N. E. NÖRLUND

Sur l'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 114-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__114_1>

SUR L'INTERPOLATION;

PAR M. N.-E. NÖRLUND.

1. Dans la construction des Tables numériques on fait souvent usage de la formule d'interpolation de Stirling :

$$(1)\qquad F(z) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a'_n z) z(z^2 - 1^2)\dots(z^2 - n^2).$$

Les coefficients a_n et a'_n de cette série s'expriment aisément par les valeurs de la fonction $F(z)$ dans les points $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En donnant successivement à z toutes les valeurs entières, on trouvera en effet un système d'équations linéaires pour la détermination des coefficients. La série (1) se présente aussi dans diverses questions d'analyse et notamment dans l'étude des transcendantes qu'on rencontre dans le calcul aux différences finies. Je me suis demandé à quelles conditions une fonction donnée $F(z)$ puisse se représenter par une série de la forme (1). Dans un Mémoire récent (¹) j'ai déjà abordé cette question; en étudiant le reste de

(¹) *Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton* (*Ann. École Normale*, 3e série, t. XXXIX, 1922, p. 343-403; t. XL, 1923, p. 35-54).

la série (1), j'ai obtenu des conditions suffisantes pour assurer la convergence de la série. Je vais maintenant chercher une condition nécessaire, et cette condition nouvelle est très voisine à celles que j'avais obtenues antérieurement, de sorte qu'on arrive à une délimitation très précise de la classe des fonctions qui admettent un développement de la forme (1). Dans le Mémoire cité, on trouvera des renseignements bibliographiques sur la série (1) ainsi que sur la série analogue de Newton. En y renvoyant le lecteur, je voudrais pourtant mentionner ici les Mémoires qu'ont publiés MM. F. Carlson [1] et G. Pólya [2] sur ce sujet.

2. Je démontre d'abord que la série (1) représente toujours une fonction entière. En remplaçant z par $-z$, on trouve

$$(2)\qquad F(z)-F(-z)=2\sum_{n=0}^{\infty}a_n z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-n^2),$$

$$(3)\qquad F(z)+F(-z)=2F(0)+2\sum_{n=0}^{\infty}a'_n z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2),$$

L'étude de la série (1) revient donc essentiellement à une étude d'une série de la forme (2), Posons pour abréger

$$(4)\qquad H(z)=\frac{F(z)-F(-z)}{2z},$$

on aura

$$(5)\qquad H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-n^2).$$

Si z est un entier positif ou négatif, cette série se réduira à un nombre fini de termes. En mettant de côté ce cas, nous démontrerons le théorème suivant :

Si la série (5) *converge pour* $z=z_0$ (*où* z_0 *n'est pas un*

---

(1) *Sur les séries de coefficients binomiaux* (*Nova Acta R. Soc. Scient. Upsaliensis*, 4e série, s. IV, 1915, n° 3); *Ueber ganzwertige Funktionen* (*Math. Ztschr.*, t. 11, 1921, p. 1-23).

(2) *Ueber ganzwertige ganze Funktionen* (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 40, 1915, p. 1-16); *Ueber ganze ganzwertige Funktionen* (*Nachr. Ges. Gött.* [*Math. Phys.*]; 1920, p. 1-10).

entier positif ou négatif) elle converge uniformément dans tout domaine fini dans le plan de la variable z.

En effet, posons

$$b_n = a_n(z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2)\ldots(z_0^2 - n^2),$$
$$b_0 = a_0, \qquad c_0 = 1,$$
$$c_n = \frac{(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2)\ldots(z^2 - n^2)}{(z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2)\ldots(z_0^2 - n^2)}.$$

On aura

$$c_n - c_{n-1} = c_{n-1}\frac{z^2 - z_0^2}{z_0^2 - n^2}.$$

En appliquant la transformation d'Abel au reste de la série (5), on trouvera

$$(6) \quad \sum_{n=p}^{n=m} b_n c_n = c_p \sum_{n=p}^{\infty} b_n + \sum_{n=p+1}^{n=m} (c_n - c_{n-1}) \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu$$
$$= c_p \sum_{n=p}^{\infty} b_n - (z^2 - z_0^2) \sum_{n=p+1}^{n=m} \frac{c_{n-1}}{n^2 - z_0^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu - c_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu.$$

Soit ε un nombre positif. La série Σb_n étant par hypothèse convergente, on sait trouver un nombre n_0 tel que

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} b_n\right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad p \geqq n_0.$$

Les c_n peuvent s'écrire comme il suit :

$$c_n = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{z_0^2}{n^2}\right)}.$$

