BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur une classe de transcendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 12-17
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__12_1>

SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES;

PAR M. P. APPELL.

1. En 1894 et 1900, dans les tomes XVIII et XXIII des *Acta mathematica*, M. Émile Picard a démontré l'existence d'une classe importante de fonctions généralisant les fonctions elliptiques. Il prend, comme point de départ, une transformation birationnelle donnée.

Comme le remarque M. E. Picard dans son premier Mémoire, Poincaré a considéré des fonctions analogues, mais non identiques dans un Mémoire intitulé : *Sur une classe nouvelle de transcendantes* (*Journal de Mathématiques*, de Jordan, 1890).

Les remarques suivantes sont relatives aux fonctions considérées par M. E. Picard; ou verra, sans peine, ce qu'il faut en garder pour les fonctions de Poincaré.

2. Soit

$$\begin{aligned} u' &= R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' &= R_2(u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w' &= R_m(u, v, \ldots, w) \end{aligned}$$

une substitution birationnelle queleonque à m variables u, v, ..., w. M. E. Picard montre qu'il existe une infinité de systèmes de m fonctions, d'une variable complexe z,

$$f(z),\quad \varphi(z),\quad \ldots,\quad \psi(z),$$

uniformes dans tout le plan, n'ayant que des discontinuités polaires, et jouissant des propriétés suivantes :

Elles admettent la période Ω et l'on a, par le changement de z en $z+\Omega'$,

$$\begin{aligned}
f(z+\Omega') &= R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],\\
\varphi(z+\Omega') &= R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\psi(z+\Omega') &= R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].
\end{aligned}$$

En d'autres termes, si l'on fait

$$u=f(z),\qquad v=\varphi(z),\qquad \ldots,\qquad w=\psi(z),$$

on a

$$u'=f(z+\Omega'),\qquad v'=\varphi(z+\Omega'),\qquad \ldots,\qquad w'=\psi(z+\Omega').$$

Supposons alors que la transformation birationnelle admette une fonction rationnelle *invariante*

$$\mathfrak{R}(u', v', \ldots, w') = \mathfrak{R}(u, v, \ldots, w),$$

$\mathfrak{R}$ désignant une fonction rationnelle; cette fonction, exprimée en z, est une fonction doublement périodique de z, avec des singularités uniquement polaires, c'est-à-dire une fonction elliptique aux périodes Ω et Ω'.

Supposons, plus généralement, qu'il existe une fonction rationnelle de $u, v, \ldots, w$ qui se reproduise après n substitutions du groupe considéré, cette fonction devient, si l'on y met à la place de $u, v, \ldots, w$, les fonctions $f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$, une fonction elliptique de z aux périodes Ω et $n\Omega'$.

3. *Exemples.* — A. Soit la transformation birationnelle à deux variables définissant l'inversion dans un plan,

$$u'=\frac{u}{u^2+v^2},\qquad v'=\frac{v}{u^2+v^2},$$

et inversement

$$u=\frac{u'}{u'^2+v'^2},\qquad v=\frac{v'}{u'^2+v'^2},$$

où l'on peut porter l'origine en un point de cercle fondamental, pour remplir certaines conditions supposées. Comme il existe une fonction rationnelle invariante

$$\frac{v'}{u'} = \frac{v}{u},$$

cette fonction $\frac{v}{u}$, exprimée en z, est une fonction elliptique aux périodes Ω et Ω' :

$$\frac{v}{u} = \mathrm{E}(z \mid \Omega, \Omega'). \tag{1}$$

D'autre part, puisqu'on a

$$u'^2 + v'^2 = \frac{1}{u^2 + v^2},$$

la fonction $u^2 + v^2$ de z est une fonction elliptique aux périodes Ω et $2\Omega'$,

$$u^2 + v^2 = \dot{\mathfrak{G}}(z \mid \Omega, 2\Omega'). \tag{2}$$

On a alors, d'après (1) et (2),

$$u = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}(z)}{1 + \mathrm{E}^2(z)}}, \qquad v = u\,\mathrm{E}(z),$$

la quantité sous le radical étant assujettie à être le carré d'une fonction uniforme. Dans ce cas, les fonctions considérées s'expriment donc par des fonctions elliptiques.

