BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 33-45

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__33_1>

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES VÉRIFIANT UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. G. VALIRON.

Dans un Mémoire des *Acta mathematica* (1), M. Wiman a énoncé quelques propriétés des fonctions entières vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels. M. Wiman tirait ces propriétés des relations très précises qu'il a obtenues entre les valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées successives dans le voisinage des points où la fonction atteint son maximum; mais, comme je l'ai indiqué (2), le raisonnement de M. Wiman est incomplet et ne peut conduire qu'à cette conclusion : une fonction d'ordre inférieur à $\frac{1}{p}$ ne peut vérifier une équation différentielle d'ordre p (3). Je vais montrer qu'en utilisant les résultats que j'ai obtenus comme compléments à ceux de M. Wiman (4), on peut démontrer rigoureusement la propriété suivante :

1. *Toute fonction entière $f(z)$ vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients rationnels est d'ordre fini rationnel l au moins égal à $\frac{1}{p}$, à croissance parfaitement*

(1) Tome XLI, 1916.

(2) *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 990.

(3) Un résultat analogue est obtenu par M. Polya pour les équations algébriques du premier ordre (*Acta mathematica*, t. XLII, 1920).

(4) *Annales de l'École Normale*, 1920.

régulière; le module maximum $\mathrm{M}(r)$ *de* $f(z)$ *pour* $|z| = r$ *étant donné par une égalité de la forme*

$$\log \mathrm{M}(r) = k r^{l} + h(r) r^{l'},$$

k et l' étant des nombres fixes, l' inférieur à l, et $|h(r)|$ *étant borné. Les arguments des points z en lesquels* $|f(z)| = \mathrm{M}(r)$ *ont au plus lp valeurs limites équidistantes les unes des autres (à* 2π *près), à condition d'exclure certains intervalles exceptionnels de valeurs de r.*

Pour simplifier, je dirai qu'une fonction entière vérifiant de telles conditions est du *type exponentiel étoilé.*

Cette propriété est encore vraie pour les fonctions entières vérifiant une équation différentielle algébrique du premier ordre et pour celles vérifiant une classe étendue d'équations différentielles algébriques en $z, y, y', \ldots, y^{(p)}$ et d'ordre p quelconque.

D'une façon plus générale, si une équation de cette classe admet une solution de la forme

$$z^{\mu} \mathrm{F}(z),$$

$\mathrm{F}(z)$ étant holomorphe autour du point à l'infini et étant par suite la somme d'une fonction entière $f(z)$ et d'une fonction régulière et nulle à l'infini, la fonction $f(z)$ est encore du type exponentiel étoilé.

1. Je rappellerai les résultats suivants donnés explicitement dans mon Mémoire cité, ou se déduisant de suite des considérations des n^os^ 8 et 9 dudit Mémoire :

Si l'on désigne par $f(z)$ une fonction entière, par $n(r)$ ou n le rang du terme de module maximum de son développement de Taylor pour $|z| = r$ [$n(r)$ est une fonction non décroissante et non bornée], et si l'on exclut de l'intervalle o, ∞ une suite d'*intervalles exceptionnels* ouverts $\mathrm{R}_s, \mathrm{R}'_s$, qui sont tels que

$$\mathrm{R}'_s - \mathrm{R}_s < \mathrm{R}_s \, n(\mathrm{R}_s)^{-\beta} \qquad (\beta < 1) \tag{1}$$

et que la série

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathrm{R}'_s - \mathrm{R}_s}{\mathrm{R}_s}$$

converge; pour toutes les valeurs restantes, que j'appelle *valeurs ordinaires* et qui forment une suite d'intervalles fermés infiniment grands dans leur ensemble par rapport aux intervalles exceptionnels, on a les propriétés suivantes :

A. Le maximum du module, $M(r)$, de $f(z)$ pour $|z| = r$ est donné par l'expression

$$(2) \qquad \log M(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx + h(r)\log n(r) \qquad [|h(r)| < K] \quad (1)$$

et l'on a

$$(3) \qquad \log M(r) > n(r)^{\alpha},$$

α étant un nombre fixe compris entre o et 1. On sait d'ailleurs que, quel que soit r,

$$(4) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = +\infty.$$

B. z étant une des valeurs pour lesquelles $|f(z)| = M(r)$, et $f^{(j)}(z)$ la dérivée d'ordre j de $f(z)$ en ce point, on a

$$(5) \qquad \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left[\frac{n(r)}{z}\right]^j \left[1 + \frac{h(z)}{n^{\gamma}}\right] \qquad [|h(z)| < K],$$

γ étant un nombre fixe compris entre o et $\frac{1}{2}$, aussi voisin de $\frac{1}{2}$ que l'on veut, et le même quel que soit j compris entre 1 et P.

2. Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients rationnels, c'est-à-dire de la forme

$$(6) \qquad P_p(z)y^{(p)} + P_{p-1}(z)y^{(p-1)} + \ldots + P_0(z)y + P_{-1}(z) = 0,$$

les $P_j(z)$ étant des polynomes, et supposons qu'une fonction entière vérifie cette équation. Donnons à r une valeur ordinaire et prenons $z = re^{i\varphi}$, φ étant tel que $|f(z)| = M(r)$. Si nous désignons par $a_j z^{m_j}$ le terme de plus haut degré de $P_j(z)$, l'équation (6) s'écrit en divisant les deux membres par y et en tenant compte des égalités (4) et (5),

$$(7) \qquad \sum_0^p a_j n^j z^{m_j - j}[1 + \varepsilon_j(z)] = 0$$

(1) Je désignerai uniformément par K toute constante finie.

avec

$$(8) \qquad \varepsilon_j(z) = \frac{h(z)}{n^{\gamma}} + \frac{h_1(z)}{r} \qquad [|h(z)| < K, |h_1(z)| < K].$$

Considérons l'équation algébrique

$$(9) \qquad \sum_0^p \lambda_j X^j z^{m_j - j} = 0,$$

dont nous supposons les coefficients λ_j bornés en module, λ_j étant d'ailleurs identiquement nul si a_j est nul et égal à $a_j + t_j$ si $a_j \neq 0$. Pour les grandes valeurs de z, la fonction $X(z)$ définie par cette équation possède p branches distinctes ou non données par p expressions de la forme

$$X(z) = k' z^l [1 + \eta(z)],$$

l étant un nombre rationnel dont les valeurs positives sont au moins égales à $\frac{1}{p}$, $\eta(z)$ tendant vers zéro avec t_j et $\frac{1}{z}$, et k' étant une fonction algébrique de certains des nombres t_j. Lorsque les t_j tendent vers zéro, les diverses valeurs k' ont des limites non nulles ce qui montre déjà que $n(r)$ est de la forme $h(r) r^l$, l étant naturellement positif puisque n n'est pas borné, et $h(r)$ restant compris entre deux nombres positifs fixes, $\varepsilon_j(z)$ est donc de la forme

$$\varepsilon_j(z) = \frac{h_j(z)}{a_j z^{\delta}} \qquad [\delta > 0, |h_j(z)| < K] \quad (1),$$

et nous avons

$$t_j = \frac{h_j(z)}{r^{\delta}}.$$

Si nous désignons par k_1 la valeur de k' lorsque les λ_j sont égaux aux a_j, nous obtenons donc

$$(10) \qquad n(r) = k_1 z^l + h(z) z^{l-\delta'} \qquad [|h(z)| < K].$$

L'ensemble des deux nombres k_1, l est susceptible de p valeurs au plus qui s'obtiennent par la méthode de Puiseux sur laquelle je dois insister un peu à cause de la suite. Étant donnée l'équa-

(1) Les fonctions $h(r)$ ne sont pas nécessairement les mêmes dans les diverses formules, ce sont des fonctions quelconques bornées.

tion

$$\sum_{0}^{p} a_j X^j z^{m_j - j} = 0,$$

nous construisons un polygone de Newton au moyen des points B_j, B_j ayant pour abscisse j et pour ordonnée $m_j - j$; ce polygone ayant pour sommets certains points B_j et laissant les autres au-dessous de ses côtés ou sur ses côtés; $-\frac{1}{l}$ est la pente *négative* de l'un des côtés et k_1 est racine de l'équation en X obtenue en égalant à zéro l'ensemble des termes de l'équation correspondant aux points B_j situés sur le côtc de pente $-\frac{1}{l}$ et en remplaçant z par 1.