Sur cette expression on voit immédiatement que les nombres c_n tendent uniformément vers une limite quand n augmente indéfiniment. En faisant tendre m vers l'infini dans l'équation (6), on trouvera donc

$$(7) \quad \sum_{n=p}^{\infty} b_n c_n = c_p \sum_{n=p}^{\infty} b_n - (z^2 - z_0^2) \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n^2 - z_0^2} \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu.$$

En prenant $p \geqq n_0$, on en déduit l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} b_n c_n\right| < \varepsilon C + \varepsilon C \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{|n^2 - z_0^2|} = \varepsilon C_1,$$

C et C_1 désignant des constantes. Le théorème énoncé est donc démontré. Ce résultat permet aisément de conclure que si la série (1) converge pour deux valeurs [1] de z qui ne sont pas des entiers positifs, négatifs ou nuls, elle converge uniformément dans tout domaine fini dans le plan des z. Cette série représente donc toujours une fonction entière de z.

Pour voir quelles sont les fonctions entières qui admettent un développement de la forme (1), nous allons chercher une limite supérieure du module de la fonction $F(z)$. On y arrive le plus aisément en étudiant séparément les deux sommes $F(z) - F(-z)$ et $F(z) + F(-z)$. Il suffit donc de déterminer une fonction majorante relative à la fonction $H(z)$ en supposant que la série (5) converge. Il arrive que cette série converge simplement pour toute valeur de z qui n'est pas un entier. Pour cette raison nous allons d'abord en déduire une série absolument convergente. Or on y arrive aisément à l'aide de la transformation d'Abel que nous venons d'appliquer. En effet, posons $p = 0$ dans l'équation (7), il vient

$$H(z) = H(z_0) + (z^2 - z_0^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2)\ldots[z^2 - (n-1)^2]}{(z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2)\ldots(z_0^2 - n^2)} \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu$$

et cette série converge absolument pour toute valeur de z. En faisant en particulier $z_0 = 0$, on trouvera

$$H(z) = H(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(n+1)^2} \frac{z^2(z^2 - 1^2)\ldots(z^2 - n^2)}{(n!)^2},$$

où α_n désigne le reste d'une série convergente, de sorte qu'on aura

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0. \tag{8}$$

---

[1] Il peut arriver que la série (1) converge pour *une* valeur non entière z_0 de z et diverge pour toute autre valeur non entière de z. C'est par exemple le cas si $a'_n = 1$ et $a_n = -z_0$ pour toutes les valeurs de n.

Avec un léger changement dans les notations je pose

$$(9) \qquad c_n = \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(n!)^2}.$$

Notre série s'écrit donc

$$(10) \qquad \mathrm{H}(z) = \mathrm{H}(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}.$$

Les nombres α_n sont indépendants de z pendant que les c_n sont des polynomes en z et l'on aura

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} |c_n| = \frac{|z \sin \pi z|}{\pi}.$$

3. Nous allons voir que la fonction $\mathrm{H}(z)$ se comporte d'une manière différente dans différents angles. Posons $z = re^{iv}$. Comme la fonction $\mathrm{H}(z)$ est paire, il suffit de considérer par exemple les valeurs de z pour lesquelles on aura $\frac{3\pi}{4} \geqq v > -\frac{\pi}{4}$. Nous allons tenir compte de ce que le rapport

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{z^2-n^2}{n^2}.$$

a une valeur simple. En désignant la valeur absolue de ce rapport par $\xi(n)$, on aura

$$(12) \qquad \xi(n) = \left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| = \left|1 - \frac{z^2}{n^2}\right| = \sqrt{1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{2r^2}{n^2}\cos 2v}$$

En dérivant par rapport à n, on trouvera

$$(13) \qquad \xi(n)\xi'(n) = -\frac{2r^2}{n^5}(r^2 - n^2\cos 2v).$$

Nous distinguerons deux cas :

1° $\frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$. Pour ces valeurs de v, on a $\cos 2v \leqq 0$; par conséquent

$$\xi(n) > 1, \qquad \xi'(n) < 0.$$

Donc

$$(14) \qquad |c_{n-1}| < |c_n| < |c_\infty| = \frac{1}{\pi}|z \sin \pi z|.$$

Par conséquent, dans l'angle $\frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$, on aura

$$(15) \qquad \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < r e^{\pi r \sin v} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{(n+1)^2} = \text{const.}\, r e^{\pi r \sin v}.$$

