BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Fonctions $\Theta(x)$ de Jacobi et $\wp(u)$ de Weierstrass

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 62-73

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__62_1>

FONCTIONS $\theta(x)$ DE JACOBI ET $P(u)$ DE WEIERSTRASS:

Par M. A. Pellet.

1. Je me propose de déduire les propriétés essentielles de la fonction $P(u)$ de Weierstrass de l'étude de la fonction $\theta(x)$ de

Jacobi, en appliquant la théorie des équations majorantes, que je commencerai par développer.

J'appelle *équation majorante* d'ordre m de l'équation

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

l'équation qui, ordonnée, offre deux variations de signes

$$2A_m X^m - F(X) = 0,$$

où $A_m = |a_m|$, et $F(X)$ est une fonction majorante de $f(x)$; ainsi

$$F(X) \geqq |f(x)| \quad \text{si} \quad X = |x|.$$

Supposons que l'équation majorante d'ordre m ait deux racines positives, X_1 et $X_2 > X_1$; et celle d'ordre m_1 également deux racines positives X_3 et $X_4 > X_3$, m_1 étant supérieur à m; X_3 sera supérieur à X_2. En effet, on aura les deux inégalités

$$A_m X_2^m > A_{m_1} X_2^{m_1}, \qquad A_{m_1} X_3^{m_1} > A_m X_3^m;$$

d'où, par multiplication,

$$X_3^{m_1-m} > X_2^{m_1-m}.$$

Pour les valeurs de x dont le module est compris entre X_1 et X_2, le logarithme de $\frac{f(x)}{x^m}$, $l\frac{f(x)}{x_m}$, est développable suivant les puissances positives et négatives de x, car

$$\frac{f(x)}{x^m} = a_m\left(1 + \frac{f(x) - a_m x^m}{a_m x^m}\right),$$

et une fonction majorante de $\frac{f(x) - a_m x^m}{a_m x^m}$, savoir $\frac{F(X) - A_m X^m}{A_m X^m}$, est inférieure à 1 entre ces limites. Nous poserons

$$l\frac{f(x)}{x^m} = l\,a_m + G + H, \qquad X_2 > |x| > X_1,$$

G ne contenant que des puissances positives de x et un terme indépendant de x, H que des puissances négatives de x; ces fonctions s'obtiennent par des opérations algébriques.

De même $l \dfrac{f(x)}{x^{m_1}}$ est développable suivant les puissances positives et négatives de x, pour les valeurs de x dont le module est compris entre X_3 et X_4 ; nous poserons

$$l \frac{f(x)}{x^{m_1}} = l\, a_{m_1} + G_1 + H_1, \qquad X_4 > |x| > X_3,$$

G_1, H_1 analogues à G, H.

Soit

$$P(x) = x^{\nu} + p_1 x^{\nu-1} + \ldots + p_{\nu}$$

le produit des facteurs binomes correspondant aux racines de $f(x) = 0$, comprises entre les cercles de rayons X_2 et X_3, en tenant compte de leur degré de multiplicité; le rapport

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \varphi(x)$$

est développable suivant les puissances positives et négatives de x pour $X_2 > (x) > X_1$, car $\frac{1}{P}$ et lP sont développables suivant les puissances positives de x pour $|x| < X_2$, puisque les modules des racines de $P(x) = 0$ sont supérieurs à X_2, et l'on a

$$(1) \qquad l \frac{\varphi(x)}{x^{m}} = l\, a_{m} + G + H - l P, \qquad X_2 > |x| > X_1;$$

mais le second membre étant ordonné suivant les puissances de x, les termes semblables de G et lP réduits entre eux, l'égalité subsiste pour tous les autres points situés dans la couronne comprise entre les cercles de rayons X_1 et X_4, car le premier membre est holomorphe en tous les points de cette couronne. De même $l \dfrac{P(x)}{x^{\nu}}$ est développable suivant les puissances négatives de x, pour $|x| > X_3$, et l'on a, en raisonnant de même,

$$(2) \qquad l \frac{\varphi(x)}{x^{m_1-\nu}} = l\, a_{m_1} + G_1 + H_1 - l \frac{P}{x^{\nu}}, \qquad X_4 > |x| > X_1,$$

$l \dfrac{P}{x^{\nu}}$ étant développé suivant les puissances décroissantes de x, et la différence $H_1 - l \dfrac{P}{x^{\nu}}$ ordonnée, les coefficients réduits.