Revenons à l'équation (10), elle donne, r étant valeur ordinaire,

$$n(r) = k_1(r) r^{l(r)} [1 + \varepsilon(r)] \qquad [k_1(r) = |k_1|] \quad (^1),$$

le couple des nombres $k_1(r)$, $l(r)$ étant susceptible, pour chaque r, des p valeurs dont il est question ci-dessus. Mais $n(r)$ est croissant et discontinu; tant que r parcourt un intervalle ordinaire, si $k_1(r)$ ou $l(r)$ ne garde pas la même valeur, ils ne peuvent que croître; d'autre part, si R_s, R'_s sont les extrémités d'un intervalle exceptionnel, nous aurons, d'après l'égalité (1),

$$n(R_s) = k_1(R_s) R_s^{l(R_s)} [1 + \varepsilon(R_s)],$$
$$n(R'_s) = k_1(R'_s) R_s^{l(R'_s)} [1 + \varepsilon(R'_s)],$$

ce qui montre encore que $l(R'_s)$ est au moins égal à $l(R_s)$ et que dans le cas de l'égalité

$$k_1(R'_s) \geq k_1(R_s).$$

La fonction $l(r)$ est donc croissante quel que soit r et ses valeurs possibles étant en nombre fini, c'est une constante à partir d'une valeur de r; donc aussi $k_1(r)$. Les nombres k_1 et l figurant dans l'équation (10) sont donc bien déterminés pour $r > R$. Si l'équation donnant k_1 n'a pas plusieurs racines de même module, k_1 est le module de l'une de ces racines; dans le cas contraire

---

(1) $\varepsilon(r)$ désigne une fonction quelconque tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

k_1 peut être, suivant la valeur de r, égal à l'une ou à l'autre des racines appartenant à un groupe de racines de même module. Or n est réel, donc pour chaque valeur ordinaire r les arguments φ pour lesquels on obtient le point z de module maximum sont tels que l'argument réduit de

$$k_1 e^{i\varphi l}$$

est de l'ordre de $r^{-\delta}$; si φ_1 est l'argument réduit de k_1, φ est compris dans l'un des intervalles

$$\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{l} - \frac{K}{r^\delta}, \qquad \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{l} + \frac{K}{r^\delta} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, l-1).$$

Si k_1 est unique, nous avons ainsi pour l'ensemble des valeurs ordinaires, l directions dans le voisinage desquelles se produit le maximum de $|f(z)|$, s'il existe q valeurs k_1 de même module ($q \leq p$), nous avons ql directions possibles.

En prenant le module du second membre de l'égalité (10), nous avons, quel que soit r valeur ordinaire,

$$n(r) = |k_1| r^l + h(r) r^{l'} \qquad (l' < l),$$

et en s'appuyant de nouveau sur l'égalité (1) relative à la densité des valeurs ordinaires, nous voyons que cette égalité est valable quel que soit $r > R$. En portant alors cette valeur dans l'égalité (3), nous obtenons

$$\log M(r) = k r^l + h(r) r^{l'} \qquad \left(k = \frac{|k_1|}{l}\right), \tag{11}$$

$|h(r)|$ étant borné, ce qui achève de démontrer la proposition I.

3. D'une façon plus générale considérons une équation différentielle linéaire homogène de la forme

$$Q_p(z) y^{(p)} + Q_{p-1}(z) y^{(p-1)} + \ldots + Q_0(z) y = 0, \tag{12}$$

dont les coefficients admettent le point à l'infini comme pôle; elle admettra au moins une solution de la forme

$$g(z) = z^\mu F(z), \tag{13}$$

$F(z)$ étant holomorphe à l'extérieur d'un cercle $z > R$ et ayant en

général un point essentiel isolé à l'infini. Si l'on pose alors

$$F(z) = G(z) + f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction entière et $G(z)$ une fonction régulière et nulle à l'infini, on voit sans peine que, pour les r ordinaires pour $f(z)$ et pour les z tels que $|f(z)|$ soit égal à son maximum $M(r)$, on a encore les relations

$$\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)} = \left[\frac{n(r)}{z}\right]^j \left\{1 + \frac{h(z)}{n^2} + \frac{h_1(z)}{r}\right\}.$$

La méthode précédente s'applique donc sans modifications, la *fonction entière $f(z)$ est encore ici du type exponentiel étoilé.*

On peut, dans certains cas, préciser ce résultat.

