BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 166-174
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__166_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'ABSCISSE DE CONVERGENCE DES SÉRIES DE DIRICHLET;

Par M. G. Valiron.

Soit

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

une série de Dirichlet, $s = \sigma + it$ étant la variable complexe. M. Cahen a donné une expression de l'abscisse de convergence valable lorsque cette abscisse est positive, des expressions valables dans tous les cas ont été données par divers auteurs, en particulier par MM. Knopp, Lindh, Kojima et Fujiwara [1].

On peut remarquer *a priori* que les séries pour lesquelles la suite λ_n satisfait à la condition

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} \log n\right) = 0 \tag{2}$$

peuvent s'étudier, au point de vue de la convergence, comme les

---

[1] *Voir* notamment *The Tôhoku Mathematical Journal*, t. 6, 9, 11. — M. Pincherle a donné une expression de l'abscisse de convergence valable lorsque cette abscisse est négative ou nulle (*Congrès de Rome*, 1908); cette expression a été retrouvée par M. Cotton (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1917).

séries entières, et que leur abscisse de convergence est donnée par la formule

$$(3)\qquad A = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \log |a_n|,$$

qui généralise celle de Cauchy-Hadamard. Cette propriété, qui découle de ce que la série

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-\lambda_n \alpha}$$

converge quel que soit le nombre positif α, conduit à rechercher dans le cas général une formule faisant également intervenir aussi peu de coefficients que possible.

1. On peut former d'une infinité de façons une suite d'entiers n_1, n_2, ..., n_p, ..., tels que les nombres λ_{n_p} jouissent de ces deux propriétés :

1° *On a*

$$(4)\qquad \lim_{p=\infty} \frac{\lambda_{n_{p+1}-1}}{\lambda_{n_p}} = 1;$$

2° *La série de terme général*

$$(5)\qquad u_p = e^{-\lambda_{n_p}\alpha}$$

converge quel que soit le nombre positif α.

En particulier, lorsque la condition (2) est réalisée, on peut prendre $n_p = p$, et l'on a $n_{p+1} - 1 = p$.

On obtient alors les deux propositions suivantes :

I. *L'abscisse de convergence absolue est donnée par la formule*

$$(6)\qquad B = \overline{\lim_{p=\infty}} \left(\frac{1}{\lambda_{n_p}} \log \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} |a_q| \right).$$

II. *Si l'on désigne par* $\bar{n}$ *le plus grand des nombres* n_p *qui sont inférieurs ou égaux à* n, *l'abscisse de convergence est*

$$(7)\qquad A = \overline{\lim_{n=\infty}} \left(\frac{1}{\lambda_n} \log \left| \sum_{\bar{n}}^{n} a_q \right| \right).$$

La proposition I se démontre directement sans difficultés, mais elle découle aussi de la propriété II qui se déduit d'un lemme bien connu d'Abel.

Désignons par L la valeur du second membre de l'égalité (7). Par définition de l'abscisse de convergence A, la série (1) converge pour $A + \varepsilon (\varepsilon > 0)$, donc les sommes

$$\sum_{\bar{n}}^{n} a_q e^{-\lambda_q(A+\varepsilon)}$$

ont un module inférieur à 1 pourvu que n soit assez grand. Comme la suite des nombres $e^{-\lambda_q(A+\varepsilon)}$ est monotone, le lemme en question d'Abel montre que

$$\left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q\right| = \left|\sum_{\bar{n}}^{n} \left(a_q e^{-\lambda_q(A+\varepsilon)}\right) e^{\lambda_q(A+\varepsilon)}\right|$$

est inférieur à l'un ou l'autre des deux nombres

$$e^{\lambda_n(A+\varepsilon)}, \quad 2 e^{\lambda_{\bar{n}}(A+\varepsilon)},$$

suivant que $A + \varepsilon$ est positif ou négatif. Dans le premier cas, nous obtenons de suite $L \leqq A + \varepsilon$; dans le second cas, nous avons

$$\frac{1}{\lambda_{\bar{n}}} \log \left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q\right| \leqq A + 2\varepsilon;$$

or, d'après la condition (4), $\frac{\lambda_n}{\lambda_{\bar{n}}}$ tend vers 1, nous arrivons donc à la même conclusion. ε étant arbitrairement petit, nous avons donc montré que

$$L \leqq A.$$

D'autre part, d'après la définition de L et la condition (4), nous avons, ε étant positif fixe,