Les deux formules (1) et (2) sont identiques, sans quoi, par soustraction, on en déduirait lx en série de puissances de x, donc $\nu = m_1 - m$, puis

$$l\,a_m + G - l\,P = l\,a_{m_1} + G_1, \qquad H = H_1 - l\frac{P}{x^\nu};$$

par suite,

$$P = \frac{a_m}{a_{m_1}} e^{G - G_1} = x^{m_1 - m} e^{H_1 - H}, \qquad \varphi(x) = a_{m_1} x^m e^{G_1 + H}, \qquad X_4 > |x| > X_1;$$

dans le cas où $f(x)$ est une fonction holomorphe pour $x = 0$, on a un théorème de Weierstrass ([1]).

2. Soit $f_1(x)$ une fonction de même forme que $f(x)$, convergente pour $|x|$ compris entre X_1 et X_4. D'après la théorie de la décomposition en fractions simples, on peut poser

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{P_1(x)}{P(x)} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \qquad X_4 > |x| > X_1,$$

$P_1(x)$ étant un polynome de degré égal ou inférieur à $\nu - 1$ et $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ une fonction développable suivant les puissances positives et négatives de x, d'après le théorème de Laurent.

Posons

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = G_2 + H_2, \qquad X_2 > |x| > X_1,$$

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = G_3 + H_3, \qquad X_4 > |x| > X_3,$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = G_4 + H_4, \qquad X_4 > |x| > X_1,$$

les H ne contenant que des puissances négatives de x, les G des puissances positives ou nulles.

On en déduit

$$H_2 = H_4, \qquad G_2 = G_4 + \frac{P_1}{P}, \qquad X_2 > |x| > X_1,$$

$\frac{P_1}{P}$ étant développé suivant les puissances positives de x, puis

$$G_3 = G_4, \qquad H_3 = \frac{P_1}{P} + H_4, \qquad X_4 > |x| > X_3,$$

([1]) *Des équations majorantes* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1909).

$\frac{P_1}{P}$ étant développé cette fois suivant les puissances négatives de x.

En définitive,

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = G_3 + H_2, \qquad X_4 > |x| > X_1$$

et

$$\frac{P_1}{P} = H_3 - H_2,$$

le module de x étant supérieur à X_3,

$$\frac{P_1}{P} = G_2 - G_3,$$

le module de x étant inférieur à X_2.

On peut déduire de ces formules une démonstration de la formule de Lagrange : *Sur un mode de séparation des racines et la formule de Lagrange* (*Bulletin des Sciences mathématiques* de G. Darboux, 1881).

3. La fonction de Jacobi, $\theta(x)$,

$$\theta(x) = 1 + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + q^4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \ldots$$
$$+ q^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} x^n,$$

convergente pour toutes les valeurs de x, si le module de q, Q est inférieur à 1, jouit de la propriété

$$\theta(x) = q^{m^2} x^m \theta(q^{2m} x).$$

Les équations majorantes de tous les ordres ont deux racines positives si Q est inférieur à la racine positive de l'équation

$$\frac{1}{2} = Q + Q^4 + Q^9 + \ldots + Q^{n^2} + \ldots,$$

qui est comprise entre 0,45593 et 0,45594. On en déduit que toutes les racines de l'équation $\theta(x) = 0$ sont comprises dans la formule $x = -q^{2m+1}$, d'abord lorsque $Q < 0,45593$, et, par continuité, lorsque $Q < 1$.

Observant que $\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \theta(x)$, posons

$$l\,\theta(x) = g_0 + \mathcal{G}(x) + \mathcal{G}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \frac{1}{Q} > |x| > Q,$$

avec

$$\mathcal{G}(x) = g_1 x + g_2 x^2 + \ldots + g_n x^n + \ldots + |x| < \frac{1}{Q},$$

il vient

$$l\,\frac{\theta(x)}{x^m} = m^2 l\,q + g_0 + \mathcal{G}(q^{2m}x) + \mathcal{G}\left(\frac{1}{q^{2m}x}\right), \quad \frac{1}{Q^{2m+1}} > |x| > \frac{1}{Q^{2m-1}},$$

pour toute valeur entière, positive ou négative, de m.

