BULLETIN DE LA S. M. F.

M. WEILL

Sur les courbes rectifiables

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 42-62

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__42_0>

SUR LES COURBES RECTIFIABLES;

PAR M. M. WEILL.

Nous dirons qu'une courbe est rectifiable lorsque, x et y étant exprimés par des fonctions élémentaires d'un paramètre t, l'arc de la courbe s'exprime aussi par des fonctions élémentaires de ce paramètre.

I. Partons de l'équation

$$u^2 + v^2 = z^{2m}$$

dont la solution est donnée par les formules

$$u + vi = (\alpha + \beta i)^{2m},$$
$$u = \alpha^{2m} - C_{2m}^2 \alpha^{2m-2}\beta^2 + \ldots$$
$$v = C_{2m}^1 \alpha^{2m-1}\beta - C_{2m}^3 \alpha^{2m-3}\beta^3 + \ldots$$

Si α et β sont des fonctions de t, posons

$$u\,dt = dx,$$
$$v\,dt = dy,$$

d'où

$$ds = z^m\,dt.$$

La courbe est donc rectifiable si les intégrales

$$\int u\,dt, \quad \int v\,dt, \quad \int z^m\,dt$$

peuvent se calculer. En particulier, si α et β sont des polynomes en t, nous aurons une classe de courbes unicursales rectifiables; en prenant le cas le plus simple

$$u = 1 - t^2, \qquad v = 2t,$$

nous aurons

$$x = t - \frac{t^3}{3}, \qquad y = t^2, \qquad s = t + \frac{t^3}{3}.$$

On peut généraliser, en posant

$$u = (1 - t^2)\varphi(t), \qquad v = 2t\varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant un polynome; on peut opérer de même, en partant des valeurs générales de u et v; nous avons ainsi des classes très étendues de courbes unicursales rectifiables.

Considérons de même une courbe gauche définie par les relations

$$u = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2,$$
$$v = 2\alpha\gamma,$$
$$w = 2\beta\gamma,$$

et posons

$$dx = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\varphi(t)\,dt,$$
$$dy = 2\alpha\gamma\,\varphi(t)\,dt,$$
$$dz = 2\beta\gamma\,\varphi(t)\,dt,$$

il vient

$$ds = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\varphi(t)\,dt;$$

et, si α, β, γ, φ sont des polynomes en t, nous aurons une courbe gauche unicursale rectifiable; plus généralement, si α, β, γ, φ sont des fonctions telles que x, y, z, s sont intégrables, nous aurons des courbes rectifiables.

Nous allons donner des exemples de courbes planes, en général non unicursales, et rectifiables :

1°
$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dy = \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

d'où

$$s = t, \qquad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2°
$$dx = \sqrt{1+t^2}\,dt, \qquad dy = \sqrt{1-t^2}\,dt,$$
$$x = \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2},$$
$$y = \frac{1}{2}\arccos t + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2},$$
$$s = t\sqrt{2}.$$

3°
$$dx = \sqrt{1+t}\,dt, \qquad dy = -\sqrt{1-t}\,dt$$

d'où la courbe bien connue, unicursale,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}.$$
$$s = t\sqrt{2}.$$

4°
$$dx = \frac{\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{1+t}}, \qquad dy = \frac{dt}{\sqrt{1+t}},$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{t(1+t)} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\sqrt{t} + \sqrt{1+t}\right),$$
$$y = 2\sqrt{1+t}, \qquad s = t.$$

5°
$$dx = \sqrt{1+f(t)}\,dt, \qquad dy = \sqrt{1+f(t)}\,dt,$$
$$ds = dt\sqrt{2},$$

ou encore

$$dx = (\sqrt{1+f} + \sqrt{1-f})\,dt,$$
$$dy = (\sqrt{1+f} - \sqrt{1-f})\,dt,$$
$$ds = 2\,dt.$$

Exemple :

$$dx = \sqrt{1+\frac{1}{t}}\,dt, \qquad dy = \sqrt{1-\frac{1}{t}}\,dt,$$
$$x = \sqrt{t(t+1)} + \mathrm{L}\,(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}),$$
$$y = \sqrt{t(t-1)} + \mathrm{L}\,(\sqrt{t} - \sqrt{t-1}).$$

6° $$dx = \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt, \qquad dy = \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt,$$

on trouve

$$x = \frac{2}{3}z^3 - 2z, \qquad z = \frac{2\lambda\sqrt{2}}{1+\lambda^2},$$
$$y = \frac{2}{3}u^3 - 2u, \qquad u = \frac{(1-\lambda^2)\sqrt{2}}{1+\lambda^2},$$
$$\mathrm{S} = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}, \qquad t = 1 - z^2,$$

courbe unicursale.

