BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur un système de quatre droites concourantes dans l'espace : droites équirésultantes

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 219-221
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__219_1>

SUR UN SYSTÈME PARTICULIER DE QUATRE DROITES CONCOURANTES DANS L'ESPACE; DROITES ÉQUIRÉSULTANTES;

PAR M. PAUL APPELL.

1. Si, sur les côtés d'un angle xOy, on porte deux vecteurs égaux, dans un sens ou dans l'autre, on obtient comme résultantes deux droites rectangulaires, à savoir les bissectrices de l'angle et de l'angle adjacent.

Portons, de même, sur les trois arêtes d'un trièdre $Oxyz$, trois vecteurs égaux, dans un sens ou dans l'autre. En composant ces trois vecteurs, nous obtiendrons quatre droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ formant une configuration spéciale : nous les appellerons *droites équirésultantes*. Si l'on prend comme axes les arêtes Ox, Oy, Oz du trièdre, les quatre droites ont pour équations

$$\pm x = \pm y = \pm z$$

où l'on combine les signes de toutes les manières possibles.

Étudions la configuration de ces quatre droites. En coupant le système par un plan quelconque, ne passant pas par O, on obtient trois points d'intersection A, B, C avec Ox, Oy, Oz et quatre points d'intersection α, β, γ, δ avec $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$. Les points A, B, C sont les centres des trois couples de sécantes passant par les quatre points α, β, γ, δ. Cela est évident, car les deux droites, $O\alpha$ et $O\beta$ par exemple, ayant pour équations, comme plus haut,

$$x = y = \pm z,$$

sont dans un même plan avec l'axe Oz; les trois points α, β, C sont donc en ligne droite.

On obtient ainsi la figure classique du quadrilatère complet $\alpha\beta\gamma\delta$, avec les trois centres A, B, C.

Détaillons un peu cette figure, en vue de ce qui sui‧

Le côté BC du triangle ABC (le lecteur est prié de faire la figure) coupe les droites $\beta\gamma$ et $\alpha\delta$ en a et a' : ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux points B et C, et l'angle aOa' est droit, car Oa est la bissectrice de l'angle BOC comme portant la résultante de deux vecteurs égaux portés par OB et OC, et Oa' est bissectrice de l'angle adjacent comme portant la résultante de deux vecteurs égaux portés l'un par OC, l'autre par le prolongement de BO. De même les points b et b' où AC coupe $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont tels que bOb' soit droit, et les points c et c' où BA coupe $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ sont tels que cOc' soit droit.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes. Imaginons quatre droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ remplissant les conditions suivantes : en les coupant par un plan quelconque on obtient quatre points α, β, γ, δ tels qu'en construisant les points ABC, puis les points aa', bb', cc' on ait en aOa', bOb', cOc' des angles droits. Alors les quatre droites sont *équirésultantes* du trièdre OABC.

En effet, les deux droites Oa et Oa' étant rectangulaires sont les bissectrices de l'angle BOC et de l'angle adjacent. La droite Oa est donc dirigée suivant la résultante de deux vecteurs égaux F portés par OB et OC, et Oa' de deux vecteurs égaux F portés par OC et le prolongement de BO. Si l'on porte le même vecteur F sur OA, la résultante des trois vecteurs F portés par OA, OB, OC perce le plan quelque part sur Aa; d'après le même raisonnement, elle le percera quelque part sur Bb : ce sera donc en γ. On fera le même raisonnement pour les autres combinaisons.

II. Il reste maintenant à résoudre le problème suivant : trois droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ étant données, et non OA, OB, OC, trouver une quatrième droite $O\delta$ formant avec les premières un groupe de droites équirésultantes. On peut résoudre facilement ce problème par le calcul, en prenant comme triangle de référence le triangle $\alpha\beta\gamma$. La détermination du point δ se ramène à la résolution d'une équation du quatrième degré.

III. On trouve un exemple de la configuration, que nous venons d'étudier, dans la question suivante :

Étant donnés trois points fixes A, B, C on appelle r_1, r_2, r_3 les distances d'un point M à ces trois points et l'on considère les quatre surfaces ayant pour équations

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 = \text{const.}$$

Par un point M de l'espace, il passe quatre de ces surfaces, une de chaque espèce, et les normales en M à ces surfaces sont *équirésultantes*. Leurs traces réalisent sur le plan ABC la figure précédente, avec les conditions imposées aux angles aOa', bOb', cOc'.

Errata au Tome L (1922).

Note de M. E. Maillet, *Sur les nombres de Liouville* (p. 74-99) :

Page 76, ligne 15, *au lieu de* Q, *lire* Q''.

Page 81, ligne 20, *au lieu de* q, *lire* c.

Page 82, ligne 3, *au lieu de* ε, *lire* ε_1

Page 83, ligne 16. *après* Σ, *ajouter* (sauf que les fractions J'_n ne sont pas forcément inégales deux à deux).

Pages 85-88, nos VI et VII. — On suppose, ce qui est permis [on changerait au besoin le signe de $F_1(x)$], J', J'_n, φ_n, ψ_n, P'_n, Q'_n positifs (n assez grand).

FIN DU TOME L.