BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Quelques théorèmes élémentaires sur les fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 162-166

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__162_0>

QUELQUES THÉORÈMES ÉLÉMENTAIRES SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Je me propose d'indiquer ici quelques théorèmes élémentaires sur les fonctions harmoniques, que je donne depuis longtemps dans mon Cours [1].

1. Considérons d'abord une fonction harmonique de deux variables $u(x, y)$ uniforme et continue dans un domaine, sauf peut-être en un point A dans le voisinage duquel on sait seulement que sa valeur absolue est inférieure à un nombre fixe. Ne peut-on pas considérer que la fonction est harmonique dans tout le domaine sans exception? La réponse est affirmative, et l'on peut l'établir comme il suit.

On étudie d'abord bien aisément la même question pour une fonction analytique $f(z)$, holomorphe dans une certaine région, sauf peut-être en un point A dans le voisinage duquel on sait seulement que son module est borné. Il n'y a ici aucune difficulté, car on peut utiliser la formule classique de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

l'intégration étant étendue à la courbe C qui limite le domaine et à une courbe infiniment petite entourant le point A. Cette dernière intégrale est nulle, et l'on en conclut que $f(x)$ est holomorphe dans tout le domaine sans exception.

Revenons alors à la fonction $u(x, y)$. Associons-lui la fonction $v(x, y)$ telle que $u+iv$ soit une fonction analytique de $x+iy$. On a

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

---

[1] *Voir* aussi *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 176, p. 933 et 1025 (1923), et les Notes de M. Lebesgue et de M. Bouligand, qui ont suivi mes Communications.

La fonction $v(x, y)$ pourrait *a priori* n'être pas uniforme. Soit k sa période, correspondant à une circulation autour du point A. Nous ne savons pas d'ailleurs si elle reste bornée dans le voisinage de ce point. Formons la fonction analytique uniforme

$$f(z) = e^{\frac{2\pi}{k}(u+iv)} \qquad (z = x + iy).$$

Son module est borné autour de A. Elle est donc régulière en ce point, d'après la remarque précédente, et il est évident qu'elle ne s'y annule pas. Il en résulte que $\log f(z)$ est holomorphe en A et, par suite, sa partie réelle $\frac{2\pi u}{k}$ est régulière en ce point, mais il en serait de même de $\frac{2\pi v}{k}$, et il y a, par suite, une contradiction avec l'hypothèse de la périodicité. Il en résulte que v est uniforme et l'on raisonnera comme ci-dessus sur la fonction

$$f(z) = e^{u+iv},$$

d'où se tire le théorème énoncé.

2. Envisageons maintenant le cas où *la fonction* $u(x, y)$ *deviendrait égale à* $+\infty$ *en* A; nous entendons par là que, étant donné un nombre positif M aussi grand qu'on veut, on peut tracer un cercle ayant A pour centre, pour tous les points duquel u est supérieure à M.

Nous suivrons, pour la démonstration, une marche analogue à celle du paragraphe précédent; on forme encore la fonction analytique $u + iv$.

Admettons que v ait une période k, correspondant à une circulation autour de A; on peut supposer que k est positif. Soit alors la fonction

$$f(z) = e^{-\frac{2\pi}{k}(u+iv)};$$

elle est bornée autour de A, et est, par suite, régulière en ce point où elle s'annule. Soit donc

$$f(z) = (z - a)^{\alpha}\varphi(z),$$

a étant l'affixe de A, et $\varphi(z)$ ne s'annulant pas pour $z = a$.

On déduit de suite de là que, *dans le voisinage de* A, *on a*

$$u = h \log \frac{1}{r} + U \qquad (\text{U régulier en A}),$$

h étant une constante positive, et r désignant la distance du point (x, y) *à* A. Telle est la forme nécessaire d'une fonction harmonique devenant égale à $+\infty$ en A, que nous nous proposions d'obtenir.

Nous avons supposé que la fonction v avait une période k différente de zéro. Il en est nécessairement ainsi ; car, dans l'hypothèse contraire, on poserait

$$f(z) = e^{-(u+iv)},$$

d'où se déduit encore

$$e^{-(u+iv)} = (z-a)^{\alpha}\varphi(z) \qquad [\varphi(a) \neq 0, \alpha \neq 0].$$

Mais on arrive à une contradiction, puisqu'il résulte de l'identité précédente que v a une période.

3. La même question se pose pour une fonction harmonique de trois variables, $\log \frac{1}{r}$ étant remplacé par $\frac{1}{r}$; mais une autre méthode doit être employée.

Soit $V(x, y, z)$ une fonction harmonique régulière dans un domaine comprenant l'origine O, exception faite de ce dernier point où elle est égale à $+\infty$.

La famille de surfaces

$$V(x, y, z) = K$$

sera alors formée, pour des valeurs très grandes données à la constante positive K, de surfaces fermées entourant l'origine O, et étant très rapprochées de ce point. Soit Γ une surface de cette famille. Désignons d'autre part par S la surface limitant le domiane envisagé, et soit Σ une sphère de très petit rayon ρ, ayant pour centre un point (a, b, c) du domaine.

Suivant une marche entièrement analogue à celle par laquelle on établit la formule fondamentale de la théorie des fonctions harmoniques, nous appliquons la formule de Green au volume limité par S, Σ et Γ, avec les deux fonctions $V(x, y, z)$ et $\frac{1}{r}$, où r désigne la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c). On a pour l'ensemble de ces trois surfaces

(1) $$\int\int\left[V\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}-\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right]d\sigma=0,$$

les dérivées normales étant prises sur chaque surface vers l'intérieur du volume.

En remarquant que $\frac{dV}{dn}$ est négatif pour tous les points de la surface Γ, et posant

$$k=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{dV}{dn}d\sigma \qquad (k>0)$$

où l'intégrale est étendue à Γ, on trouve immédiatement que l'équation (1) devient, en faisant tendre ρ vers zéro et K vers $+\infty$,

$$V(a, b, c)=\frac{k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+U(a, b, c),$$

$U(a, b, c)$ *étant harmonique et régulière à l'origine.* C'est ce que l'on voulait démontrer.

4. Une dernière proposition, d'un caractère plus élémentaire encore, concerne une fonction harmonique, partout régulière à distance finie, et qui garderait un signe invariable. *Cette fonction est nécessairement une constante.*

Le théorème est immédiat pour une fonction harmonique de deux variables $u(x, y)$. Il suffit d'adjoindre la fonction associée $v(x, y)$ de telle sorte que

$$u+iv$$

serait une fonction entière de $x+iy$, dont la partie réelle aurait un signe invariable (soit par exemple le signe $+$). La fonction entière

$$e^{-(u+iv)}$$

aurait alors un module borné. Donc u est une constante.

Si nous considérons maintenant une fonction harmonique $V(x, y, z)$, toujours positive, il suffit de considérer la formule de Poisson

$$V_A=\frac{1}{4\pi R}\int\int\frac{R^2-l^2}{r^3}V\,d\sigma,$$

où l désigne la distance d'un point A à l'origine O, et où r représente la distance de A à l'élément $d\sigma$ de la sphère de rayon R ayant O pour centre. Puisque V est par hypothèse positive, on déduit de là

$$\frac{(R - l)R}{(R + l)^2} V_0 < V_A < \frac{(R + l)R}{(R - l)^2} V_0,$$

V_0 désignant la valeur de V en O. Comme R est aussi grand que l'on veut, il en résulte que

$$V_A = V_0;$$

la fonction est donc constante.