7° $$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad dy = \frac{t\,dt}{1+t^2}.$$
$$x = \operatorname{arc\,tang} t, \qquad y = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1+t^2),$$
$$s = \mathrm{L}\,(t + \sqrt{1+t^2}),$$

et, en général,

$$dx = \frac{dt}{(1+t^2)^p}, \qquad dy = \frac{t\,dt}{(1+t^2)^p},$$
$$ds = \frac{dt}{(1+t^2)^{2p-1}};$$

il y aura lieu de distinguer la parité de p.

8° $$dx = \frac{\sqrt{t}\,dt}{(1+t)\sqrt{1-t}}, \qquad dy = \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t}},$$
$$x = -2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-t}{t}} + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-t}{2t}},$$
$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}},$$
$$s = \operatorname{arc\,cos} t;$$

ainsi l'arc s'exprime par un arc de cercle.

II. Considérons une courbe définie par les équations

$$(1) \qquad x \sin \alpha + y \cos \alpha = f(\alpha),$$

$$(2) \qquad x \cos \alpha - y \sin \alpha = \varphi(\alpha),$$

d'où

$$ds^2 = [(f' - \varphi)^2 = (\varphi' + f)^2]\, d\alpha^2.$$

Si la parenthèse est le carré d'une fonction de α, on trouvera des cas nombreux de courbes rectifiables.

Exemples :

1°
$$f' - \varphi = \cos \alpha \cos m\alpha,$$
$$\varphi' + f = \sin \alpha \cos m\alpha,$$

d'où

$$f'' + f = - m \cos \alpha \sin m\alpha,$$

on en tire

$$f = \frac{\sin(m+1)\alpha}{2(m+2)} + \frac{\sin(m-1)\alpha}{2(m-2)},$$

$$\varphi = \frac{m}{m^2 - 4} \sin m\alpha \sin \alpha + \frac{2}{m^2 - 4} \cos m\alpha \cos \alpha,$$

$$y = \frac{m \sin m\alpha \cos 2\alpha - 2 \cos m\alpha \sin 2\alpha}{m^2 - 4},$$

$$x = \frac{m \sin m\alpha \sin 2\alpha + 2 \cos m\alpha \cos 2\alpha}{m^2 - 4},$$

$$s = \frac{1}{m} \sin m\alpha.$$

On a ainsi une classe de courbes rectifiables, unicursales si m est rationnel, le cas de $m = 2$ étant excepté.

2° On peut, plus généralement, poser

$$f' - \varphi = \cos \alpha [\theta(\alpha)],$$
$$\varphi' + f = \sin \alpha [\theta(\alpha)],$$

d'où

$$f'' + f = \theta'(\alpha) \cos \alpha,$$

équation différentielle plus ou moins facile à intégrer selon la forme de θ.

Prenons le cas très simple où l'on a

$$\theta = m\alpha,$$

d'où

$$f'' + f = m \cos \alpha,$$

d'où

$$f = \frac{m}{2} \alpha \sin\alpha,$$
$$\varphi = \frac{m}{2} (\sin\alpha - \alpha \cos\alpha),$$
$$s = m \frac{\alpha^2}{4}.$$

Comme autre exemple, en partant de l'équation

$$u + vi = (1 + \alpha i)^{2m},$$

on aura, pour $m = 1$,

$$u = 1 - \alpha^2,$$
$$v = 2\alpha;$$

prenons

$$f' - \varphi = 1 - \alpha^2,$$
$$\varphi' + f = 2\alpha,$$

d'où

$$f'' + f = 0,$$
$$f = A \sin\alpha + B \cos\alpha,$$
$$\varphi = A \cos\alpha - B \sin\alpha + \alpha^2 - 1,$$
$$s = \alpha + \frac{\alpha^3}{3};$$

la droite représentée par l'équation (1) passe par un point fixe, et la courbe est la podaire de l'enveloppe des droites représentées par l'équation (2).

Pour $m = 2$,

$$u = 1 - 6\alpha^2 + \alpha^4,$$
$$v = 4\alpha - 4\alpha^3,$$
$$f' - \varphi = 1 - 6\alpha^2 + \alpha^4,$$
$$\varphi' + f = 4\alpha - 4\alpha^3,$$
$$f'' + f = -8\alpha,$$
$$f = -8\alpha + A \cos\alpha + B \sin\alpha,$$
$$\varphi = -9 + 6\alpha^2 - \alpha^4 - A \sin\alpha + B \cos\alpha,$$
$$s = \alpha + 2\frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5},$$

et ainsi de suite.