2° $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$. Pour ces valeurs de v, on a $\cos 2v > 0$. Par conséquent il y a une et une seule valeur $\bar{n}$ de n telle que

$$\xi(\bar{n}) = 1.$$

Cette valeur de n se détermine par l'équation

$$(16) \qquad \bar{n} = \frac{r}{\sqrt{2\cos 2v}}.$$

L'équation (13) montre que

$$\xi'(n) < 0 \quad \text{pour} \quad n < \bar{n}\sqrt{2},$$
$$\xi'(n) > 0 \quad \text{pour} \quad n > \bar{n}\sqrt{2}.$$

La fonction $\xi(n)$ est donc décroissante dans l'intervalle $1 \leqq n \leqq \bar{n}\sqrt{2}$ et elle est croissante dans l'intervalle $\bar{n}\sqrt{2} \leqq n < \infty$. Comme $\xi(\bar{n}) = \xi(\infty) = 1$, on en conclut que

$$\xi(n) > 1 \quad \text{pour} \quad n < \bar{n},$$
$$\xi(n) < 1 \quad \text{pour} \quad n > \bar{n}.$$

Les termes de la série qui ont la plus grande influence sur l'ordre de grandeur de la fonction sont donc ceux qui correspondent aux valeurs de n qui se trouvent dans un certain voisinage de $n = \bar{n}$. L'expression (9) des c_n peut s'écrire

$$c_n = z \frac{\Gamma(z+n+1)}{\Gamma^2(n+1)\Gamma(z-n)}.$$

Admettons d'abord que $\bar{n} - 1 < n \leqq \bar{n}$. De l'expression asymptotique de la fonction $\Gamma(z)$ on conclut qu'on sait trouver une constante C telle que

$$|c_n| < Cr \left| \left(\frac{z^2 - n^2}{n^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{z+n}{z-n}\right)^z \right|.$$

Pour $n = \bar{n}$ on aura

$$\left| \frac{z^2 - \bar{n}^2}{\bar{n}^2} \right| = 1,$$

$$\frac{z - \bar{n}}{z + \bar{n}} = \frac{e^{iv} - \dfrac{1}{\sqrt{2\cos 2v}}}{e^{iv} + \dfrac{1}{\sqrt{2\cos 2v}}} = \left(\frac{\sqrt{\cos 2v} + i\sqrt{2}\sin v}{\sqrt{\cos 2v} + i\sqrt{2}\cos v} \right)^2.$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{z - \bar{n}}{z + \bar{n}} \right| = \frac{1}{(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v)^2},$$

$$\arg \frac{z - \bar{n}}{z + \bar{n}} = 2 \arcsin(\sqrt{2}\sin v).$$

En posant

$$(17) \quad \psi(v) = \cos v \log(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v)^2 + 2 \sin v \arcsin(\sqrt{2}\sin v),$$

on aura donc

$$(18) \quad \left| \left(\frac{z + \bar{n}}{z - \bar{n}} \right)^z \right| = e^{r\psi(v)}.$$

Par conséquent,

$$(19) \quad |c_{\bar{n}}| < C r e^{r\psi(v)}.$$

Par un calcul facile, on vérifie que

$$(20) \quad |c_n| < \text{const.} |c_{\bar{n}}| \quad \text{si} \quad \bar{n} - 1 \leqq n \leqq \bar{n}.$$

Cela posé, il résulte des propriétés de la fonction $\xi(n)$ que nous venons de déduire que cette inégalité subsiste pour toutes les valeurs entières et positives de n. Par conséquent, dans l'angle $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$, on aura

$$(21) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \text{const.} |c_{\bar{n}}| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{(n+1)^2}$$

$$= \text{const.} |c_{\bar{n}}| < \text{const.} r e^{r\psi(v)}.$$

4. Avant d'aller plus loin je m'arrête un moment pour dire quelques mots sur la fonction $\psi(v)$ qui a été définie dans l'intervalle $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}$ par l'expression (17). Pour abréger les formules

je poserai en outre

$$\psi(v) = \pi \sin v \quad \text{si} \; \frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}.$$

En ajoutant que la fonction $\psi(v)$ doit admettre la période π, cette fonction sera ainsi définie pour toutes les valeurs de v. Elle est évidemment paire et continue car des deux expressions indiquées, il résulte que

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

On a de plus

$$\psi(0) = \psi(\pm\pi) = 2\log(1+\sqrt{2}),$$
$$\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

et l'on démontre sans peine que la fonction $\psi(v)$ admet des minima dans les points 0 et $\pm\pi$ et des maxima dans les points $\pm\frac{\pi}{2}$. La fonction $\psi(v)$ est donc positive pour toutes les valeurs de v et elle satisfait aux inégalités suivantes :

$$\pi \geqq \psi(v) \geqq 2\log(1+\sqrt{2}).$$

Cela posé, revenons à la fonction $H(z)$. Nous avons démontré que cette fonction satisfait pour toute valeur suffisamment grande de $|z|$ à une inégalité de la forme

$$(22) \qquad |H(re^{iv})| < C\, e^{r\psi(v)}\, r^{\beta},$$

C désignant une constante. Les inégalités (15) et (21) expriment en effet que cette inégalité est vraie pour $\beta = 1$, et cela quel que soit v. Mais l'évaluation de la série que nous venons de faire est assez grossière. Par une méthode plus élaborée, nous allons démontrer que l'inégalite (22) subsiste :

