BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MENTRÉ

Invariants projectifs des congruences *W*

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 202-212
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__202_1>

INVARIANTS PROJECTIFS DES CONGRUENCES W;

PAR M. PAUL MENTRÉ.

I. *Généralités.* — Les congruences W, pour lesquelles les lignes asymptotiques des surfaces focales se correspondent, jouent un rôle important en géométrie réglée projective. Je me propose de donner quelques propriétés des invariants projectifs d'une congruence W. J'emploierai la méthode de M. Cartan [1], le langage de M. Waelsch [2], les notations de ma Thèse [3].

Soit un repère mobile $a_1 a_2 a_3 a_4$ de l'espace projectif ponctuel. On peut considérer que l'espace réglé est rapporté à un système de six complexes linéaires spéciaux :

$$r = [a_1 a_2], \qquad r_1 = [a_1 a_3], \qquad r_2 = [a_1 a_4],$$
$$r' = [a_3 a_4], \qquad r'_1 = [a_4 a_2], \qquad r'_2 = [a_2 a_3].$$

Le déplacement infiniment petit du repère est caractérisé par

$$da_i = \omega_{i1} a_1 + \omega_{i2} a_2 + \omega_{i3} a_3 + \omega_{i4} a_4;$$
$$d[a_i a_j] = [da_i a_j] + [a_i da_j];$$
$$dr = (\omega_{11} + \omega_{22}) r + \omega_{23} r_1 + \omega_{24} r_2 + \omega_{14} r'_1 - \omega_{13} r'_2.$$

Étant donnés deux complexes linéaires dont les symboles sont

$$\alpha = \rho r + \rho_1 r_1 + \ldots \qquad \text{et} \qquad \beta = \sigma r + \sigma_1 r_1 + \ldots,$$

ces complexes linéaires sont conjugués si l'on a

$$\alpha \mid \beta = \rho\sigma' + \rho'\sigma + \rho_1\sigma'_1 + \rho'_1\sigma_1 + \rho_2\sigma'_2 + \rho'_2\sigma_2 = 0.$$

II. *Rayons centraux. Complexe osculateur.* — Donnons-nous une congruence à nappes focales distinctes Σ_1 et Σ_2. Associons à la droite génératrice r un repère soumis aux restrictions projectives suivantes : les points a_1 et a_2 sont les foyers; les plans $[a_1 a_2 a_3]$ et $[a_1 a_2 a_4]$ sont tangents aux nappes focales en a_1 et en a_2, de sorte que les droites $[a_1 a_3]$ et $[a_2 a_4]$ touchent les nappes focales et sont par suite des « droites focales » tandis que les droites $[a_1 a_4]$ et $[a_2 a_3]$ sont des « rayons centraux ». Nous aurons

$$\omega_{14} = 0, \qquad \omega_{23} = 0, \qquad \omega'_{14} = [\omega_1 \omega_{34}] - [\omega_3 \omega_{12}] = 0,$$
$$\omega'_{23} = -[\omega_1 \omega_{21}] + [\omega_3 \omega_{43}] = 0,$$

---

[1] *Voir* notamment le Mémoire sur *Les Variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien* (*Bull. des Sciences mathématiques*, t. XLVII, 1919, p. 125-160, et t. XLVIII, 1920, p. 132-208).

[2] *Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen* (*Wiener Sitzungsberichte*, t. 100, 2a, 1891, p. 158-219).

[3] *Les Variétés de l'espace réglé* (*Les Presses universitaires*, Paris, 1923).

si nous posons pour abréger :

$$\omega_{13} = \omega_1 \qquad \text{et} \qquad \omega_{24} = \omega_3.$$

Nous sommes conduits à écrire :

$$\omega_{34} = u\,\omega_1 + v\,\omega_3; \qquad \omega_{12} = -v\,\omega_1 + w\,\omega_3; \qquad \omega_{21} = u'\,\omega_1 + v'\,\omega_3;$$
$$\omega_{43} = -v'\,\omega_1 + w'\,\omega_3.$$