3° Partons encore de l'équation

$$u + vi = (1 + ti)^{2m}$$

et faisons $t = \sin\alpha$, il vient, pour $m = 1$,

$$u = 1 - \sin^2\alpha,$$
$$v = 2\sin\alpha,$$

d'où

$$f' - \varphi = 1 - \sin^2\alpha,$$
$$\varphi' + f = 2\sin\alpha,$$
$$ds = (1 + \sin^2\alpha)\,d\alpha.$$

On a

$$f'' + f = -\sin 2\alpha + 2\sin\alpha,$$

d'où

$$f = -\alpha\cos\alpha + \frac{1}{3}\sin 2\alpha,$$
$$\varphi = -\frac{1}{2} - \cos\alpha + \alpha\sin\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha,$$
$$s = \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

Ainsi, l'arc de la courbe s'exprime par un segment de droite et un arc de cercle.

En donnant à m les valeurs 2, 3, ..., on généralise facilement.

On obtient une généralisation très étendue en remplaçant dans les équations précédentes α par $p\alpha$; ainsi, on partira de

$$u + vi = (1 + ti)^{2m}$$

avec $t = \sin p\alpha$; il y aura donc une double infinité de solutions, à l'aide des entiers p et m.

Prenons, par exemple, $m = 2$, $p = 2$, il vient

$$f' - \varphi = 1 - 6\cos^2 2\alpha + \cos^4 2\alpha,$$
$$\varphi' + f = 4\cos 2\alpha - 4\cos^3 2\alpha,$$

d'où

$$f'' + f = -\sin 8\alpha - \cos 6\alpha + 10\sin 4\alpha + \cos 2\alpha.$$

On en tire

$$f = -\frac{1}{3}\cos 2\alpha - \frac{2}{3}\sin 4\alpha + \frac{1}{35}\cos 6\alpha + \frac{1}{63}\sin 8\alpha$$

et de même φ, puis

$$s = \frac{19}{8}\alpha + \frac{3}{4}\sin 2\alpha + \frac{1}{32}\sin 4\alpha.$$

Nous avons ainsi une courbe unicursale dont l'arc s'exprime par un segment de droite et un arc de cercle.

Le cas plus simple de $m = 1$, $p = 2$, avec le sinus donne

$$f = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{8}\sin 4\alpha,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2} - \cos 2\alpha,$$

$$s = \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

4° On obtient encore des courbes unicursales dont l'arc s'exprime par un segment de droite, ou par un segment de droite et un arc de cercle, en partant des formules

$$f' - \varphi = \cos m\alpha(\mathrm{A}\sin p\alpha + \mathrm{B}\sin p'\alpha + \mathrm{C}\cos p''\alpha + \mathrm{D}\sin p'''\alpha + \mathrm{E}),$$
$$\varphi' + f = \sin m\alpha(\mathrm{A}\sin p\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{E}).$$

Remarque. — Si dans les formules générales

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = f(\alpha),$$
$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = \varphi(\alpha),$$

on a $\varphi = f'$, la courbe n'est autre que l'enveloppe des droites représentées par l'équation (1), et l'on a

$$ds = (f'' + f)\,d\alpha,$$
$$s = f' + \int f(\alpha)\,d\alpha;$$

si donc l'intégrale peut se calculer, on a une courbe rectifiable, résultat bien connu.

III. 1° Prenons

$$dx = (\sin m\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$
$$dy = (\cos m\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$ds = f(\alpha)\,d\alpha,$$

courbe rectifiable si f peut s'intégrer.

Soit, par exemple,

$$f = \sin p\alpha,$$

on a une courbe unicursale dont l'arc s'exprime par un segment de droite; si l'on prend $f = \cos^p\alpha$, on a encore une courbe unicursale dont l'arc s'exprime par un segment de droite si p est impair; et par un segment de droite et un arc de cercle si p est pair.

On peut aussi prendre

$$dx = (\sin m\alpha + \sin p\alpha)\cos^p\alpha\, d\alpha,$$
$$dy = (\cos m\alpha + \cos p\alpha)\cos^p\alpha\, d\alpha,$$

d'où

$$ds = 2\cos\frac{m-p}{2}\alpha\cos^p\alpha\, d\alpha,$$

et d'autres analogues.

Partant de

$$dx = (\lambda\cos ma + \mu\cos pa)\,da,$$
$$dy = (\lambda\sin ma + \mu\sin pa)\,da,$$

il vient

$$ds^2 = (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos(m-p)\,da^2.$$

Posons

$$(m-p)a = 2\varphi.$$

Soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{(\mu+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(\mu-\lambda)^2} - 1 = 0,$$
$$x = (\mu+\lambda)\sin\varphi$$
$$y = (\mu-\lambda)\cos\varphi,$$
$$d\sigma^2 = (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos 2\varphi)\,d\varphi^2.$$

On voit que la courbe définie par dx et dy a même ds que l'ellipse.