$$\left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q\right| < e^{\lambda_{\bar{n}}\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

pourvu que n soit assez grand. Le lemme d'Abel donne alors

$$\delta_n = \left| \sum_{\bar{n}}^{n} a_q e^{-\lambda_q(L+\varepsilon)} \right| < 2 e^{\lambda_{\bar{n}}\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)} e^{-\lambda_{n'}(L+\varepsilon)},$$

n' étant égal à $\bar{n}$ si $L+\varepsilon \geqq 0$ et à n si $L+\varepsilon \leqq 0$. Dans le premier cas, le second membre est moindre que $2e^{-\lambda_{\bar{n}}\frac{\varepsilon}{2}}$; dans le second cas, il est inférieur à

$$2e^{-\lambda_{\bar{n}} k \frac{\varepsilon}{2}} \qquad \left[k = 1 + \frac{2}{\varepsilon}(L+\varepsilon)\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{\bar{n}}}\right)\right],$$

on peut prendre n assez grand pour que k soit supérieur à $\frac{1}{2}$ puisque $\frac{\lambda_n}{\lambda_{\bar{n}}}$ tend vers 1; on a donc dans les deux cas, à partir d'une valeur N de n,

$$\delta_n < e^{-\lambda_{\bar{n}}\frac{\varepsilon}{4}}.$$

En utilisant la propriété de convergence de la série (5) pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{4}$, nous avons pour $m > N$

$$\left| \sum_{m}^{r} a_q e^{-\lambda_q(L+\varepsilon)} \right| \leqq 2\,\delta_{n_{p+1}-1} + \delta_{n_{p+2}-1} + \ldots$$
$$+ \delta_{n_{p'}-1} + \delta_{n_{p'+1}-1} < 2(u_p + u_{p+1} + \ldots)$$
$$(n_p = \bar{m}, \quad n_{p'} = \bar{r}),$$

ce qui montre que la série (1) converge pour $L+\varepsilon$, donc que $A \leqq L$, et achève de démontrer la proposition II.

Les formules de MM. Cahen et Cotton se déduisent de suite de l'expression (7) en utilisant la convergence de la série (5).

2. L'abscisse C de convergence uniforme de M. Bohr (¹), c'est-à-dire le nombre C tel que la série converge uniformément pour $\sigma \geqq C+\varepsilon$, mais ne converge pas uniformément dans tout demi-plan $\sigma \geqq C-\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$, peut également s'obtenir par une formule analogue à (7). Supposons que la série converge uniformé-

---

(¹) *Voir* en particulier les Mémoires du *Journal für die Mathematik*, 1913, et des *Arkiv der Mathematik*, 1913.

ment pour $\sigma = c$, nous aurons, quel que soit t,

$$\left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q e^{-\lambda_q(c+it)}\right| < 1,$$

pourvu que n soit assez grand; donc, d'après le lemme d'Abel,

$$\left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q e^{-\lambda_q it}\right| \tag{8}$$

est inférieur à $e^{\lambda_n c}$ ou à $2e^{\lambda_{\bar{n}} c}$ suivant le signe de c. Si donc nous désignons par $\mathrm{T}(n)$ la borne supérieure de l'expression (8) lorsque t prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, nous aurons

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left[\frac{1}{\lambda_n} \log \mathrm{T}(n)\right] \leqq \mathrm{C}.$$

Inversement, L étant la valeur du premier membre de cette inégalité, nous avons, à partir d'une valeur de n,

$$\mathrm{T}(n) < e^{\lambda_{\bar{n}}\left(\mathrm{L}+\frac{\varepsilon}{2}\right)};$$

donc, quel que soit t,

$$\left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q e^{-\lambda_q it}\right| < e^{\lambda_{\bar{n}}\left(\mathrm{L}+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

Il en résulte comme ci-dessus que nous aurons

$$\left|\sum_{m}^{r} a_q e^{-\lambda_q(\mathrm{L}+\varepsilon+it)}\right| < 2(u_p + u_{p+1} + \ldots),$$

quel que soit t; la série converge uniformément pour $\sigma = \mathrm{L} + \varepsilon$, d'où ce résultat :

III. *L'abscisse de convergence uniforme est donnée par*

$$\mathrm{C} = \overline{\lim_{n=\infty}} \left[\frac{1}{\lambda_n} \log \mathrm{T}(n)\right] \tag{9}$$

avec

$$\mathrm{T}(n) = \text{borne supérieure de } \left|\sum_{\bar{n}}^{n} a_q e^{\lambda_q it}\right|. \tag{10}$$