Une modification infinitésimale du repère entraîne :

$$\frac{\delta u}{u} = 2e_{33} - e_{11} - e_{44}; \qquad \frac{\delta u'}{u'} = e_{22} + e_{33} - 2e_{11};$$
$$\frac{\delta w}{w} = e_{11} + e_{44} - 2e_{22}; \qquad \frac{\delta w'}{w'} = 2e_{44} - e_{22} - e_{33};$$
$$\delta\left(\frac{uw'}{wu'}\right) = \delta\lambda = 0; \qquad \delta v = v(e_{33} - e_{22}) + e_{32}; \qquad \delta v' = v'(e_{44} - e_{11}) - e_{41}.$$

En général, aucun des coefficients u, u', w, w' ne sera donc nul. Supposons qu'il en soit ainsi, ce qui signifie que les deux nappes focales sont des surfaces non développables. Donnons au repère la normalisation intrinsèque qui consiste à annuler v et v', ce qui annule e_{32} et e_{41}. On a donc alors :

$$\delta a_1 = e_{11}a_1; \qquad \delta a_2 = e_{22}a_2; \qquad \delta a_3 = e_{33}a_3 + e_{31}a_1;$$
$$\delta a_4 = e_{44}a_4 + e_{42}a_2.$$

Les droites r_1 et r'_1 sont immobilisées. Il est aisé d'ailleurs d'avoir la signification géométrique de ces droites; en effet, r et r_1 sont deux tangentes conjuguées de Σ_1, tandis que r et r'_1 sont deux tangentes conjuguées de Σ_2 (cela résulte immédiatement de cette remarque que les deux « directions de développables » $\omega_1 = 0$ et $\omega_3 = 0$ sont conjuguées sur les deux nappes focales). Les droites r_1 et r'_1 sont donc les « droites focales principales ». On a d'ailleurs :

$$-dr_1 \mid dr_1 = u.w.dr \mid dr \qquad \text{et} \qquad -dr'_1 \mid dr'_1 = u'.w'.dr \mid dr.$$

Par suite, lorsque r décrit une surface développable, il en est de même de r_1 et de r'_1.

Les complexes linéaires tangents γ sont tels que l'on a $\gamma \mid dr = 0$. Ils constituent donc le réseau singulier :

$$\gamma = \rho r + \rho_1 r_1 + \rho'_1 r'_1.$$

Les droites communes du réseau sont manifestement les « rayons centraux » puisque

$$\gamma \mid r = \gamma \mid r_2 = \gamma \mid r'_2 = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\gamma \mid dr_2 = \rho\,\omega_1 + (\rho'_1 w' - \rho_1 w)\,\omega_3.$$

Par suite, $\gamma \mid dr_2$ est nul pour $\rho = 0$ et $\rho_1 = w'$, $\rho'_1 = w$. Il existe donc un complexe linéaire tangent qui contient non seulement les rayons centraux relatifs à a_1, a_2, mais ceux relatifs à $(a_1 + \Delta a_1)$; c'est le « complexe d'accompagnement » (Begleitcomplex) du premier foyer γ_1. On trouve de même un complexe d'accompagnement du deuxième foyer γ_2. Comme l'on a

$$\gamma_1 = w' r_1 + w r'_1 \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = u' r_1 + u r',$$

on en déduit que les rayons focaux principaux sont conjugués par rapport à chacun des complexes d'accompagnement.

Les deux complexes d'accompagnement sont confondus lorsque l'on a $wu' = uw'$ ou $\lambda = 1$. Il est aisé de voir qu'alors les directions asymptotiques des surfaces focales se correspondent car elles sont déterminées par les équations différentielles

$$[a_1 a_2 a_3 d^2 a_1] = u(\omega_1)^2 + w(\omega_3)^2 = 0$$

et

$$[a_1 a_2 a_4 d^2 a_2] = u'(\omega_1)^2 + w'(\omega_3)^2 = 0.$$

Nous retrouvons ainsi l'un des résultats obtenus par M. Waelsch: *une congruence* W *admet pour chacune de ses génératrices un complexe linéaire qui contient les rayons centraux des deux foyers et des foyers infiniment voisins.*

Il est aisé de voir que le complexe double d'accompagnement γ_0 est osculateur à la congruence W. On a en effet :

$$\gamma_0 \mid d^2 r = \omega_3\,\gamma_0 \mid dr_2 - \omega_1\,\gamma_0 \mid dr'_2 = 0.$$

III. *Normalisation partielle intrinsèque du repère.* — Une normalisation intrinsèque du repère associé à la génératrice d'une congruence W s'impose : celle qui égale à $+1$ ou -1 les quatre coefficients u, w, u', w'. Nous allons choisir le repère de manière à avoir $u = w' = 1$ et $u' = w = -1$. (Ce choix de la normalisation n'a d'autre but que de se prêter à des remarques géométriques faites à propos d'éléments réels. Une normalisation plus symétrique, mais équivalente, consisterait à égaler à $+1$ les quatre coefficients intéressés.)