On peut généraliser en prenant

$$dx = (\sin\varphi(\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$
$$dy = (\cos\varphi(\alpha)f(\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$ds = f(\alpha)\,d\alpha.$$

2° Partant de l'équation

$$u + vi = (1 + ti)^{2m},$$

qui donne la solution de l'équation

$$u^2 + v^2 = z^2,$$

et, en prenant le cas le plus simple $m = 1$,

$$u = 1 - t^2, \qquad v = 2t, \qquad z = 1 + t^2:$$

posons

$$dx = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt, \qquad dy = \frac{2t}{1+t^2}\,dt,$$

d'où $s = t$; la courbe définie par les équations

$$x = -t + 2 \operatorname{arc tang} t,$$
$$y = \mathrm{L}(1 + t^2)$$

est donc rectifiable.

En prenant $m = 2$, on a

$$u = 1 - 6t^2 + t^4,$$
$$v = 4t - 4t^3,$$
$$dx = \frac{1 - 6t^2 + t^4}{(1 + t^2)^2} dt, \qquad dy = \frac{4t - 4t^3}{(1 + t^2)^2} dt,$$
$$s = t,$$

courbe rectifiable; l'intégration est très facile, car, en posant

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = t,$$

on a

$$dx = \frac{\cos 4\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{d\varphi}{2}, \qquad dy = \frac{\sin 4\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{d\varphi}{2},$$
$$s = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

On peut donner à m les valeurs 3, 4, ... et l'on aura des résultats analogues.

3° Dans les fractions qui définissent dx et dy, remplaçons t par une fonction de t; par exemple, en prenant $m = 1$, remplaçons t par $\cos t$, il vient

$$dx = \frac{1 - \cos^2 t}{1 + \cos^2 t} dt, \qquad dy = \frac{2 \cos t}{1 + \cos^2 t} dt,$$
$$s = t,$$

courbe rectifiable nouvelle; en posant

$$\cos t = u,$$

on a

$$dx = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}, \qquad dy = \frac{2u}{1 + u^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$$
$$s = \operatorname{arc} \cos u.$$

Il serait intéressant d'étudier les transformations qui donnent des courbes algébriques.

IV. En coordonnées polaires, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2.$$

Soit

$$d\rho = (f' - \varphi')\, d\omega, \qquad \rho\, d\omega = 2\sqrt{f'\varphi'}\, d\omega,$$

d'où

$$ds = (f' + \varphi')\, d\omega.$$

On doit donc avoir

$$(f - \varphi)^2 = 4f'\varphi',$$

équation différentielle à deux fonctions inconnues.

Nous particulariserons le problème en donnant à φ certaines valeurs, ou en établissant une relation entre f et φ :

1° Prenons $\varphi = \omega$, nous avons l'équation différentielle

$$(f - \omega)^2 = 4\frac{df}{d\omega}.$$

2° $f = \varphi^2$. On trouve, en posant $z = e^{\frac{\omega}{2\sqrt{2}}}$,

$$\rho = \frac{4z(1+z)^2}{(1-z)^4},$$
$$s = \frac{2(1+z^2)(1+z)^2}{(1-z)^4}.$$

3° $f - \varphi = \varphi^2$. On trouve

$$\rho = t^2,$$
$$\frac{\omega}{2} = -\frac{\sqrt{1+2t}}{t} + \mathrm{L}\,\frac{\sqrt{1+2t}-1}{\sqrt{1+2t}+1},$$
$$s = t^2 + 2t.$$

4° $f = \varphi^p$. Soit $p = 2h + 1$, il vient

$$\rho = t^p - t,$$
$$d\omega = \frac{2\sqrt{p}\, t^{h-1}\, dt}{t^{2h} - 1},$$
$$s = t^p + t.$$

Résultats analogues si p est pair.

V. Une courbe étant donnée, on peut facilement trouver une infinité de courbes dont l'arc s'exprime par l'arc de la première.

Nous partirons de l'identité

$$d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2 = \frac{(a\, d\rho - b\,\rho\, d\omega)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a\,\rho\, d\omega + b\, d\rho)^2}{a^2+b^2}.$$

Supposons que a et b soient des fonctions de ω, et posons

$$d\rho_1 = \frac{a\, d\rho - b\,\rho\, d\omega}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$\rho_1\, d\omega_1 = \frac{a\,\rho\, d\omega + b\, d\rho}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

nous définirons ainsi une courbe qui a même ds que la première, quelles que soient les fonctions a et b.