Supposons, par exemple, que l'équation (12) soit de rang 1 au sens de Poincaré, c'est-à-dire que le degré q de $Q_p(z)$ soit au moins égal à celui des autres fonctions $Q_j(z)$, et en désignant par c_j le coefficient de z^q dans Q_j, posons

$$\theta(k) = c_p k^p + c_{p-1} k^{p-1} + \ldots + c_0 = 0. \tag{14}$$

Les seules valeurs possibles pour l sont inférieures ou égales à 1 et tous les l sont égaux à 1 si $c_0 \neq 0$; pour $l = 1$ les valeurs possibles de k sont les racines k_j de l'équation (14). Si l'on effectue la transformation

$$y = e^{az} y_1,$$

on obtient une équation de la même forme en y_1, la transformée de l'équation (14) étant

$$\theta(k + a) = 0. \tag{15}$$

Si a est différent des nombres k_j, les racines de l'équation (15) sont différentes de zéro, on peut, en outre, choisir a pour que les racines distinctes aient des modules différents; alors l'égalité (11) a lieu pour $l = 1$ dans le voisinage d'une direction unique dont l'argument est l'argument changé de signe de l'une des racines de l'équation (15) en k. Faisons décrire à a un contour fermé entourant les racines de l'équation (14), l'argument de chaque quantité $k_j - a$ passe par toute valeur; les modules de ces quantités sont d'ailleurs tous différents, sauf pour un nombre fini de points

du contour; et en prenant deux contours différents, on voit que toute valeur peut être atteinte.

Il résulte de là, qu'étant donnée une direction d'argument φ quelconque, il existe une ligne dans le voisinage de cette direction sur laquelle

$$\frac{y'}{y} = a + \frac{y'_1}{y_1} = k_j + \frac{h(z)}{r^\delta},$$

et d'une façon générale

$$\frac{y^{(q)}}{y} = k_j^q + \frac{h(z)}{r^\delta},$$

k_j étant l'une des racines de l'équation (14) et les égalités ayant lieu, sauf dans certains intervalles exceptionnels. En ces mêmes points, on a

$$\log|y_1| = (k_j - a)z + h(z)r^\delta \qquad (\delta < 1),$$

d'où

$$\log|y| = \text{partie réelle de } (k_j z) + h(r)r^\delta.$$

Mais les intervalles exceptionnels semblent ici très gênants et, même dans ce cas particulier simple, il ne paraît pas que l'on puisse tirer de considérations de cette espèce des résultats relatifs aux arguments des zéros de la fonction entière $f(z)$.

4. Considérons maintenant une équation du premier ordre algébrique en z, y, y', qu'il sera commode d'écrire tout d'abord sous la forme

$$\Phi\left(y, \frac{zy'}{y}, z\right) = 0, \tag{16}$$

Φ étant un polynome de degré m en y. Soit

$$\psi\left(\frac{zy'}{y}, z\right) = \sum a_{pq}\left(\frac{zy'}{y}\right)^p z^q \qquad (0 \leq p \leq P,\ 0 \leq q \leq Q)$$

le coefficient de y^m dans Φ. Si l'on suppose que l'équation (16) a une solution entière en z ou plus généralement de la forme (13), et si l'on donne à z une valeur de module r ordinaire pour laquelle le module maximum est atteint, l'équation (16) s'écrit, après mise en facteur de y^m,

$$\psi\left(\frac{zy'}{y}, z\right) + \chi\left(\frac{1}{y}, \frac{zy'}{y}, z\right) = 0,$$

χ étant un polynome par rapport aux trois variables indiquées. Or, d'après les propositions A, B, toute expression de la forme

$$\left|\frac{1}{y^s}\left(\frac{zy'}{y}\right)^p z^q\right| < 2\,\frac{n^p r^q}{\mathrm{M}(r)^s} \qquad (s>0)$$

est inférieure à $r^{-\mathrm{K}}$, quelque grand que soit le nombre positif K, pourvu que r soit assez grand. Le module de χ est donc inférieur à $\mathrm{K}r^{-\mathrm{K}}$, et l'équation différentielle prend encore la forme

$$\Sigma a_{p,q}[1+\varepsilon_{p,q}(z)]n^p z^q = 0$$

avec

$$|\varepsilon_{p,q}(z)| < \frac{h(r)}{n^\gamma} + \frac{h_1(r)}{r},$$

n est déterminé par une équation algébrique dont les coefficients sont connus de façon approchée. Rien n'est changé aux raisonnements du n° 2, nous avons

$$n = k_1 r^l + h(r) r^\delta.$$

$-\frac{1}{l}$ étant la pente d'un des côtés de pente négative du polygone de Newton construit comme il a été indiqué plus haut et k_1 étant donné par l'équation correspondante ; l est au moins égal à $\frac{1}{\mathrm{P}}$. D'où ce résultat :

II. *Toute fonction entière ou fonction de la forme* (13) *vérifiant une équation différentielle du premier ordre, algébrique par rapport à* z, y, y', *est du type exponentiel étoilé.*

Ce résultat reste évidemment valable lorsque l'équation est seulement algébrique en y et y', les coefficients étant des fonctions admettant le point à l'infini pour pôle.