On peut d'ailleurs prendre pour $T(n)$ la borne supérieure de l'expression précédente lorsqu'on donne à t une suite discrète de valeurs telles que la différence de deux valeurs successives reste bornée, il en résultera la convergence uniforme pour une suite de points correspondants de la droite $\sigma = C + \frac{\varepsilon}{2}$, et par suite, d'après un théorème connu de M. Cahen [1], la convergence uniforme dans des angles de même ouverture ayant pour sommets ces points, donc dans le demi-plan $\sigma \geqq C + \varepsilon$.

C est évidemment compris entre A et B, c'est d'ailleurs visible sur les expressions de A, B, C.

Des expressions de A et C on déduit cette extension d'un théorème de M. Bohr [2] :

IV. *Si, quel que soit* $p > P$, *les nombres* $\lambda_{n_p}, \lambda_{n_p+1}, \ldots, \lambda_{n_{p+1}-1}$ *sont linéairement indépendants, c'est-à-dire tels qu'il n'existe pas d'entiers* $\mu_{n_p}, \ldots, \mu_{n_{p+1}-1}$ *pour lesquels*

$$\lambda_{n_p}\mu_{n_p} + \ldots + \lambda_{n_{p+1}-1}\mu_{n_{p+1}-1} = 0,$$

l'abscisse de convergence uniforme coïncide avec l'abscisse de convergence absolue.

C'est une conséquence d'un théorème de Kronecker d'après lequel des nombres $\nu_q (q = 1, 2, \ldots, Q)$ étant linéairement indépendants au même sens que ci-dessus, et les ψ_q étant quelconques, on peut trouver un entier N et des entiers m_q tels que les quantités

$$|N\nu_q + \psi_q + m_q|$$

soient simultanément inférieures à un nombre η donné à l'avance.

Supposons d'abord les nombres $\lambda_q (q = n_p, \ldots, n_{p+1} - 1)$ irrationnels, soit $2\pi\varphi_q$ l'argument réduit de a_q, en appliquant le théorème de Kronecker avec $\psi_q = \varphi_q$, $\nu_q = \lambda_q$, nous voyons que l'argument de chacun des nombres

$$a_q e^{2i\pi\lambda_q N}, \quad (q = n_p, \quad \ldots, \quad n_{p+1} - 1) \tag{11}$$

---

[1] Thèse, *Annales de l'École Normale*, 1894, en particulier page 87.

[2] *Acta mathematica*, t, 36.

est aussi voisin que nous voulons d'un multiple de 2π, nous avons donc

$$(12) \qquad T(n_{p+1}-1) \geqq \left| \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} a_q e^{2\pi i \lambda_q N} \right| > \frac{1}{2} \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} |a_q|.$$

Supposons maintenant que l'un des λ_q est rationnel, soit $\lambda_{q'}$, les nombres $\lambda_q - \lambda_{q'}$ seront irrationnels et encore indépendants, en appliquant le théorème de Kronecker avec $\psi_q = \varphi_q - \varphi'_q$, $\nu_q = \lambda_q - \lambda_{q'}$, nous voyons que l'argument des nombres (11) est voisin (à un multiple de 2π près) de celui du nombre d'indice q', l'inégalité entre les membres extrêmes de (12) a encore lieu, nous avons, quel que soit $p > P$,

$$T(n_{p+1}-1) > \frac{1}{2} \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} |a_q|.$$

Il résulte de suite de cette inégalité et des expressions de B et C que C est au moins égal à B, donc égal à B.

Pour les séries de Dirichlet proprement dites ($\lambda_n = \log n$) on peut prendre pour n_p un nombre de la forme

$$n_p = p^{\theta(p)},$$

$\theta(p)$ croissant aussi lentement que l'on veut, par exemple $\theta(p) = \log_k p$, on a dans ce cas

$$n_{p+1} - n_p < n_p n_p^{-[\log_{k-1} n_p]^{-1}}.$$

Il semble difficile de reconnaître directement si l'on est dans les conditions d'application de la proposition IV, mais il n'en est rien; M. Toeplitz a en effet montré (¹) qu'il existe une série de Dirichlet proprement dite pour laquelle B-C est supérieur à un nombre donné moindre que $\frac{1}{4}$. Il en résulte que si l'on désigne par $\chi(n)$ le plus grand entier tel que les nombres

$$\log n, \quad \log(n+1), \quad \ldots, \quad \log[n+\chi(n)]$$

soient linéairement indépendants, le rapport

$$\frac{n^{1-\frac{1}{\log_k n}}}{\chi(n)}$$

n'est pas borné.