En particulier, on peut prendre

$$a = \sin[\varphi(\omega)],$$
$$b = \cos[\varphi(\omega)].$$

1° Soit l'ellipse

$$\rho = \frac{1}{1 - e\cos\omega};$$

prenons

$$a = \cos\omega, \qquad b = \sin\omega,$$

il vient

$$d\rho_1 = \frac{-\sin\omega\, d\omega}{(1-e\cos\omega)^2},$$
$$\rho_1\, d\omega_1 = \frac{\cos\omega - e}{(1-e\cos\omega)^2}\, d\omega,$$

d'où

$$\rho_1 = \frac{1}{e(1-e\cos\omega)}.$$
$$\omega_1 = -\omega - \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\,\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},\ \text{tang}\frac{\omega}{2}\right),$$

les équations définissent une courbe qui a même ds que l'ellipse donnée.

2° Soit la courbe

$$\rho = \cos 2\omega.$$

Prenons

$$a = \sin\omega, \qquad b = \cos\omega,$$

il vient

$$d\rho_1 = (-2\sin 2\omega\sin\omega - \cos\omega\cos 2\omega)\, d\omega,$$
$$\rho_1\, d\omega_1 = (\cos 2\omega\sin\omega - 2\sin 2\omega\cos\omega)\, d\omega,$$

d'où

$$\rho_1 = -\sin\omega - \frac{2}{3}\sin^3\omega,$$

$$\omega_1 = -3\omega - \frac{9}{2}\operatorname{cotang}\omega.$$

Ces équations définissent une courbe qui a même *ds* que la courbe $\rho = \cos 2\omega$; je dis que cette dernière courbe a même *ds* qu'une ellipse. En effet, considérons, plus généralement, la courbe

$$\rho = \cos m\omega.$$

L'ellipse

$$x^2 + m^2 y^2 = 1$$

a même *ds* que la courbe; en effet, on a, pour la courbe

$$ds^2 = (m^2 \sin^2 m\omega + \cos^2 m\omega)\, d\omega^2,$$

et, pour l'ellipse, en posant

$$x = \sin m\omega,$$
$$my = \cos m\omega,$$

la même valeur de *ds*.

3° Soit la courbe

$$\rho = A\cos m\omega + B\sin m\omega;$$

je dis qu'elle a même *ds* qu'une certaine ellipse. En effet, en faisant tourner l'axe polaire, on ramène l'équation à la forme

$$\rho = K\cos m\omega,$$

et l'on est ramené au cas précédent.

4° En coordonnées rectilignes, considérons l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{L^2} = 1,$$

d'où

$$x = K\cos\alpha, \qquad y = L\sin\alpha,$$
$$ds^2 = (K^2\sin^2\alpha + L^2\cos^2\alpha)\, d\alpha^2.$$

Multiplions par $\sin^2 m\alpha + \cos^2 m\alpha$, il vient

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (K\sin\alpha\sin m\alpha - L\cos\alpha\cos m\alpha)^2\, d\alpha^2 \\ & + (K\sin\alpha\cos m\alpha + L\cos\alpha\sin m\alpha)^2\, d\alpha^2. \end{aligned}$$

Posons

$$dx_1 = (\mathrm{K}\sin\alpha\sin m\alpha - \mathrm{L}\cos\alpha\cos m\alpha)\,d\alpha,$$
$$dy_1 = (\mathrm{K}\sin\alpha\cos m\alpha + \mathrm{L}\cos\alpha\sin m\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$2x_1 = \frac{\mathrm{K}-\mathrm{L}}{m-1}\sin(m-1)\alpha - \frac{\mathrm{K}+\mathrm{L}}{m+1}\sin(m+1)\alpha,$$
$$2y_1 = -\frac{\mathrm{K}+\mathrm{L}}{m+1}\cos(m+1)\alpha + \frac{\mathrm{K}-\mathrm{L}}{m-1}\cos(m-1)\alpha,$$

ou

$$x_1 = \mathrm{A}\sin(m+1)\alpha + \mathrm{B}\sin(m-1)\alpha,$$
$$y_1 = \mathrm{A}\cos(m+1)\alpha + \mathrm{B}\cos(m-1)\alpha.$$

Ces équations définissent une classe de courbes unicursales (si m est rationnel), qui ont même ds que l'ellipse donnée.

En particulier pour $\mathrm{K} = \mathrm{L}m$, on retrouve la courbe

$$\rho = \mathrm{L}\sin\left(\frac{\pi}{m} - \frac{\omega}{m}\right), \qquad \text{ou} \qquad \rho = \mathrm{L}\sin m'\omega.$$

5° On peut, par bien d'autres procédés, obtenir des courbes ayant même ds qu'une courbe donnée.

Soit l'ellipse définie par les équations

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b\frac{2t}{1+t^2};$$

d'où

$$ds^2 = 4\frac{b^2t^4 + (a^2-2b^2)t^2 + b^2}{(1+t^2)^4}dt^2 = \left[4\frac{b^2}{(1+t^2)^2} + 16\frac{(a^2-b^2)t^2}{(1+t^2)^4}\right]dt^2.$$

Posons

$$dx_1 = \frac{2b\,dt}{(1+t^2)},$$
$$dy_1 = \frac{4\sqrt{a^2-b^2}\,t\,dt}{(1+t^2)^2},$$

d'où

$$x_1 = 2b\,\mathrm{arc\,tang}\,t,$$
$$y_1 = -\frac{2c}{1+t^2}.$$

Ces équations définissent une courbe qui a même ds que l'ellipse.