5. Ces considérations ne peuvent évidemment pas s'étendre à toutes les équations algébriques. La méthode n'a en effet réussi que parce que, lorsqu'on remplaçait dans l'équation $y^{(p)}$ par $y\left(\frac{n}{z}\right)^p$, *aucune réduction ne pouvait s'opérer*. Or il n'en sera pas toujours ainsi dans les équations non linéaires d'ordre supérieur au premier ; une réduction aura lieu, par exemple, si les seuls

termes en $y^2\frac{n^2}{z^2}$ proviennent de l'expression

$$yy''-y'^2.$$

Il est clair que, si de telles réductions ne s'opèrent pas dans les termes de plus haut poids, rien n'est changé au raisonnement précédent, la conclusion du n° 4 reste valable pour toute équation jouissant de cette propriété : lorsqu'on remplace $y^{(p)}$ par $y\left(\frac{n}{z}\right)^p$, et que l'on effectue les réductions dans les termes de plus haut degré en y, aucun coefficient ne s'annule par suite de ces réductions.

Mais on peut aller plus loin; la question revient en effet à la suivante :

Étant donnée une équation algébrique

$$\Sigma\lambda_{p,q}X^p z^q=0, \tag{17}$$

dont les coefficients variables $\lambda_{p,q}$ ont pour limites des nombres $a_{p,q}$ dont certains sont nuls, dans quelles conditions peut-on assurer que les premiers termes des développements de X en fonction de z auront pour limites les premiers termes de ces développements dans l'équation limite

$$\Sigma a_{p,q}X^p z^q=0. \tag{18}$$

Or c'est ce qui a manifestement lieu lorsque les polygones de Newton relatifs à ces deux équations sont les mêmes, tout au moins dans leur partie où la pente des côtés est négative, et conduisent à des équations correspondantes pour déterminer les coefficients des premiers termes; c'est-à-dire lorsque les points $B_{p,q}$ correspondant aux coefficients de l'équation (17) dont la valeur limite est zéro sont à gauche des côtés de pente négative du polygone relatif à (18).

Ce résultat est obtenu en supposant que certains des $\lambda_{p,q}$ s'évanouissent, mais sans rien supposer sur la façon dont ils tendent vers zéro. En réalité, il résulte des équations (5) que, lorsque dans un polynome homogène de degré q en $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(p)}}{y}$, le coefficient de $\left(\frac{n}{z}\right)^q$ disparaît, le module de ce polynome est inférieur à $\frac{n^q-\gamma}{r^q}$, γ pouvant être aussi voisin de $\frac{1}{2}$ que l'on veut. Il

s'ensuit que, si l'on construit le polygone de Newton à l'aide des points $B_{p,q}$ correspondant aux termes du polynome réduit (18), et si les points $B_{p-\frac{1}{2},q}$ de coordonnées $p-\frac{1}{2}$, q, correspondant aux termes évanouissants de degré p, q du polynome (17), se placent à gauche des côtés de pente négative de ce polygone, le premier terme des divers développements de $X(z)$ sera encore donné par la considération de l'équation (18); d'où ce résultat :

III. *Soit une équation différentielle dont le premier membre est un polynome par rapport à y et à ses* P *premières dérivées, les coefficients étant des fonctions de z admettant le point à l'infini pour pôle et jouissant de la propriété suivante : remplaçons $y^{(p)}$ par yX^p, et chaque coefficient par son terme de plus haut degré et considérons avant toute réduction le terme de plus haut degré en y dans le polynome en y, X, z ainsi obtenu, c'est un polynome* $R(X, z)$. *Effectuons les réductions dans le polynome* $R(X, z)$ *et construisons le polygone de Newton donnant l'ordre de* X *en fonction de z (pour les grandes valeurs de z), $X(z)$ étant définie par le polynome ainsi réduit; plaçons dans le plan de ce polygone les points* $B_{p-\frac{1}{2},q}\left(p-\frac{1}{2}, q\right)$ *correspondant aux termes de* $R(X, z)$ *qui se sont évanouis dans les réductions. Nous supposons que ces points se placent à gauche du polygone.*