(¹) *Göttinger Nachrichten*, 1913.

3. M. Bohr a démontré, pour les séries vérifiant la condition (2), les deux propositions suivantes :

a. Le domaine de convergence, s'il existe, coïncide avec le demi-plan dans lequel la fonction $f(s)$ définie par la série est régulière et bornée.

b. A étant l'abscisse de convergence, dans tout domaine $t \geqq t_0$, $\eta \leqq \sigma \leqq A + \alpha$, $(\eta < A)$, $f(s)$ ne peut être régulière et bornée.

On peut démontrer ces propositions ainsi qu'une proposition un peu plus générale que la seconde, en utilisant l'expression des coefficients en fonction des valeurs de $f(s)$ sur une parallèle à l'axe imaginaire. On vérifie de suite que, a étant supérieur à l'abscisse de convergence (qui est ici abscisse de convergence uniforme et absolue), et t_0 étant un nombre fixe, on a

$$a_n = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} e^{\lambda_n(a+it)} f(a+it)\,dt. \tag{13}$$

Supposons alors que, dans le domaine $t \geqq t_0$, $\eta \leqq \sigma \leqq a$, $f(s)$ soit régulière et telle que l'on ait uniformément

$$\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{|f(\sigma+it)|}{|t|} = 0 \tag{14}$$

[on sait que dans la portion du domaine intérieure au demi-plan de convergence $f(s)$ est bornée], supposons en outre que sur la demi-droite $\sigma = \eta$, $t > t_0$, la valeur moyenne de $|f(s)|$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} |f(\eta+it)|\,dt \tag{15}$$

soit bornée. En intégrant la fonction $e^{\lambda_n s} f(s)$ sur le rectangle de côtés $\sigma = \eta$, $\sigma = a$, $t = t_0$, $t = T$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} e^{\lambda_n(a+it)} f(a+it)\,dt \\
&\quad = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} e^{\lambda_n(\eta+it)} f(\eta+it)\,dt \\
&\qquad + \frac{1}{iT} \int_{\eta}^{\alpha} e^{\lambda_n(u+it_0)} f(u+it_0)\,du - \frac{1}{iT} \int_{\eta}^{\alpha} e^{\lambda_n(u+iT)} f(u+iT)\,du.
\end{aligned}$$

Dans le second membre, la seconde intégrale tend vers zéro lorsque T croît indéfiniment, il en est de même de la troisième d'après l'hypothèse (14); on a donc

$$a_n e^{-\lambda_n \eta} = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} e^{\lambda_n it} f(\eta + it)\, dt,$$

et d'après l'hypothèse faite sur la valeur moyenne de $|f(s)|$, le module du second membre de cette égalité est borné quel que soit p. Il en résulte, d'après la formule (3) par exemple, que A est inférieur ou égal à η. D'où ce résultat qui complète ceux de M. Bohr [1]:

V. *La fonction $f(s)$ définie par une série de Dirichlet satisfaisant à la condition* (2) *ne peut être d'ordre inférieur à* 1 *dans une bande $t > t_0$, $\eta \leqq \sigma \leqq A + \alpha (\eta < A)$* [*inégalité* (14)], *et telle que la valeur moyenne de $|(f(s)|$ soit bornée sur la demi-droite $\sigma = \eta$, $t > t_0$.*

Par exemple si l'on considère avec M. Bohr des fonctions de la forme

$$f(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (e^{-ns} - e^{-(n+u_n)s}) \qquad \left(u_n < \frac{1}{n!}\right),$$

l'abscisse de convergence est o, la fonction $f(s)$ est une fonction entière et l'on a uniformément, pour $\eta \leqq \sigma \leqq a (a > 0, \eta < 0)$,

$$|f(\sigma + it)| < K + K' |t|^{\delta},$$

δ étant un nombre positif arbitrairement petit, la valeur moyenne de $|f(s)|$ ne peut donc rester bornée sur aucune demi-droite $t > t_0$, $\sigma = \eta < 0$.

---

[1] *J. für die Math.*, 1913, et *Sitzungsb. der Bayer. Akademie*, 1913