Faisant, dans les formules du n° 1, $m = 0$ et $m_1 = 1$, il vient

$$x + \frac{1}{q} = \frac{1}{q}\,e^{\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(q^2 x)}, \qquad |x| < \frac{1}{Q},$$

$$x + \frac{1}{q} = x\,e^{\mathcal{G}\left(\frac{1}{q^2 x}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{1}{x}\right)}, \qquad |x| > \frac{1}{Q}.$$

Ces deux identités donnent chacune

$$g_1 = \frac{q}{1 - q^2}, \qquad g_2 = -\frac{q^2}{2(1 - q^4)}, \qquad \ldots,$$

$$g_n = (-1)^{n-1}\,\frac{q^n}{n(1 - q^{2n})}, \qquad \ldots,$$

et laissent g_0 indéterminé. Remplaçant ensuite m et m_1 par $-m$ et m, on a

$$\mathrm{P} = (x + q)\left(x + \frac{1}{q}\right)\cdots(x + q^{2m-1})\left(x + \frac{1}{q^{2m-1}}\right);$$

$$\varphi(x) = q^{m^2} x^{-m}\, e^{g_0}\, e^{\mathcal{G}(q^{2m}x) + \mathcal{G}\left(q^{2m}\frac{1}{x}\right)},$$

d'où enfin

$$\theta(x) = e^{g_0}(1 + qx)\left(1 + \frac{q}{x}\right)\cdots(1 + q^{2m-1}x)\left(1 + q^{2m-1}\frac{1}{x}\right),$$

multiplié par le facteur

$$e^{\mathcal{G}(q^{2m}x) + \mathcal{G}\left(q^{2m}\frac{1}{x}\right)}$$

qui tend vers 1 lorsque m tend vers l'infini, x étant déterminé. Posons $e^{g_0} = \mathcal{A}(q)$; on a, en faisant $x = \sqrt{-1} = i$,

$$\theta(i) = \theta(-i)$$

$$= \mathcal{A}(q)\prod_0^\infty [1 + q^{2(2m+1)}] = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \ldots = \theta(q^4 - 1),$$

en désignant par $\theta(q^4, x)$ la fonction $\theta(x)$ où l'on a remplacé q

par q^4. Donc $\theta(i)$ est aussi égal à

$$\mathcal{A}(q^4)\prod_0^\infty [1-q^{4(2m+1)}]^2;$$

il en résulte

$$\mathcal{A}(q)=\mathcal{A}(q^4)\prod_0^\infty [1-q^{2(2m+1)}][1-q^{4(2m+1)}].$$

Remplaçant q par q^4, puis par q^{16}, q^{64}, ..., on a en définitive

$$\mathcal{A}(q)=\prod_1^\infty (1-q^{2m}).$$

On en déduit

$$\theta(1) \quad =\mathcal{A}(q)(1+q)^2\ldots(1+q^{2n+1})^2\ldots,$$
$$\theta(-1)=\mathcal{A}(q)(1-q)^2\ldots(1-q^{2n+1})^2\ldots,$$
$$\theta(1)\theta(-1)=\mathcal{A}^2(q)\prod_0^\infty [1-q^{2(2n+1)}]^2,$$
$$\theta(q)=\theta\left(\frac{1}{q}\right)=2\mathcal{A}(q)(1+q^2)^2\ldots(1+q^{2n})^2,$$
$$\theta(1)\,\theta(-1)\,\theta(q)=2\mathcal{A}^3(q),$$
$$\theta'\left(-\frac{1}{q}\right)=q\,\mathcal{A}^3(q),\qquad \theta'(-q)=-\frac{1}{q}\mathcal{A}^3(q),$$

$\theta'(x)$ désignant la dérivée de $\theta(x)$.

