

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur une classe de transcendantales

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 12-17

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__12_1

© Bulletin de la S. M. F., 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES;

PAR M. P. APPELL.

1. En 1894 et 1900, dans les tomes XVIII et XXIII des *Acta mathematica*, M. Émile Picard a démontré l'existence d'une classe importante de fonctions généralisant les fonctions elliptiques. Il prend, comme point de départ, une transformation birationnelle donnée.

Comme le remarque M. E. Picard dans son premier Mémoire, Poincaré a considéré des fonctions analogues, mais non identiques dans un Mémoire intitulé : *Sur une classe nouvelle de transcendentes* (*Journal de Mathématiques*, de Jordan, 1890).

Les remarques suivantes sont relatives aux fonctions considérées par M. E. Picard; ou verra, sans peine, ce qu'il faut en garder pour les fonctions de Poincaré.

2. Soit

$$\begin{aligned} u' &= R_1(u, v, \dots, \omega), \\ v' &= R_2(u, v, \dots, \omega), \\ &\dots\dots\dots, \\ \omega' &= R_m(u, v, \dots, \omega) \end{aligned}$$

une substitution birationnelle quelconque à m variables u, v, \dots, ω . M. E. Picard montre qu'il existe une infinité de systèmes

où l'on peut porter l'origine en un point de cercle fondamental, pour remplir certaines conditions supposées. Comme il existe une fonction rationnelle invariante

$$\frac{v'}{u'} = \frac{v}{u},$$

cette fonction $\frac{v}{u}$, exprimée en z , est une fonction elliptique aux périodes Ω et Ω' :

$$(1) \quad \frac{v}{u} = E(z | \Omega, \Omega').$$

D'autre part, puisqu'on a

$$u'^2 + v'^2 = \frac{1}{u^2 + v^2},$$

la fonction $u^2 + v^2$ de z est une fonction elliptique aux périodes Ω et $2\Omega'$,

$$(2) \quad u^2 + v^2 = \mathfrak{G}(z | \Omega, 2\Omega').$$

On a alors, d'après (1) et (2),

$$u = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}(z)}{1 + E^2(z)}}, \quad v = u E(z),$$

la quantité sous le radical étant assujettie à être le carré d'une fonction uniforme. Dans ce cas, les fonctions considérées s'expriment donc par des fonctions elliptiques.

B. Il en est de même pour les fonctions résultant de la substitution générale

$$u' = \frac{u}{u^2 + v^2 + \dots + w^2},$$

$$v' = \frac{v}{u^2 + v^2 + \dots + w^2},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$w' = \frac{w}{u^2 + v^2 + \dots + w^2},$$

substitution qui admet les fonctions rationnelles invariantes $\frac{v}{u}, \dots, \frac{w}{u}$ et qui donne lieu à la relation

$$u'^2 + v'^2 + \dots + w'^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + \dots + w^2}.$$

4. Sans chercher à résoudre le problème général de déterminer, quand elles existent, les fonctions rationnelles invariantes d'un groupe de substitutions birationnelles données, je me borne ici au cas facile où la substitution considérée est *reciproque*, c'est-à-dire au cas où, partant de

$$(3) \quad \begin{cases} u' = R_1(u, v, \dots, \omega), \\ v' = R_2(u, v, \dots, \omega), \\ \dots \dots \dots, \\ \omega' = R_m(u, v, \dots, \omega), \end{cases}$$

on a, inversement,

$$(4) \quad \begin{cases} u = R_1(u', v', \dots, \omega'), \\ v = R_2(u', v', \dots, \omega'), \\ \dots \dots \dots, \\ \omega = R_m(u', v', \dots, \omega'). \end{cases}$$

Soit alors une fonction rationnelle quelconque $R(u, v, \dots, \omega)$ devenant, par l'effet de la substitution, une fonction rationnelle $S(u', v', \dots, \omega')$,

$$R(u, v, \dots, \omega) = S(u', v', \dots, \omega').$$

Comme on a aussi, à cause de la réciprocité supposée

$$R(u', v', \dots, \omega') = S(u, v, \dots, \omega),$$

le produit

$$T(u, v, \dots, \omega) = R(u, v, \dots, \omega) S(u, v, \dots, \omega)$$

est une fonction rationnelle *invariante* car on a, évidemment,

$$T(u', v', \dots, \omega') = T(u, v, \dots, \omega).$$

Nous écartons le cas où S serait identique à R , car alors R serait invariant. Il peut se faire que le produit RS soit une constante : on prendra alors une autre fonction symétrique de R et S , $R + S$ par exemple.

Ainsi, dans le groupe généralisé de l'inversion, on a

$$A u + B v + \dots + C \omega + H = \frac{A u' + B v' + \dots + C \omega'}{u'^2 + v'^2 + \dots + \omega'^2} + H;$$

le produit

$$(A u + B v + \dots + C \omega + H) \left(\frac{A u' + B v' + \dots + C \omega'}{u'^2 + v'^2 + \dots + \omega'^2} + H \right)$$

et la somme

$$A u + B v + \dots + C w + H + \frac{A u + B v + \dots + C w}{u^2 + v^2 + \dots + w^2} + H$$

sont des fonctions invariantes; les lettres A, B, ..., C, H désignent des constantes dont les m premières A, B, ..., C ne sont pas toutes nulles.

Comme on a

$$u'^2 + v'^2 + \dots + w'^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + \dots + w^2},$$

la somme

$$u^2 + v^2 + \dots + w^2 + \frac{1}{u^2 + v^2 + \dots + w^2}$$

est une fonction invariante.

Un autre exemple simple est fourni par la substitution (homologie)

$$u' = \frac{1}{u}, \quad v' = \frac{v}{u}, \quad \dots, \quad w' = \frac{w}{u},$$

qui donne inversement

$$u = \frac{1}{u'}, \quad v = \frac{v'}{u'}, \quad \dots, \quad w = \frac{w'}{u'}.$$

Le produit et la somme des deux expressions

$$A u + B v + \dots + C w + H, \quad \frac{A + B v + \dots + C w}{u} + H$$

sont des fonctions invariantes.

Pour réaliser les conditions supposées dans le Mémoire de M. E. Picard, il faudra porter l'origine en un point double.

5. S'il existe une fonction rationnelle $R(u, v, \dots, w)$ qui, par l'effet de la substitution, se reproduit multipliée par une constante μ ,

$$R(u', v', \dots, w') = \mu R(u, v, \dots, w),$$

cette fonction exprimée en z devient, d'après la terminologie d'Hermite, une fonction doublement périodique de seconde espèce, représentable à l'aide des fonctions Θ et H de Jacobi.

Si, plus généralement, on a

$$R(u', v', \dots, w') = \mu R(u, v, \dots, w) + \nu,$$

où μ et ν sont constants, cette fonction R exprimée en z est l'intégrale d'une fonction doublement périodique de seconde espèce.

Par exemple, une substitution linéaire quelconque à une variable peut se ramener à l'une des formes

$$\frac{u' - \alpha}{u' - \beta} = \mu \frac{u - \alpha}{u - \beta},$$
$$\frac{1}{u' - \alpha} = \frac{1}{u - \alpha} + \nu.$$

On peut, dès lors, lui appliquer ce qui précède.

6. Au sujet des fonctions laissées invariantes par une substitution linéaire, on pourra consulter une Note de M. Fatou, parue dans le tome L du *Bulletin de la Société mathématique*, p. 37; dans cette Note, M. Fatou fait ressortir les rapports du problème avec la théorie des fonctions doublement périodiques.
