-1)} - \omega_{-n}].$$

Le premier crochet du deuxième membre n'est autre que $\varphi_{n-1}(z)$ et sa limite, dans Σ, est $\varphi(Z)$. On a d'autre part

$$\omega_{-(n-1)} = R(\omega_{-n}) = \omega_{-n} + a + \rho(\omega_{-n}),$$

et puisque ω_{-n} devient infini avec n, $\varphi(\omega_{-n})$ tend vers zéro, donc $[\omega_{-(n-1)} - \omega_{-n}]$ tend vers a.

On a donc, en passant à la limite, dans l'égalité précédente, la relation d'Abel

$$\varphi[R(Z)] = \varphi(Z) + a,$$

en tout point intérieur à Σ, et par conséquent

$$f(z + a) = R[f(z)],$$

en tout point z à distance finie.

Il resterait à étudier d'une manière plus précise l'allure de $f(z)$ à l'infini ou celle de $\varphi(Z)$ lorsque Z tend, sur Σ, vers le *point frontière* $\alpha = \infty$ sur un feuillet où ce point $\alpha = \infty$ est bien point frontière (par exemple le premier). Nous espérons y revenir ailleurs, n'ayant eu ici pour but que d'établir l'*existence* des solutions des équations fonctionnelles considérées à partir des surfaces de Riemann de leurs fonctions inverses.