4. Si, dans la fonetion où β et μ sont entiers, le dernier positif

$$\mathcal{X}(x)=x^\beta\frac{\theta(\alpha_1 x)\,\theta(\alpha_2 x)\ldots\theta(\alpha_\mu x)}{\theta^\mu(x)},$$

on change x en q^2x, elle se reproduit, multipliée par le facteur

$$q^{2\beta}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)^{-1}=\alpha;$$

α_1, α_2, ..., α_μ étant donnés, on peut choisir β de manière que le module de α soit compris entre 1 et $\frac{1}{Q^2}$ ou égal à 1.

Soit

$$\frac{A_1}{1+xq}+\frac{A_2}{(1+xq)^2}+\ldots+\frac{A_\mu}{(1+xq)^\mu}=\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu}$$

la somme des fractions simples, correspondant à la racine $-\frac{1}{q}$

de $\theta(x) = 0$, pour $\mathcal{X}(x)$; celle correspondant au zéro $-q^{2m-1}$ sera

$$\left[\frac{A_1}{1+xq^{-2m+1}} + \frac{A_2}{(1+xq^{-2m+1})^2} + \ldots + \frac{A_\mu}{(1+xq^{-2m+1})^\mu}\right]\alpha^m;$$

on le voit en substituant dans la relation

$$\mathcal{X}(q^{2m}x) = \alpha^m \mathcal{X}(x),$$

et faisant tendre x vers $-\frac{1}{q}$.

Pour $|x|$ compris entre Q et $\frac{1}{Q}$, soit

$$\mathcal{X}(x) = G(x) + H\left(\frac{1}{x}\right);$$

pour $|x|$ compris entre $\frac{1}{Q^{2m-1}}$ et $\frac{1}{Q^{2m+1}}$, on aura

$$\mathcal{X}(x) = \alpha^{-m}\left[G(q^{2m}x) + H\left(\frac{1}{q^{2m}x}\right)\right], \qquad \frac{1}{Q^{2m+1}} > |x| > \frac{1}{Q^{2m-1}}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(x) &= G(x) + H\left(\frac{1}{x}\right), & \frac{1}{Q} &> |x| > Q,\\
\mathcal{X}(x) &= \alpha^{-1}\left[G(q^2x) + H\left(\frac{1}{q^2x}\right)\right], & \frac{1}{Q^3} &> |x| > \frac{1}{Q},\\
\mathcal{X}(x) &= \frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} + H\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha G(q^2x), & \frac{1}{Q^3} &> |x| > Q,\\
\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} &= \alpha^{-1}H\left(\frac{1}{q^2x}\right) - H\left(\frac{1}{x}\right), & |x| &> \frac{1}{Q},\\
\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} &= G(x) - \alpha^{-1}G(q^2x), & \frac{1}{Q} &> |x|,
\end{aligned}$$

d'après les formules du n° **2**. Posons

$$\begin{aligned}
G(x) &= g_0 + g_1x + \ldots + g_nx^n + \ldots,\\
H\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{h_1}{x} + \frac{h_2}{x^2} + \ldots + \frac{h_n}{x_n} + \ldots.
\end{aligned}$$

Les deux dernières formules donnent

$$\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} = \frac{h_1}{x}\left(\frac{\alpha^{-1}}{q^2} - 1\right) + \ldots + h_n\frac{1}{x^n}\left(\frac{\alpha^{-1}}{q^{2n}} - 1\right) + \ldots |x| > Q^{-1},$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} = g_0(1-\alpha^{-1}) &+ g_1x(1-\alpha^{-1}q^2) + \ldots\\
&+ g_nx^n(1-\alpha^{-1}q^{2n}) + \ldots |x| < Q^{-1}.
\end{aligned}$$

Tous les coefficients g, h sont déterminés si α est différent de 1 et son module inférieur à $\frac{1}{Q^2}$, $\frac{1}{Q^2} > |\alpha|$. Pour $\alpha = 1$, le seul coefficient de g_0 est nul; tous les autres g et tous les h sont déterminés; alors la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_\mu$ est nulle et g_0 peut être déterminé par les équations

$$0 = G(x_0) + H\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

ou

$$0 = P_1(x_0)\frac{1}{(1+x_0 q)^\mu} + H\left(\frac{1}{x_0}\right) + G(q^2 x_0),$$

x_0 étant l'une des μ racines de l'équation $\mathcal{X}(x) = 0$, comprises dans la couronne Q et $\frac{1}{Q}$, la première devant être rejetée si le module de x_0 est égal à $\frac{1}{Q}$, la série $G(x_0)$ étant alors divergente.