1° Pour $\beta = -1$ (mais non pour $\beta < -1$), si

$$\frac{3\pi}{4} - \varepsilon > v > \frac{\pi}{4} + \varepsilon;$$

2° Pour $\beta = -\frac{1}{2}\left(\text{mais non pour } \beta < -\frac{1}{2}\right)$, si

$$\frac{\pi}{4} - \varepsilon > v > -\frac{\pi}{4} + \varepsilon;$$

3° Enfin, si $v = \pm\frac{\pi}{4}$ ou $v = \pm\frac{3\pi}{4}$, on aura $\beta = -\frac{1}{3}$.

C'est assez remarquable que l'exposant β qui appartient aux arguments $v = \pm \frac{\pi}{4}$ ou $v = \pm \frac{3\pi}{4}$ est plus grand que les exposants qui appartiennent à toute autre valeur de v.

5. Considérons d'abord l'angle $\frac{3\pi}{4} > v > \frac{\pi}{4}$ et remarquons que $\cos 2v$ est négative pour ces valeurs de v. Si $n < m$, on aura

$$|c_n| = \frac{|c_m|}{\xi(n+1)\xi(n+2)\ldots\xi(m)}.$$

Quand m augmente indéfiniment, il vient

$$(23) \qquad |c_n| = \frac{|z \sin \pi z|}{\pi\xi(n+1)\xi(n+2)\xi(n+3)\ldots}.$$

Nous allons évaluer le produit qui figure dans le dénominateur. On a

$$\xi^2(n) = 1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2} > 1 - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}.$$

Par conséquent,

$$\log\xi(n) > \frac{-r^2\cos 2v}{n^2 - 2r^2\cos 2v}.$$

Si $r < n$, on en conclut que

$$\log\xi(n) > \frac{-r^2\cos 2v}{n^2 - 2n^2\cos 2v} > -\frac{r^2\cos 2v}{3n^2}.$$

Par conséquent,

$$\log[\xi(n+1)\xi(n+2)\ldots] > -\frac{r^2\cos 2v}{3}\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right]$$
$$> -\frac{r^2\cos 2v}{3}\,\frac{1}{n+1}.$$

En substituant dans l'équation (23) on voit qu'on sait trouver une constante c telle que

$$(24) \qquad |c_n| < c\,r\,e^{r\pi\sin v}e^{\frac{r^2\cos 2v}{3n}}$$

Soit n_1 le plus grand entier positif qui satisfait à l'inégalité

$$n_1 \leqq -\frac{r^2\cos 2v}{6\log r}.$$

L'inégalité (24) entraîne que

$$(25)\qquad |c_{n_1}| < c\,r\,e^{r\pi \sin\varphi}\, e^{-2\log r} = \frac{c\, e^{r\psi(\varphi)}}{r}.$$

Soit ε un nombre positif. On sait trouver n_0 tel que

$$|\alpha_n| \leqq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqq n_0.$$

En prenant r suffisamment grand, on peut évidemment obtenir que $n_1 > n_0$. Cela posé, nous partagerons la série (10) en trois parties :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} = \sum_{0}^{n_0-1} + \sum_{n_0}^{n_1-1} + \sum_{n_1}^{\infty}.$$

Le premier terme au second membre est un polynome en z. On sait donc trouver une constante c telle que

$$(26)\qquad \left| \sum_{0}^{n_0-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < c\, e^{\eta r}$$

quelque petit que soit le nombre positif η. Pour les deux autres termes on trouvera, en tenant compte des inégalités (24) et (25),

$$(27)\qquad \begin{aligned} \left| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| &< \varepsilon\, |c_{n_1}| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{\varepsilon C\, e^{r\psi(\varphi)}}{r}, \\ \left| \sum_{n_1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| &< \varepsilon\, c\, r\, e^{r\psi(\varphi)} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\, e^{\frac{r^2 \cos 2\varphi}{3n}} \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{n_1}^{\infty} \frac{e^{\frac{r^2\cos 2\varphi}{3n}}}{(n+1)^2} < \int_{n_1}^{\infty} e^{\frac{r^2\cos 2\varphi}{3x}} \frac{dx}{x^2} < \int_{0}^{\infty} e^{\frac{r^2\cos 2\varphi}{3x}} \frac{dx}{x^2}$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{\frac{z}{3} r^2 \cos 2\varphi}\, dz = \frac{-3}{r^2 \cos 2\varphi}.$$