Dans ces conditions, toute solution de la forme (13) *de l'équation différentielle est du type exponentiel étoilé.*

En utilisant d'une façon plus complète les résultats de mon Mémoire cité, on voit que l'on peut remplacer dans la construction précédente les points $B_{p-\frac{1}{2},q}$ par des points $B_{p-1,q}$ de coordonnées $p-1$, q; c'est ce qui résulte aussi des propriétés, convenablement complétées, de $\frac{y'}{y}$ et de ses dérivées démontrées par M. Boutroux dans sa Thèse.

6. Remarquons que la méthode précédente, qui montre que toutes les solutions entières d'une équation de la classe définie dans la proposition III sont à croissance régulière, donne en même

temps des conditions nécessaires pour qu'une solution de la forme (13) existe, on pourra dans certains cas montrer l'impossibilité de l'existence d'une telle solution. Considérons, par exemple, l'équation différentielle suivante rencontrée par M. Chazy dans sa Thèse (1) :

$$y''' = y^\lambda y'' - (\lambda + 1) y^{\lambda-1} y'^2 \qquad (\lambda \text{ positif et entier}),$$

il résulte de ce qui précède qu'aucune solution de cette équation ne peut être de la forme (13); c'est d'ailleurs bien évident si l'on écrit l'équation sous la forme

$$z^2\left[\frac{y''}{y} - (\lambda+1)\left(\frac{y'}{y}\right)^2\right] = \frac{y'''}{y}\frac{z^2}{y^\lambda};$$

le second membre tend vers zéro et le premier croît indéfiniment pour les valeurs donnant les égalités (5); donc, d'après M. Chazy, aucune solution ne peut être uniforme autour du point à l'infini.

La méthode employée ne peut être adaptée pour donner des résultats dans le cas laissé de côté où les réductions font disparaître les termes importants; si l'on considère par exemple l'expression

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2;$$

elle ne se comporte plus d'une manière déterminée dans le voisinage des valeurs z où y atteint son maximum; c'est ainsi qu'elle est nulle pour $y = e^{az}$, égale à $-\frac{1}{y^2}$ pour $y = \sin z$, et à $-[1+\varepsilon(z)]\frac{n(r)}{2z^2}$ pour $y = \operatorname{ch}\sqrt{z}$; la considération de telles valeurs ne peut plus rien apprendre sur la fonction considérée et c'est à l'étude générale dans tout le plan qu'il faut avoir recours. Cela devait d'ailleurs être prévu, car il est manifeste que la transformation $w^{\int y\,dz}$ effectuée sur une équation appartenant à la classe définie dans l'énoncé III conduit à une équation n'appartenant plus à cette classe et admettant une solution entière d'ordre infini, il n'est donc pas possible que les dérivées successives de $\frac{y'}{y}$ soient

(1) *Acta mathematica*, t. XXXIV.

des expressions rationnelles simples en n et z dans le voisinage des points envisagés dans la méthode.

Je remarquerai encore qu'il est manifeste que la méthode ne peut rien donner, en général, dans le cas des équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières, car le module de telles fonctions ne restera pas, en général, comparable à lui-même sur un cercle $|z| = r$; cependant il est un cas où l'on peut encore obtenir ce résultat, c'est celui où les coefficients sont des fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ dont les zéros sont très réguliers, ce qui est le cas pour les fonctions obtenues à partir de la fonction exponentielle. Dans ce cas, le module de la fonction est comparable à son maximum, sauf dans le voisinage des zéros; on pourra encore obtenir l'ordre de la fonction par une méthode directe immédiate. Soit, par exemple, l'équation

$$y'' + f_1(z)y' + f_2(z)y = 0,$$

$f_1(z)$ étant d'ordre $\rho < \frac{1}{2}$, $f_2(z)$ d'ordre $\rho' < \rho$ et les zéros étant très réguliers; soit $M(r)$ le maximum du module de $f_1(z)$, y sera une fonction entière d'ordre infini dont le maximum du module sera de la forme

$$e^{M(r)^\delta} \qquad (\cos \pi\rho < \delta < 1).$$

On pourra prendre pour $f_1(z)$ et $f_2(z)$ les fonctions $E_\alpha(z)$ de M. Lindelöf ou des fonctions analogues.