Supposons m entier positif. On a

$$\mathcal{X}(x) = \alpha^m \left[G(q^{-2m}x) + H\left(\frac{q^{2m}}{x}\right)\right], \qquad Q^{2m-1} > |x| > Q^{2m+1},$$

$$\mathcal{X}(x) = \alpha^{-m}\left[G(q^{2m}x) + H\left(\frac{1}{q^{2m}x}\right)\right], \qquad \frac{1}{Q^{2m+1}} > |x| > \frac{1}{Q^{2m-1}},$$

puis

$$\mathcal{X}(x) = \sum_{n=-m+1}^{n=m-1}\left[\frac{A_1}{1+xq^{2n+1}} + \frac{A_2}{(1+xq^{2n+1})^2} + \ldots + \frac{A_\mu}{(1+xq^{2n+1})^\mu}\right]\alpha^{-n} + R_m$$

avec

$$R_m = \alpha^{-m} G(q^{2m}x) + \alpha^m H\left(\frac{q^{2m}}{x}\right).$$

R_m tend vers zéro lorsque m tend vers l'infini, si α est compris entre 1 et $\frac{1}{Q^2}$, $\frac{1}{Q^2} > |\alpha| > 1$. Si $|\alpha| = 1$, R_m tend vers $g_0\alpha^{-m}$ et par conséquent varie avec m si α est différent de 1 lorsque g_0 n'est pas nul; $g_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_\mu$ pour α différent de 1.

Pour $\alpha = 1$,

$$\mathcal{X}(x) = g_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{A_1}{1+xq^{2n+1}} + \frac{A_2}{(1+xq^{2n+1})^2} + \ldots + \frac{A_\mu}{(1+xq^{2n+1})^\mu}\right],$$

et nous avons vu qu'alors $A_1 + A_2 + \ldots + A_\mu = 0$, et que g_0 est déterminé par l'équation

$$o = g_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A_1}{1 + x_0 q^{2n+1}} + \frac{A_2}{(1 + x_0 q^{2n+1})^2} + \ldots + \frac{A_\mu}{(1 + x_0 q^{2n+1})^\mu} \right],$$

x_0 étant l'une des racines de $\mathfrak{X}(x) = o$.

5. Observant que

$$\frac{1}{(1 + x q^{2n+1})^2} - \frac{1}{1 + x q^{2n+1}} = \frac{-x q^{2n+1}}{(1 + x q^{2n+1})^2},$$

désignons par $p(x)$ la fonction

$$p(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x q^{2n+1}}{(1 + x q^{2n+1})^2}$$

On a

$$p(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) = p(q^2 x).$$

Il vient

$$\frac{1}{q^2} \frac{\theta'^2\left(-\frac{1}{q}\right)}{\theta\left(\frac{-\alpha_1}{q}\right)\theta\left(-\frac{1}{\alpha_1 q}\right)} \frac{\theta(\alpha_1 x)\,\theta\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)}{\theta^2(x)} = p(x) - p\left(-\frac{1}{\alpha_1 q}\right);$$

d'ailleurs

$$p\left(-\frac{1}{\alpha_1 q}\right) = p\left(-\frac{\alpha_1}{q}\right),$$

$-\frac{1}{\alpha_1 q}$ est un zéro de $\theta(\alpha_1 x)$ et $-\frac{\alpha_1}{q}$ un zéro de $\theta\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)$.