Par conséquent,

$$(28)\qquad \left| \sum_{n_1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} \right| < \frac{3\varepsilon c\, e^{r\psi(\varphi)}}{r\,|\cos 2\varphi|}.$$

Par une légère modification du raisonnement précédent, on sait trouver une autre inégalité qui s'applique pour $\frac{3\pi}{4} \geqq \varphi \geqq \frac{\pi}{4}$, y compris les deux extrémités de cet intervalle. En effet, comme $\cos 2v \leqq 0$, on aura

$$\xi^2(n) = 1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{2r^2 \cos 2v}{n^2} \geqq 1 + \frac{r^4}{n^4}.$$

Par conséquent,

$$\log \xi(n) > \frac{\frac{1}{2} r^4}{n^4 + r^4}.$$

Si $r < n$, on en déduit que

$$\log \xi(n) > \frac{1}{4} \frac{r^4}{n^4},$$

d'où

$$\begin{aligned} \log[\xi(n+1)\xi(n+2)\ldots] &> \frac{r^4}{4}\left[\frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+2)^4} + \ldots\right] \\ &> \frac{r^4}{12} \frac{1}{(n+1)^3}. \end{aligned}$$

On sait donc trouver une constante c telle que

$$|c_n| < c r e^{r\psi(v) - \frac{r^4}{12 n^3}}.$$

En déterminant n_1 comme le plus grand entier positif qui satisfait à l'inégalité

$$n_1^3 \leqq \frac{r^4}{24 \log r},$$

on retrouve l'inégalité (25) et par conséquent aussi l'inégalité (27). Enfin on aura

$$\left|\sum_{n_1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon c r e^{r\psi(v)} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r^4}{12 n^3}}}{(n+1)^2}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n_1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r^4}{12 n^3}}}{(n+1)^2} &< \int_{n_1}^{\infty} e^{-\frac{r^4}{12 x^3}} \frac{dx}{x^2} < \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^4}{12 x^3}} \frac{dx}{x^2} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{12} r^4 z^3} dz = r^{-\frac{4}{3}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{12} x^3} dx. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\sum_{n_1}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon c_1 e^{r\psi(v)}}{r^{\frac{1}{3}}},$$

c_1 désignant une constante. En rapprochant cette inégalité à l'inégalité (28) et en tenant compte de (26) et de (27), on voit que la fonction $H(z)$ satisfait à l'inégalité suivante :

$$(29)\qquad |H(re^{iv})| < \frac{\varepsilon(r)\, e^{r\psi(v)}}{r^{\frac{1}{3}}\left(1 - r^{\frac{2}{3}}\cos 2v\right)},$$

$\varepsilon(r)$ désignant une fonction qui tend vers zéro quand r augmente indéfiniment, et cela uniformément dans l'angle $\frac{3\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{\pi}{4}$.

6. Considérons maintenant l'angle $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}$. La branche de la courbe

$$r^2(2\cos 2v)^3 = 81,$$

qui est située à l'intérieur de cet angle, partagera l'angle en deux domaines, soient A et B. Nous désignerons par A le domaine qui est situé du côté droit de la courbe et par B le reste de l'angle. Le domaine B est donc limité par les deux demi-droites $v = \pm\frac{\pi}{4}$ et par la courbe. En posant

$$x = \sqrt{r}(2\cos 2v)^{\frac{3}{4}},$$

on aura donc $x \geqq 3$ pour tout point situé dans le domaine A et $x \leqq 3$ pour tout point situé dans le domaine B.

Considérons d'abord le domaine A. Soit n_2 le plus petit entier positif qui satisfait à l'inégalité

$$n_2 \geqq \bar{n}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Soit n_3 le plus grand entier positif qui satisfait à l'inégalité

$$n_3 \leqq \bar{n}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Nous partagerons la série (10) en quatre parties en posant

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3,$$

où

$$P_0 = \sum_0^{n_0-1}, \qquad P_1 = \sum_{n_0}^{n_2-1}, \qquad P_2 = \sum_{n_2}^{n_3-1}, \qquad P_3 = \sum_{n_3}^{\infty},$$

P_0 est un polynome en z qui satisfait à l'inégalité (26). Pour la somme P_2, on aura

$$|P_2| < \varepsilon |c_{\bar{n}}| \sum_{n_2}^{n_3-1} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Mais

$$\sum_{n_2}^{n_3-1} \frac{1}{(n+1)^2} < \int_{n_2}^{n_3} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} < \frac{1}{\bar{n}\left(1-\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{\bar{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{2}{\bar{n}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} < \frac{9}{4x\bar{n}}.$$