Les directions asymptotiques en correspondance seront fournies par $\omega_1 + \omega_3 = 0$ et $\omega_1 - \omega_3 = 0$. Ce seront respectivement :

$$r + r_1 \quad \text{et} \quad r + r'_1, \qquad r - r_1 \quad \text{et} \quad r - r'_1.$$

Remarquons que les points géométriques a_3 et a_4 auront des positions « arbitraires » respectivement sur r_1 et sur r'_1 puisque e_{31} et e_{42} ne seront pas nuls.

Le complexe osculateur aura pour symbole $\gamma_0 = r_1 - r'_1$.

Soient m le point de rencontre d'une tangente asymptotique en a_1 avec la droite r'_2 et n le point de rencontre d'une tangente asymptotique en a_2 avec la droite r_2. On peut, d'une infinité de manières, sans modifier les positions géométriques des sommets du repère, choisir les symboles a_i de façon que l'on ait

$$m = a_1 + a_4, \qquad n = a_2 + a_3.$$

On pourra encore ensuite multiplier a_1 et a_4 par un même coefficient, les symboles a_2 et a_3 par un même coefficient; cette modification des symboles a_i laisse fixe les complexes linéaires $(r_1 + \mathrm{K} r'_1)$; cela montre que le complexe osculateur est déjà représenté par son symbole normal $r_1 - r'_1$. Cela résulte d'ailleurs de ce fait que le choix du repère impose :

$$w = -\frac{1}{u}, \qquad u' = -u, \qquad w' = +\frac{1}{u}.$$

On a donc

$$da_1 = \omega_{11} a_1 - \frac{\omega_3}{u} a_2 + \omega_1 a_3; \qquad da_2 = -u\,\omega_1 a_1 + \omega_{22} a_2 + \omega_3 a_4.$$

Pour achever la normalisation partielle, il faut réduire u à l'unité. Il suffira, comme on le vérifie aisément, de poser :

$$a_1 = \alpha_1 \overline{a}_1, \qquad a_2 = \alpha_2 \overline{a}_2, \qquad a_3 = \alpha_1 \overline{a}_3, \qquad a_4 = \alpha_2 a_4,$$

avec $\alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{u}$.

De ce qui précède résulte cette remarque intéressante : il existe déjà un repère intrinsèque bien déterminé pour chaque choix arbitraire des positions géométriques de a_3 et a_4 sur r_1 et r'_1, si l'on s'impose la restriction indifférente $[a_1 a_2 a_3 a_4] = 1$.

IV. *Invariants principaux. Invariants de déformation projective de deuxième ordre.* — Après la normalisation précédente on a

$$(1) \qquad \omega_{34} = \omega_1, \quad \omega_{43} = \omega_3, \quad \omega_{12} = -\omega_3, \quad \omega_{21} = -\omega_1, \quad \omega_{14} = 0, \quad \omega_{23} = 0.$$

Ce système de Pfaff entraîne quatre équations quadratiques extérieures :

$$(2) \quad \begin{cases} [\omega_1(\omega_{32} - \omega_{41})] + [\omega_3(\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44})] + [\omega_3(\omega_{32} - \omega_{41})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{32} + \omega_{41})] + [\omega_3(\omega_{11} - 3\omega_{22} - \omega_{33} + 3\omega_{44})] = 0, \\ [\omega_1(-3\omega_{11} + \omega_{22} + 3\omega_{33} - \omega_{44})] + [\omega_3(\omega_{32} + \omega_{41})] = 0. \end{cases}$$