Posons

$$(1) \quad \begin{cases} p(x) = g_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + g_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \ldots + g_n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \ldots, \\ \frac{1}{Q} > |x| > Q, \end{cases}$$

il vient

$$(2) \quad \begin{cases} p(x) = -\frac{xq}{(1 + xq)^2} + g_1\left(q^2 x + \frac{1}{x}\right) + \ldots + g_n\left(q^{2n} x^n + \frac{1}{x_n}\right) + \ldots, \\ \frac{1}{Q^3} > |x| > Q, \end{cases}$$

avec, pour déterminer les coefficients g, l'équation

$$-\frac{xq}{(1+xq)^2}+g_1q^2x+g_2q^4x^2+\ldots$$
$$+g_nq^{2n}x^n+\ldots=g_1x+g_2x^2+\ldots+g_nx^n+\ldots,$$

qui a lieu pour les valeurs de x dont le module est inférieur à $\frac{1}{Q}$; ce qui donne

$$g_n=(-1)^n n\frac{q^n}{1-q^{2n}}.$$

Les deux fonctions $\theta(\alpha_1 x)$, $\theta\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)$ ont les mêmes zéros sans être identiques, seulement lorsque $\alpha_1=-1$, ou q, ou $-q$; et il vient, en simplifiant le facteur dans le premier membre, à l'aide des relations établies au n° 3,

$$\frac{\theta^2(1)\,\theta^2(-1)}{4}\,\frac{\theta^2(-x)}{\theta^2(x)}=p(x)-p\left(\frac{1}{q}\right),$$

$$-q\,\frac{\theta^2(1)\,\theta^2\left(\frac{1}{q}\right)}{4}\,\frac{\theta(qx)\,\theta\left(\frac{x}{q}\right)}{\theta^2(x)}=p(x)-p(-1),$$

$$\frac{q}{4}\theta^2(-1)\,\theta^2\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\theta(-qx)\,\theta\left(-\frac{x}{q}\right)}{\theta^2(x)}=p(x)-p(1);$$

faisant $x=1$, -1, $\frac{1}{q}$ successivement dans ces formules, elles donnent

$$\frac{1}{4}\theta^4(1)=p(-1)-p\left(\frac{1}{q}\right),\qquad \frac{1}{4}\theta^4(-1)=p(1)-p\left(\frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{-q}{4}\theta^4\left(\frac{1}{q}\right)=p(1)-p(-1)$$

et

$$\theta^4(1)=\theta^4(-1)+q\theta^4\left(\frac{1}{q}\right).$$

En remplaçant $p(-1)$ et $p(1)$ par leurs valeurs déduites de la série (1) et $p\left(\frac{1}{q}\right)$ par sa valeur donnée par la série (2), on obtient des identités qui conduisent à des théorèmes arithmétiques remarquables (*voir* C. Jordan, *Cours de l'École Polytechnique*, t. II).

6. La fonction

$$(1) \qquad p\left(-\frac{1}{q}e^u\right) + y$$

admet les deux périodes $2\pi i$ et $2\pi\tau i$, avec $e^{\pi\tau i} = q$. Elle a un pôle double au point $u = 0$ et n'admet que des termes de degré pair en u. Le terme indépendant est nul et son développement est de la forme

$$\frac{1}{u^2} + c u^2 + c_1 u^4 + \ldots$$

si l'on prend y égal à

$$\frac{1}{12} - 2\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2},$$

ou, d'après la série (2),

$$\frac{1}{12} - 2\sum_1^\infty \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

La fonction (1) est la dérivée seconde changée de signe du logarithme de la fonction

$$e^{-y\frac{u^2}{2}-Cu-C'}\,\theta\left(-\frac{1}{q}e^u\right).$$

Cette fonction est impaire si l'on donne à C la valeur $\frac{1}{2}$, et sa dérivée est égale à 1 pour $u = 0$ si $e^{-C'}$ est égal à $-\dfrac{q}{\theta'\left(-\frac{1}{q}\right)}$.

La fonction $P(u)$ de Weierstrass, aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2 = 2\omega_1\tau$, n'est autre que

$$P(u) = -\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\left[p\left(-\frac{1}{q}e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}}\right) + y\right],$$

et $\sigma(u)$ est donnée par la formule

$$\sigma(u) = -\frac{q\,\omega_1}{\pi\,\theta'\left(-\frac{1}{q}\right)i}\,e^{y\frac{\pi^2}{2\omega_1^2}u^2 - \frac{\pi i}{2\omega_1}u}\,\theta\left(-\frac{1}{q}e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}}\right).$$