En tenant compte de l'inégalité (19), on trouvera donc

(30) $$|P_2| < \frac{3\varepsilon C e^{r\psi(v)}}{\sqrt{r}(2\cos 2v)^{\frac{1}{4}}}.$$

Considérons maintenant la somme P_3. Pour $n > n_3$, on aura

(31) $$|c_n| = \xi(n)\xi(n-1)\ldots\xi(n_3+1)|c_{n_3}|,$$

$$\xi^2(n) \leqq 1 + \frac{r^4}{n^2(n_3+1)^2} - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}$$

$$< 1 - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\right]$$

$$= 1 - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}\,\frac{1}{x}\,\frac{2+\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Mais comme $x \geqq 3$ on en déduit que

$$\xi^2(n) < 1 - \frac{2r^2\cos 2v}{xn^2} < e^{-\frac{2r^2\cos 2v}{xn^2}}$$

Par conséquent,

$$\log\xi(n) < -\frac{r^2\cos 2v}{xn^2};$$

on aura donc

$$\log[\xi(n_3+1)\xi(n_3+2)\ldots\xi(n)]$$

$$< -\frac{r^2\cos 2v}{x}\left[\frac{1}{(n_3+1)^2} + \frac{1}{(n_3+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right]$$

$$< -\frac{r^2\cos 2v}{x}\int_{n_3}^{n} \frac{dz}{(z+1)^2}$$

$$= -\frac{r^2\cos 2v}{x}\left(\frac{1}{n_3+1} - \frac{1}{n+1}\right).$$

En substituant daus l'équation (31), on trouvera

$$|c_n| < |c_{n_3}|\, e^{-\frac{r^2\cos 2v}{x}\left(\frac{1}{n_3+1}-\frac{1}{n+1}\right)}.$$

Par conséquent,

$$|P_3| \leqq \sum_{n_3}^{\infty} \frac{|\alpha_n c_n|}{(n+1)^2}$$
$$< \varepsilon\, |c_{n_3}|\, e^{-\frac{r^2\cos 2v}{x(n_3+1)}} \sum_{n_3}^{\infty} \frac{e^{\frac{r^2\cos 2v}{x(n+1)}}}{(n+1)^2}.$$

Mais

$$\sum_{n_3}^{\infty} \frac{e^{\frac{r^2\cos 2v}{x(n+1)}}}{(n+1)^2} < \int_{n_3}^{\infty} e^{\frac{r^2\cos 2v}{xz}} \frac{dz}{z^2}$$
$$= \frac{x}{r^2\cos 2v}\left(e^{\frac{r^2\cos 2v}{x n_3}} - 1\right).$$

Puisque $|c_{n_3}| < |c_{\bar{n}}|$ on obtient

$$(32) \qquad |P_3| < \frac{\varepsilon C x e^{r\psi(v)}}{2r\cos 2v} = \frac{\varepsilon C e^{r\psi(v)}}{\sqrt{r}\,(2\cos 2v)^{\frac{1}{4}}},$$

C désignant une constante. Considérons en dernier lieu a somme P_1. Pour $n < n_2$ on aura

$$(33) \qquad |c_n| = \frac{|c_{n_2}|}{\xi(n+1)\,\xi(n+2)\ldots\xi(n_2)}$$

et

$$\xi^2(n) > 1 + \frac{r^4}{n^2(n_2-1)^2} - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}$$
$$> 1 + \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}\,\frac{2}{x}\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$
$$> 1 + \frac{4r^2\cos 2v}{n\bar{n}x} = 1 + \frac{2x}{n}.$$

Par conséquent,

$$\log \xi(n) > \frac{x}{n+2x}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\log[\xi(n+1)\,\xi(n+2)\ldots\xi(n_2)]\\
&\qquad > x\left[\frac{1}{n+1+2x}+\frac{1}{n+2+2x}+\ldots+\frac{1}{n_2+2x}\right]\\
&\qquad > x\int_n^{n_2}\frac{dz}{z+1+2x}\\
&\qquad = x\log\frac{n_2+1+2x}{n+1+2x}.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (33), on obtient

$$(34)\qquad |c_n| < |c_{n_2}|\left(\frac{n+2x+1}{n_2+2x+1}\right)^x.$$

Déterminons maintenant un entier n_1 plus grand que n_0 et tel que

$$n_1 = kx,$$

k désignant une constante. On aura

$$\frac{n_1+2x+1}{n_2+2x+1} < \frac{(k+3)x}{n_2} < \frac{k_1}{\sqrt{r}},$$

k_1 désignant une constante. Pour des valeurs suffisamment grandes de r, on aura donc, puisque $x \geqq 3$,

$$|c_{n_1}| < |c_{n_2}|\left(\frac{k_1}{\sqrt{r}}\right)^x < |c_{n_2}|\frac{k_1^3}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $|c_{n_2}| < |c_{\bar{n}}|$ on sait trouver une constante C_1 telle que

$$|c_{n_1}| < \frac{C_1\,e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}}.$$