Soit encore l'ellipse définie par les équations

$$y = t, \qquad x = \sqrt{1-mt^2},$$

d'où

$$ds^2 = dt^2\left[\frac{1}{1-mt^2} + \frac{(m^2-m)t^2}{1-mt^2}\right].$$

Posons

$$dx_1 = \frac{dt}{\sqrt{1 - mt^2}}, \qquad dy_1 = \frac{t\,dt\sqrt{m^2 - m}}{\sqrt{1 - mt^2}},$$

d'où

$$y_1 = \frac{\sqrt{m^2 - m}}{m} \sin(x_1\sqrt{m}),$$

et la courbe ainsi définie a même ds que l'ellipse.

Considérons encore l'hyperbole définie par l'équation

$$y = \frac{1}{x},$$

d'où

$$ds^2 = dx^2\,\frac{1 + x^4}{x^4}.$$

Posons

$$dx_1 = \frac{\sqrt{2}}{x}\,dx, \qquad dy_1 = \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx,$$

d'où

$$y_1 = e^{\frac{x_1}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{x_1}{\sqrt{2}}}.$$

Cette courbe a même ds que l'hyperbole.

6° Une courbe étant définie par les équations

$$dx = f(t)\,dt, \qquad dy = \varphi(t)\,dt,$$

d'où

$$ds^2 = (f^2 + \varphi^2)\,dt^2;$$

soient A et B deux fonctions de t.

On a

$$ds^2 = \frac{(f^2 + \varphi^2)(A^2 + B^2)}{A^2 + B^2}\,dt^2 = \frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}\,dt^2,$$

et en posant

$$dx_1 = \frac{C\,dt}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$dy_1 = \frac{D\,dt}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

on définit une courbe nouvelle qui a même ds que la première.

Soit, par exemple, la parabole

$$x = t, \qquad y = t^2,$$

prenons

$$A = 1 - t^2, \qquad B = 2t,$$

d'où

$$A^2 + B^2 = (1 + t^2)^2;$$

on en déduit

$$x_1 = -5t + 6 \text{ arc tang} t,$$
$$y_1 = -t^2 + 3L(t^2 + 1)$$

Cette courbe a même *ds* que la parabole.

VI. 1° Soit

$$dx = (1 - \sin^2 2\alpha)\cos\alpha\, d\alpha,$$
$$dy = 2\sin 2\alpha \cos\alpha\, d\alpha,$$

d'où

$$ds = (1 + \sin^2 2\alpha)\cos\alpha\, d\alpha.$$

On déduit

$$x = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{20}\sin 5\alpha + \frac{1}{12}\sin 3\alpha,$$
$$y = -\frac{1}{3}\cos 3\alpha - \cos\alpha,$$
$$s = \frac{3}{2}\sin\alpha - \frac{1}{12}\sin 3\alpha - \frac{1}{20}\sin 5\alpha,$$

courbe unicursale rectifiable.

La généralisation est évidente.

2° Soit

$$dx = (1 - m\,\text{tang}^{2p}\alpha)\cos^{2p+2p'}\alpha\, d\alpha,$$
$$dy = 2\sqrt{m}\,\text{tang}^{p}\alpha \cos^{2p+2p'}\alpha\, d\alpha.$$

d'où

$$ds = (1 + m\,\text{tang}^{2p}\alpha)\cos^{2p+2p'}\alpha\, d\alpha.$$

En disposant de m de manière que dans l'expression

$$(\cos^{2p}\alpha - m\sin^{2p}\alpha)\cos^{2p'}\alpha,$$

il n'entre pas de terme indépendant des cosinus, on aura une courbe unicursale dont l'arc s'exprime par un segment de droite et un arc de cercle.

Ainsi pour $p = 1$, $p' = 2$, on trouve $m = 5$.