Par suite, les cinq expressions de Pfaff

$$\omega_{32} - \omega_{41}, \quad \omega_{32} + \omega_{41}, \quad \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}, \quad \omega_{33} - \omega_{11}, \quad \omega_{44} - \omega_{22}$$

s'expriment linéairement au moyen des expressions fondamentales ω_1 et ω_3. La seule transformation finie permise au repère est définie par

$$a_1 = k\overline{a_1}, \qquad a_2 = k\overline{a_2}, \qquad a_3 = k\overline{a_3} - k\alpha\overline{a_1}, \qquad a_4 = k\overline{a_4} - k\beta\overline{a_2}.$$

Les cinq expressions de Pfaff précédentes et celles fondamentales sont susceptibles de transformations. Tandis que $\omega_{32} - \omega_{41}$ et $\omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}$, ω_1 et ω_3 sont invariantes, on a

$$(3) \quad \begin{cases} \overline{\omega_{33} - \omega_{11}} = \omega_{33} - \omega_{11} + 2\alpha\omega_1, \qquad \overline{\omega_{44} - \omega_{22}} = \omega_{44} - \omega_{22} + 2\beta\omega_3, \\ \overline{\omega_{32} + \omega_{41}} = \omega_{32} + \omega_{41} - 2\beta\omega_1 - 2\alpha\omega_3. \end{cases}$$

Nous sommes ainsi conduits à écrire, en désignant par λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 des invariants et par h_1, h_2 des coefficients variables :

$$(4) \quad \begin{cases} \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44} = 2\lambda_1\omega_1 + 2\lambda_2\omega_3, \\ \omega_{32} - \omega_{41} = 2\lambda_2\omega_1 + 2\lambda_1\omega_3, \\ \omega_{33} - \omega_{11} = 2h_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_3, \\ \omega_{44} - \omega_{22} = 2\mu_1\omega_1 + 2h_2\omega_3, \\ \omega_{32} + \omega_{41} = (6\mu_2 - 2h_2)\omega_1 + (6\mu_1 - 2h_1)\omega_3. \end{cases}$$

La normalisation imposée au repère a donc mis en évidence quatre invariants fondamentaux λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2.

La solution générale du système (2) exige six coefficients, en vertu des équations (4). Comme on a $s_1 = 4$, $s_2 = 1$, on en déduit que :

La congruence W la plus générale dépend d'une seule fonction arbitraire de deux arguments.

Les valeurs numériques des invariants fondamentaux λ et μ associés aux différentes droites d'une congruence W arbitraire ne peuvent donc manifestement pas être quelconques. Les deux premières équations (4) entraînent d'ailleurs :

$$\left\{\begin{aligned} [d\lambda_1 \omega_1] + [d\lambda_2 \omega_3] &= 2(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)[\omega_1\omega_3], \\ [d\lambda_2 \omega_1] + [d\lambda_1 \omega_3] &= 6(\mu_1\lambda_1 - \mu_2\lambda_2)[\omega_1\omega_3]. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Posons alors :

$$d\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha \omega_1 + \lambda''_\alpha \omega_3 \qquad (\alpha = 1, 2). \tag{6}$$

λ'_α et λ''_α seront les invariants dérivés de λ puisque les valeurs de $d\lambda_1$, ω_1 et ω_3 sont indépendantes de la façon dont on achève le choix du repère. Les équations (5) exigent :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda'_2 - \lambda''_1 &= 2(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1), \\ \lambda'_1 - \lambda''_2 &= 6(\mu_1\lambda_1 - \mu_2\lambda_2). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Il est donc naturel de réserver le nom « d'invariants principaux » aux quantités λ_1 et λ_2, puisque μ_1 et μ_2 sont imposés lorsque λ_1, λ_2 et leurs dérivés sont imposés. Les équations (7) montrent qu'en particulier si les invariants λ_1 et λ_2 sont égaux sans être nuls, les invariants μ_1 et μ_2 doivent aussi être égaux.