Cela posé, nous partagerons la somme P_1 en deux parties :

$$P_1 = \sum_{n_0}^{n_1-1} + \sum_{n_1}^{n_2-1}.$$

On a d'abord

$$(35)\qquad \left|\sum_{n_0}^{n_1-1}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon\,|c_{n_1}|\sum_{n_0}^{n_1-1}\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{\varepsilon\,C\,e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}},$$

et en tenant compte de (34)

$$(36)\qquad \left|\sum_{n_1}^{n_2-1}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon\,|\,c_{n_2}\,|}{(n_2+2x+1)^x}\sum_{n_1}^{n_2-1}\frac{(n+2x+1)^x}{(n+1)^2}.$$

Mais on vérifie aisément que

$$\sum_{n_1}^{n_2-1}\frac{(n+2x+1)^x}{(n+1)^2} < \left(1+\frac{2x}{n_1}\right)^2\sum_{n_1}^{n_2-1}(n+2x+1)^{x-2}$$
$$< \left(1+\frac{2}{k}\right)^2\frac{(n_2+2x+1)^{x-1}-(n_1+2x-1)^{x-1}}{x-1}.$$

En substituant dans l'inégalité (36), on voit qu'on sait trouver une constante C_1 telle que

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2-1}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon C_1\,|\,c_{n_2}\,|}{n_2 x} < \frac{\varepsilon C\, e^{r\psi(v)}}{\sqrt{r}(2\cos 2v)^{\frac{1}{4}}},$$

C désignant une nouvelle constante. En rapprochant cette inégalité aux inégalités (30), (32) et (35), on voit qu'on sait choisir une constante C_2 telle que dans le domaine A la fonction $H(z)$ satisfait à l'inégalité suivante :

$$(37)\qquad |\,H(r e^{iv})\,| < \frac{\varepsilon C_2\, e^{r\psi(v)}}{\sqrt{r}(2\cos 2v)^{\frac{1}{4}}}.$$

7. Il nous reste seulement à étudier le domaine B. Dans ce domaine on a par hypothèse $x \leqq 3$, mais il en résulte que

$$(38)\qquad \bar{n} \geqq \frac{r^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{}}.$$

Si $n \leqq \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}$, on aura

$$\xi^2(n) = 1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{2r^2\cos 2v}{n^2}$$
$$\geqq 1 + \frac{r^4}{n^4} - \frac{r^2\bar{n}^{-2}\cos 2v}{n^4}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{r^4}{n^4}.$$

Par conséquent,

$$\log \xi(n) > \frac{\frac{1}{4} r^4}{n^4 + \frac{1}{2} r^4}.$$

Pour $r < n < \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}}$, on aura donc

$$\log \xi(n) > \frac{\frac{1}{4} r^4}{n^4 + \frac{1}{2} n^4} = \frac{1}{6} \frac{r^4}{n^4}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \log[\xi(n+1)\xi(n+2)\ldots\xi(n_2)] &> \frac{r^4}{6}\left[\frac{1}{(n+1)^4} + \ldots + \frac{1}{n_2^4}\right] \\ &> \frac{r^4}{18}\left[\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n_2+1)^3}\right] \end{aligned}$$

Déterminons l'entier positif n_2 de sorte que

$$n_2 \leqq \frac{\bar{n}}{\sqrt{2}} < n_2 + 1. \tag{39}$$

L'inégalité (38) entraîne que

$$\frac{r^4}{(n_2+1)^3} < 18\sqrt{2}.$$

Pour $r < n \leqq n_2$ on aura donc, en vertu de l'équation (33),

$$|c_n| < C\,|c_{n_2}|\,e^{-\frac{r}{18 n^3}} < C_1 r\, e^{r\psi(\nu) - \frac{r^4}{18 n^3}}, \tag{40}$$

C et C_1 étant des constantes. En désignant par n_1 le plus grand entier positif qui satisfait à l'inégalité

$$n_1 < \frac{r^{\frac{4}{3}}}{3(\log r)^{\frac{1}{3}}},$$

on en conclut que

$$|c_{n_1}| < C_1 r\, e^{r\psi(\nu) - \frac{3}{2}\log r} = C_1 \frac{e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}}.$$