3° En partant de l'identité

$$f^2 + \varphi^2 = \psi^2$$

et prenant

$$dx = f(t)\,dt, \qquad dy = \varphi(t)\,dt,$$

on peut remplacer, dans f ou dans φ, la variable t par une fonction de t, on aura une nouvelle courbe rectifiable comme la première si les fonctions sont convenablement choisies. Ainsi, prenons

$$dx = (1 - t^2)\,dt, \qquad dy = 2t\,dt$$

et remplaçons t par t^2, il vient

$$dx_1 = (1 - t^4)\,dt, \qquad dy_1 = 2t^2\,dt,$$

d'où

$$x_1 = t - \frac{t^5}{5}, \qquad y_1 = 2\frac{t^3}{3},$$

$$s_1 = t + \frac{t^5}{5}.$$

De même, remplaçons t par $\sin t$, il vient

$$dx = \cos^2 t\,dt, \qquad dy = 2\sin t\,dt.$$

$$ds = (1 + \sin^2 t)\,dt.$$

d'où

$$x = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}, \qquad y = -2\cos t,$$

$$s = 3t - \frac{\sin 2t}{4}.$$

On peut aussi se donner y en fonction de t; ainsi

$$y = 2f(t), \qquad dx = (1 - f'^2)\,dt,$$

$$ds = (1 + f'^2)\,dt.$$

On peut se donner f', c'est-à-dire la forme de ds, et en déduire x et y.

4° En partant d'identités plus compliquées, telles que la suivante :

$$(1 - 6t^2 + t^4)^2 + (4t - 4t^3)^2 = (1 + t^2)^4,$$

on aura une courbe unicursale rectifiable, mais on peut aussi écrire

$$dx = \frac{1 - 6t^2 + t^4}{1 + t^2}\,dt,$$

$$dy = \frac{4t - 4t^3}{1 + t^2}\,dt,$$

d'où

$$ds = (1 + t^2)\,dt.$$

Partant de même de l'identité

$$(t^3 - 3t)^2 + (3t^2 - 1)^2 = (1 + t^2)^3,$$

en y remplaçant t^2 par t^4, et posant

$$dx = \frac{t^6 - 3t^2}{t^2(1+t^4)} dt, \qquad dy = \frac{3t^4 - 1}{t^2(1+t^4)} dt,$$

il vient

$$ds = \sqrt{\frac{1+t^4}{t^4}}\, dt,$$

ce qui est le ds de l'hyperbole $xy = 1$.

5° Partant de l'identité

$$4 + 5t^2 + t^4 = (2 - t^2)^2 + (3t)^2.$$

Posons

$$dx = (2 - t^2)\, dt, \qquad dy = 3t\, dt,$$

ce qui définit une courbe unicursale C. Posons

$$dx_1 = \sqrt{4 + 5t^2}\, dt, \qquad dy_1 = t^2\, dt,$$

ce qui définit une courbe C′, transcendante.

On peut encore écrire

$$4 + 5t^2 + t^4 = 4 + t^2(5 + t^2).$$

Posons

$$t = \theta\sqrt{5}$$

et

$$dx_2 = 2\, dt = 2\, d\theta\sqrt{5},$$
$$dy_2 = 5\theta\sqrt{1+\theta^2},$$

d'où

$$x_2 = 2t,$$
$$y_2 = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{t^2}{5}\right)^{\frac{3}{2}},$$

courbe unicursale C″. Les trois courbes ont même ds.

VII. 1° On peut obtenir facilement des courbes gauches rectifiables en partant d'identités telles que

$$(t^2+1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1.$$

En effet, posons

$$dx = t^2\, dt, \qquad dy = \sqrt{2}\, t\, dt, \qquad dz = dt,$$

il vient

$$x = \frac{t^3}{3}, \qquad y = \frac{t^2\sqrt{2}}{2}, \qquad z = t,$$

nous aurons une courbe gauche rectifiable.

Considérons l'identité

$$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = \left(t^2 + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3};$$

posons

$$dx = \left(t^2 + \frac{t}{2}\right) dt, \qquad dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t + \frac{2}{3}\right) dt,$$

$$dz = \sqrt{\frac{2}{3}}\, dt,$$

il viendra

$$ds^2 = (t^4 + t^3 + \ldots)\, dt^2.$$

D'autre part, écrivons

$$dx_1 = t\sqrt{t^2 + t + 1}\, dt,$$

$$dy_1 = \sqrt{t + 1}\, dt,$$

nous définirons ainsi une courbe algébrique plane qui aura même ds que la courbe unicursale gauche.

Résultats analogues avec d'autres polynomes du quatrième degré.

2° En général, en partant d'une identité de la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2 + V^2,$$

on aura une courbe gauche et une courbe plane qui auront même ds; par exemple,

$$(t^3 + t^2)^2 + 2t^2 + 1 = \left(t^2\sqrt{t^2 + 2t}\right)^2 + (t^2 + 1)^2.$$

Partons encore de l'identité

$$(\varphi + f)^2 + (\varphi - 2f)^2 + (2f + 2\varphi)^2 = (3f + \varphi)^2 + 5\varphi^2,$$

f et φ étant des fonctions de t: nous aurons ainsi une infinité de courbes gauches et planes ayant même ds.