On peut appeler μ_1 et μ_2 les « invariants de déformation » car, dans une application projective du deuxième ordre, ces invariants ont les mêmes valeurs numériques sur les droites en correspondance, puisque l'on a en particulier :

$$\Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_3 = \omega_3, \qquad \Omega_{33} - \Omega_{11} = \omega_{33} - \omega_{11}, \qquad \Omega_{44} - \Omega_{22} = \omega_{44} - \omega_{22}.$$

D'ailleurs

$$\omega'_1 = 2\mu_2[\omega_1\omega_3] \qquad \text{et} \qquad \omega'_3 = -2\mu_1[\omega_1\omega_3]. \tag{8}$$

Ces deux équations montrent l'importance du rôle joué par μ_1

et μ_2 dans le choix des lignes coordonnées, c'est-à-dire dans le choix des formes linéaires ω_1 et ω_3 en dp_1 et dp_2. Remarquons de plus qu'une déformation projective singulière respecte les valeurs numériques des quatre invariants λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, car on doit avoir en outre

$$\Omega_{22} - \Omega_{11} = \omega_{22} - \omega_{11}$$

et, par suite,

$$\Omega_{11} - \Omega_{22} + \Omega_{33} - \Omega_{44} = \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{44}.$$

V. *Normalisation intrinsèque définitive du repère.* — Pour avoir un repère définitif il suffit de s'imposer les positions des points géométriques a_3 et a_4, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'à choisir α et β ou, ce qui revient au même, h_1 et h_2. Il importe de remarquer que l'on peut effectuer une normalisation intrinsèque de plusieurs manières essentiellement distinctes. On pourra, par exemple, grâce aux équations (3), s'imposer :

$$(9)\quad \begin{cases} \omega_{32} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_{41} = 0 \quad \text{ou} \quad [\omega_{32}\omega_1] = 0 \quad \text{et} \quad [\omega_{41}\omega_3] = 0 \\ \text{ou} \quad [(\omega_{33} - \omega_{11})\,\omega_3] = [(\omega_{44} - \omega_{22})\,\omega_1] = 0. \end{cases}$$

Aussi convient-il dans une étude générale de se contenter de la normalisation partielle, celle complète devant s'adapter aux diverses applications.

Si l'on veut étudier les propriétés de la congruence décrite par la droite focale principale r_1, il conviendra d'adopter la première des normalisations (9). Supposons, en effet, que ω_{32} soit nulle. Il en résultera que le point $a_3 + da_3$ sera situé dans le plan $[a_1 a_3 a_4]$; par suite la droite r_1 tangente en a_1 à Σ_1 restera tangente en a_3 à une nappe focale Σ_3; donc a_3 sera en coïncidence avec le deuxième foyer f_3 de la congruence (r_1), tandis que a_4 sera en coïncidence avec le point g_4 commun au plan tangent à Σ_3 en f_3 et à la droite r'_1. De même pour annuler ω_{41} il suffit de prendre a_4 en coïncidence avec le foyer f_4 de la congruence (r'_1) et a_3 en coïncidence avec le point g_3 situé sur r_1, dans le plan tangent en f_4 à Σ_4.

Quand on désire considérer l'applicabilité projective du deuxième ordre, il convient d'adopter pour le repère a_i de la première congruence la dernière des normalisations (9), car cette même normalisation complète est alors imposée au repère A_i de la deuxième congruence. Nous désignerons par m_3 et m_4 les points avec lesquels a_3 et a_4 viennent respectivement en coïncidence dans ces conditions.

Il est évident que les différentes positions intrinsèques de a_3 et a_4 dépendent uniquement de l'une d'entre elles et des valeurs numériques des invariants $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. A ce propos il est intéressant de remarquer que les rapports anharmoniques $\xi_1 = (f_3, g_3, m_3, a_1)$ et $\xi_2 = (g_4, f_4, m_4, a_2)$ sont respectivement égaux à

$$\xi_1 = \frac{3\mu_1 - \lambda_1}{3\mu_1 + \lambda_1} \quad \text{et} \quad \xi_2 = \frac{3\mu_2 - \lambda_2}{3\mu_2 + \lambda_2}.$$

On en déduit la signification des cas particuliers pour lesquels un invariant λ ou μ est nul : si $\lambda_1 = 0$, f_3 coïncide avec g_3 ; si $\mu_1 = 0$, le segment $\overline{g_3 f_3}$ partage harmoniquement le segment $\overline{m_3 a_1}$. On voit en outre que dans le cas particulier pour lequel $\lambda_1 = \lambda_2$ (et par suite $\mu_1 = \mu_2$) on a $\xi_1 = \xi_2$.