Mais il en résulte que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| &< \varepsilon\,|c_{n_1}| \sum_{n_0}^{n_1-1} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \varepsilon C_2 |c_{n_1}| < \varepsilon C_2 C_1 \frac{e^{r\psi(\nu)}}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

De l'inégalité (40) on déduit

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon C_1 r\, e^{r\psi(v)}\sum_{n_1}^{n_2}\frac{e^{-\frac{r^4}{18n^8}}}{(n+1)^2}$$
$$< \varepsilon C_1 r\, e^{r\psi(v)}\int_0^\infty e^{-\frac{r^4}{18z^3}}\frac{dz}{z^2}$$
$$= \varepsilon C_1 r^{-\frac{1}{3}}\, e^{r\psi(v)}\int_0^\infty e^{-\frac{z^3}{18}}dz.$$

Enfin on aura

$$\left|\sum_{n_2+}^{\infty}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon\,|c_{\bar n}|\sum_{n_2+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{\varepsilon\,|c_{\bar n}|}{n_2+1}.$$

Mais en tenant compte des inégalités (39) et (38), on en déduit

$$\left|\sum_{n_2+1}^{\infty}\frac{\alpha_n c_n}{(n+1)^2}\right| < \frac{\varepsilon\,|c_{\bar n}|\sqrt{2}}{\bar n} < \varepsilon C_2 r^{\frac{1}{3}}\, e^{r\psi(v)}.$$

Nous avons ainsi démontré l'existence d'une constante C telle que dans le domaine B on aura

$$|H(re^{iv})| < \varepsilon C r^{-\frac{1}{3}}\, e^{r\psi(v)}$$

pour toute valeur suffisamment grande de r. En rapprochant cette inégalité à l'inégalité (37), on conclut que dans l'angle $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}$ la fonction $H(z)$ satisfait à l'inégalité suivante :

$$(41)\qquad |H(re^{iv})| < \frac{\varepsilon(r)\, e^{r\psi(v)}}{r^{\frac{1}{3}}\left(1 + r^{\frac{2}{3}}\cos 2v\right)^{\frac{1}{4}}},$$

$\varepsilon(r)$ désignant une fonction qui tend vers zéro quand r augmente indéfiniment, et cela uniformément pour $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}$.

8. Revenons à la fonction $F(z)$. Dans le paragraphe 1 nous avons vu que les fonctions

$$[F(z) - F(-z)]z^{-1} \quad \text{et} \quad [F(z) + F(-z) - 2F(0)]z^{-2}$$

se représentent par une série de la forme (5). Le résultat que nous venons de démontrer peut donc s'énoncer comme il suit. La convergence de la série (1) entraîne que la fonction entière $F(z)$, qu'elle représente, satisfait, pour $r > 1$, aux quatre inégalités suivantes :

$$(42) \qquad |F(z) \pm F(-z)| < \frac{\varepsilon(r)\, e^{r\psi(v)} r^{\beta}}{1 - r^{\frac{2}{3}} \cos 2v}$$

pour $\frac{3\pi}{4} \geqq |v| \geqq \frac{\pi}{4}$; et

$$(43) \qquad |F(z) \pm F(-z)| < \frac{\varepsilon(r)\, e^{r\psi(v)} r^{\beta}}{\left(1 + r^{\frac{2}{3}} \cos 2v\right)^{\frac{1}{4}}}$$

pour $\frac{\pi}{4} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{4}$ et pour $\frac{5\pi}{4} \geqq v \geqq \frac{3\pi}{4}$. Au signe $+$ correspond la valeur $\beta = \frac{5}{3}$ et au signe — correspond la valeur $\beta = \frac{2}{3}$.

D'autre part, en étudiant le terme complémentaire de la série (1) j'ai obtenu un théorème inverse à celui qui précède. Dans un Mémoire précédent [1] j'ai démontré que toute fonction entière qui satisfait à certaines conditions admet un développement de la forme (1). Ces conditions permettent de conclure que les inégalités (42) et (43) cessent d'être vraies pour toute valeur de β qui est inférieure à celles que nous venons d'indiquer. Les conditions nécessaires et les conditions suffisantes, que nous avons trouvées, sont donc voisines l'une à l'autre. Je ne reproduirai pas les dernières conditions ici, car on peut les préciser un peu de manière à les rapprocher davantage aux conditions nécessaires. Mais pour y arriver, il faut faire des explications assez longues. Je vais revenir sur ce point dans un autre Mémoire.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 359 et 373-374.