Prenons, par exemple, $f = t^2$, $\varphi = t$, nous aurons la courbe gauche définie par

$$dx = (t^2 + 1)\, dt,$$

$$dy = (t - 2t^2)\, dt,$$

$$dz = (2t + 2t^2)\, dt.$$

et la courbe plane définie par

$$dx_1 = (3t^2 + t)\,dt, \qquad dy^1 = t\sqrt{5}\,dt.$$

Ces courbes ont même ds et sont rectifiables, car on a

$$ds = t\sqrt{3}\sqrt{3t^2 + 2t + 2}\,dt,$$

et s est donné par un radical et un logarithme.

3° Considérons la courbe gauche définie par

$$\begin{aligned} dx &= d\rho \cos\omega, \\ dy &= d\rho \sin\omega, \\ dz &= \rho\, d\omega, \end{aligned}$$

puis la courbe plane définie par

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2;$$

ces courbes ont même ds.

Exemple :

$$\begin{aligned} \rho &= \sin 2\omega, \\ x &= \frac{1}{3}\sin 3\omega + \sin\omega, \\ y &= \cos\omega - \frac{1}{3}\cos 3\omega, \\ z &= -\frac{\cos 2\omega}{2}. \end{aligned}$$

Cette courbe gauche a même ds que la courbe $\rho = \sin 2\omega$, et, par conséquent, qu'une ellipse.

De même, soit le cercle $\rho = \sin\omega$; la courbe gauche définie par

$$x = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\omega, \qquad y = -\frac{\cos 2\omega}{4}, \qquad z = -\cos\omega$$

a pour ds celui du cercle.

4° On peut écrire

$$dx = \rho\cos\omega\, d\omega, \qquad dy = \rho\sin\omega\, d\omega, \qquad z = \rho;$$

la courbe gauche ainsi définie a même ds que la courbe gauche définie par

$$dx = d\rho\cos\omega, \qquad dy = d\rho\sin\omega, \qquad dz = \rho\, d\omega.$$

5° On a

$$\frac{t^2+2t+1}{(t+1)^2}=1.$$

Posons

$$dx=\frac{t\,dt}{t+1},\qquad dy=\frac{\sqrt{2t}\,dt}{t+1},\qquad dz=\frac{dt}{t+1},$$

nous avons une courbe gauche rectifiable, car $s=t$.

6° Théorème. — *Si l'on considère une somme algébrique de carrés dont p sont positifs et n négatifs, le carré de cette somme peut se mettre sous la forme d'une somme de carrés dont p sont positifs et n négatifs.*

En appliquant ce théorème, dont la démonstration est immédiate, nous aurons

$$(1)\qquad \begin{aligned}&(a^2+b^2-d^2-c^2)^2+(2ac)^2+(2bc)^2\\&=(a^2+b^2-d^2+c^2)^2+(2cd)^2,\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir une infinité de courbes gauches et de courbes planes ayant, deux à deux, le même ds.

En prenant pour a, b, c, d des fonctions simples de t, on aura des résultats en général très simples.

En partant de l'identité

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2,$$

on pourra avoir des courbes gauches rectifiables, comme nous l'avons déjà indiqué.

Prenons

$$a=c=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad b=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

d'où

$$dx=\frac{t^2\,dt}{1+t^2},\qquad dy=\frac{2t\,dt}{1+t^2},$$

$$dz=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$s=t+\operatorname{arc\,tang} t.$$

7° Une ellipse étant définie par les équations

$$x_1=K\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y_1=K'\frac{2t}{1+t^2},$$

d'où

$$dx_1 = -\frac{4Kt\,dt}{(1+t^2)^2},$$
$$dy_1 = \frac{2K'(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2};$$

prenons

$$a^2+b^2-d^2+c^2 = \frac{4Kt}{(1+t^2)^2},$$
$$cd = K'\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2},$$

nous aurons une double infinité de courbes gauches ayant même ds que l'ellipse donnée.

Prenons, par exemple,

$$d = \frac{1-t}{1+t^2}, \qquad c = \frac{K'(1+t)}{1+t^2},$$

il vient

$$a^2+b^2 = \frac{4Kt+(1-t)^2-K'^2(1+t)^2}{(1+t^2)^2}.$$

On en tirera facilement des valeurs de a et de b, en décomposant le numérateur de la fraction en une somme de deux carrés, après avoir introduit un paramètre arbitraire, et l'identité (1) donnera la courbe gauche cherchée. En particulier, le numérateur peut se mettre sous la forme $(\alpha t+\beta)^2+\gamma$, et l'on peut prendre

$$a = \frac{\alpha t+\beta}{1+t^2}, \qquad b = \frac{\sqrt{\gamma}}{1+t^2}.$$

Le même procédé peut servir à obtenir des courbes gauches ayant même ds qu'une courbe plane donnée.