Donnons un exemple de choix complet du repère. Imposons-nous $\omega_{32} = 0$. Cela exige

$$(4\,bis) \qquad h_1 = 3\mu_1 + \lambda_1, \qquad h_2 = 3\mu_2 + \lambda_2.$$

D'ailleurs on doit satisfaire à la nouvelle équation quadratique

$$(2\,bis) \qquad (\omega_{32})' = [\omega_1 \omega_{42}] + [\omega_3 \omega_{31}] = 0.$$

On est ainsi conduit à poser

$$(4\,ter) \qquad \omega_{42} = \nu_1 \omega_1 + \nu \omega_3, \qquad \omega_{31} = \nu \omega_1 + \nu_2 \omega_3.$$

On introduit ainsi trois nouveaux invariants fondamentaux.

Une congruence W *possède donc sept invariants projectifs fondamentaux.*

VI. *Caractéristiques du complexe osculateur.* — Nous allons trouver d'autres propriétés des invariants λ, μ en considérant la famille des complexes osculateurs γ_0. Donnons au repère la seule normalisation partielle. Nous aurons

$$(10) \qquad d\gamma_0 = dr_1 - dr'_1 = (\omega_{22} + \omega_{44})\gamma_0 + (2\lambda_2\omega_1 + 2\lambda_1\omega_3)\, r + (2\lambda_1\omega_1 + 2\lambda_2\omega_3)\, r_1.$$

Pour immobiliser γ_0, il faut annuler $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_3$ et $\lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_3$. Il y a donc trois cas à distinguer. En général, il faudra annuler ω_1

et ω_3 et par suite dp_1 et dp_2. Dans le cas particulier pour lequel $\lambda_1 = \pm \lambda_2 \neq 0$, il suffira d'annuler $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3$; par suite le complexe osculateur ne dépendra que d'un paramètre au lieu de deux. Enfin, dans le cas très particulier pour lequel λ_1 et λ_2 sont nuls, le complexe osculateur sera fixe; comme la droite r se déplace dans γ_0, il en résulte que les droites de la congruence considérée appartiennent à un complexe linéaire fixe. (La réciproque est connue : si une congruence est formée des droites communes à un complexe linéaire et à un complexe quelconque, le complexe linéaire sera manifestement osculateur, surosculateur, ... et par suite la congruence sera W.)

Plaçons-nous d'abord dans le cas général. Les droites communes aux deux complexes γ_0 et $\gamma_0 + d\gamma_0$ doivent rencontrer les droites r et r_1 et être situées dans γ_0; elles doivent donc rencontrer les trois droites r, r_1, r'_1. La « demi-quadrique » caractéristique est dégénérée; elle est formée de l'ensemble des rayons centraux. D'où le résultat suivant :

L'ensemble des rayons centraux de chacune des deux surfaces focales Σ_α *d'une congruence* W *générale constitue un complexe* H_α *qui est enveloppé par le complexe linéaire osculateur* γ_0. *Chaque droite* r *de la congruence* W *appartient à* H_α *et le point* a_α *qui est manifestement un foyer inflexionnel de* r *est un foyer inflexionnel double ou triple parce que la caractéristique de* γ_0 *est dégénérée* (¹).

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier pour lequel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Nous aurons :

$$(10\,bis) \qquad d\gamma_0 = (\omega_{22} + \omega_{44})\gamma_0 + 2\lambda(\omega_1 + \omega_3)(r + r_1).$$

La congruence linéaire caractéristique V est formée par les droites qui sont situées dans γ_0 et qui rencontrent $r + r_1$. Les directrices de cette congruence caractéristique non spéciale sont donc les deux directions asymptotiques $r + r_1$ et $r + r'_1$. D'ailleurs la congruence V et par suite ses directrices ne peuvent dépendre manifestement que du paramètre de position de γ_0. D'où le résultat :

(¹) *Voir* ma Note : *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 941.

Lorsque le complexe osculateur d'une congruence W *ne dépend que d'un paramètre, les deux surfaces focales* Σ_1 *et* Σ_2 *sont réglées et la congruence* W *établit une correspondance entre les droites de* Σ_1 *et* Σ_2. *L'ensemble des droites qui s'appuient sur des génératrices correspondantes de* Σ_1 *et* Σ_2, *constitue un complexe* K *qui est enveloppé par le complexe osculateur. Les deux foyers inflexionnels doubles du complexe* K *sont toujours situés sur les nappes focales.*