B. Il en est de même pour les fonctions résultant de la substitution générale

$$u' = \frac{u}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2},$$
$$v' = \frac{v}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$w' = \frac{w}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2},$$

substitution qui admet les fonctions rationnelles invariantes $\frac{v}{u}$, ..., $\frac{w}{u}$ et qui donne lieu à la relation

$$u'^2 + v'^2 + \ldots + w'^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2}.$$

4. Sans chercher à résoudre le problème général de déterminer, quand elles existent, les fonctions rationnelles invariantes d'un groupe de substitutions birationnelles données, je me borne ici au cas facile où la substitution considérée est *réciproque*, c'est-à-dire au cas où, partant de

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u' = R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' = R_2(u, v, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w' = R_m(u, v, \ldots, w), \end{array}\right.$$

on a, inversement,

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = R_1(u', v', \ldots, w'), \\ v = R_2(u', v', \ldots, w'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w = R_m(u', v', \ldots, w'). \end{array}\right.$$

Soit alors une fonction rationnelle quelconque $R(u, v, \ldots, w)$ devenant, par l'effet de la substitution, une fonction rationnelle $S(u', v', \ldots, w')$,

$$R(u, v, \ldots, w) = S(u', v', \ldots, w').$$

Comme on a aussi, à cause de la réciprocité supposée

$$R(u', v', \ldots, w') = S(u, v, \ldots, w),$$

le produit

$$T(u, v, \ldots, w) = R(u, v, \ldots, w)\, S(u, v, \ldots, w)$$

est une fonction rationnelle *invariante* car on a, évidemment,

$$T(u', v', \ldots, w') = T(u, v, \ldots, w).$$

Nous écartons le cas où S serait identique à R, car alors R serait invariant. Il peut se faire que le produit RS soit une constante : on prendra alors une autre fonction symétrique de R et S, R + S par exemple.

Ainsi, dans le groupe généralisé de l'inversion, on a

$$Au + Bv + \ldots + Cw + H = \frac{Au' + Bv' + \ldots + Cw'}{u'^2 + v'^2 + \ldots + w'^2} + H;$$

le produit

$$(Au + Bv + \ldots + Cw + H)\left(\frac{Au + Bv + \ldots + Cw}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2} + H\right)$$

et la somme

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \ldots + \mathrm{C}w + \mathrm{H} + \frac{\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \ldots + \mathrm{C}w}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2} + \mathrm{H}$$

sont des fonctions invariantes ; les lettres A, B, ..., C, H désignent des constantes dont les m premières A, B, ..., C ne sont pas toutes nulles.

Comme on a

$$u'^2 + v'^2 + \ldots + w'^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2},$$

la somme

$$u^2 + v^2 + \ldots + w^2 + \frac{1}{u^2 + v^2 + \ldots + w^2}$$

est une fonction invariante.

Un autre exemple simple est fourni par la substitution (homologie)

$$u' = \frac{1}{u}, \qquad v' = \frac{v}{u}, \qquad \ldots, \qquad w' = \frac{w}{u},$$

qui donne inversement

$$u = \frac{1}{u'}, \qquad v = \frac{v'}{u'}, \qquad \ldots, \qquad w = \frac{w'}{u'}.$$

Le produit et la somme des deux expressions

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \ldots + \mathrm{C}w + \mathrm{H}, \quad \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}v + \ldots + \mathrm{C}w}{u} + \mathrm{H}$$

sont des fonctions invariantes.

Pour réaliser les conditions supposées dans le Mémoire de M. E. Picard, il faudra porter l'origine en un point double.

5. S'il existe une fonction rationnelle $\mathrm{R}(u, v, \ldots, w)$ qui, par l'effet de la substitution, se reproduit multipliée par une constante μ,

$$\mathrm{R}(u', v', \ldots, w') = \mu \mathrm{R}(u, v, \ldots, w),$$

cette fonction exprimée en z devient, d'après la terminologie d'Hermite, une fonction doublement périodique de seconde espèce, représentable à l'aide des fonctions Θ et H de Jacobi.

Si, plus généralement, on a

$$\mathrm{R}(u', v', \ldots, w') = \mu \mathrm{R}(u, v, \ldots, w) + \nu,$$

où μ et ν sont constants, cette fonction R exprimée en z est l'intégrale d'une fonction doublement périodique de seconde espèce.

Par exemple, une substitution linéaire quelconque à une variable peut se ramener à l'une des formes

$$\frac{u'-\alpha}{u'-\beta} = \mu\frac{u-\alpha}{u-\beta},$$

$$\frac{1}{u'-\alpha} = \frac{1}{u-\alpha} + \nu.$$

On peut, dès lors, lui appliquer ce qui précède.

6. Au sujet des fonctions laissées invariantes par une substitution linéaire, on pourra consulter une Note de M. Fatou, parue dans le tome L du *Bulletin de la Société mathématique*, p. 37; dans cette Note, M. Fatou fait ressortir les rapports du problème avec la théorie des fonctions doublement périodiques.