

BULLETIN DE LA S. M. F.

BARRÉ

Sur diverses classes de surfaces engendrées par une hélice circulaire

Bulletin de la S. M. F., tome 49 (1921), p. 65-104

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__65_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__65_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1921, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR DIVERSES CLASSES DE SURFACES
ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE ;**

PAR M. BARRÉ.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons, dans le présent Mémoire, de compléter
notre Étude sur la Théorie générale des surfaces engendrées par

une hélice circulaire (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XLI, 1913, p. 242-339) par l'examen de quelques nouveaux types particuliers de ces surfaces (1).

Le Travail actuel comprendra deux Chapitres; dans le premier, nous étudierons le mouvement d'une hélice circulaire variable possédant une enveloppe; dans le second, nous examinerons les surfaces à plan directeur et à pas constant

CHAPITRE I.

SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE QUI SE MEUT EN RESTANT TANGENTE A UNE COURBE FIXE

1. Nous avons énoncé (cf. *T. H. C.*, Chap. I, n° 14) le résultat suivant :

« *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'hélices circulaires mobiles ait une enveloppe est que les équations*

$$(1) \quad M = 0, \quad KL - N^2 = 0$$

admettent une solution commune

$$(2) \quad F(\varphi, t) = 0. »$$

A chaque solution de cette forme correspond une courbe tangente aux génératrices; leur ensemble constitue l'arête de rebroussement de la surface engendrée.

Un calcul des plus simples permet de remplacer les équations (1) par les suivantes (en introduisant la simplification cor-

(1) Dans ce qui suit, les notations seront, en principe, celles de notre *Mémoire Théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire* que nous désignerons, pour abrégé, dans les nombreux renvois que nous aurons à y faire, par la notation *T. H. C.* Dans un *Mémoire* paru dans le *Bulletin de la Société* (t. XLIII, 1915, p. 25-61), nous avons déjà présenté la monographie d'un type particulier de surfaces que nous avons appelées *hélicoïdes de seconde espèce*.

respondant au choix particulier d'axes défini par $q = 0$) (1) :

$$(1 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} M = 0, \\ Kp^2 \varphi^2 \sin^2 \varphi + (K^2 p \varphi' + K' u \varphi) \cos \varphi \\ + [v \varphi K' - p K \varphi (Kr - w)] \sin \varphi + \varphi \varphi' K + K^2 u p = 0. \end{array} \right.$$

Sans insister sur le cas général, conduisant à des calculs d'une complication qui ne correspond en rien à l'intérêt, nul, du résultat, nous nous arrêterons aux deux cas particuliers suivants : Le premier est celui où $p = 0$; la surface est à plan directeur; nous y reviendrons. Le second est celui où la génératrice est indéformable et où le rayon OX engendre une développée du lieu du centre O. Alors

$$\varphi = \varphi_0, \quad K = K_0, \quad u = w = 0 \quad (K_0, \varphi_0, \text{const.})$$

et les équations (1 bis) deviennent

$$(3) \quad \sin \varphi (v - K_0 p \varphi) = 0, \quad \sin \varphi \left(\sin \varphi - \frac{r}{p} \frac{K_0}{\varphi_0} \right) = 0.$$

L'annulation de $\sin \varphi$ exige (1) une vérification directe de la seconde équation (1). On est conduit ainsi à la solution constituée par une famille d'hélices indéformables pivotant autour d'un point fixe auquel se réduit son enveloppe.

Mais les équations (3) peuvent encore être résolues en prenant

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{v}{p K_0} \\ \text{avec la condition} \\ \sin \left(\frac{v}{p K_0} \right) = \frac{r}{p} \frac{K_0}{\varphi_0}. \end{array} \right.$$

Ces relations, par l'introduction de l'arc s , des rayons de courbure R et de torsion T de la courbe lieu de O, prennent la forme

(1) Sous la réserve que la solution considérée, commune aux deux équations (1 bis), n'annule pas le multiplicateur de la seconde équation (1) dans l'opération qui permet, en éliminant l'arc φ entre les deux équations (1), d'obtenir l'équation trigonométrique qu'est la seconde équation (1 bis). Ce multiplicateur est $\sin \varphi$. Si la solution commune l'annule, une vérification directe s'impose.

géométrique suivante, plus intéressante :

$$(5) \quad \varphi = \frac{R}{K_0} \sec \int^s \frac{ds}{T},$$

$$(6) \quad \sin \left[\frac{R}{K_0} \sec \int^s \frac{ds}{T} \right] = \frac{K_0}{\rho_0} \tan g \int^s \frac{ds}{T},$$

où la limite inférieure de $\int^s \frac{ds}{T}$ a été laissée intentionnellement arbitraire ⁽¹⁾

Recherche des conditions pour qu'une famille d'hélices circulaires à plan directeur et dépendant d'un paramètre admette une enveloppe.

Les équations des hélices d'une telle famille peuvent s'écrire, avec un choix d'axes évident,

$$(7) \quad x = f_1(t) + \rho \cos \varphi, \quad y = f_2(t) + \rho \sin \varphi, \quad z = f_3(t) + K\varphi,$$

formules dans lesquelles ρ et K sont des fonctions quelconques de t , ainsi que f_1, f_2 et f_3 .

Les conditions déterminant l'enveloppe sont :

$$(8) \quad \frac{f'_1 + \rho' \cos \varphi}{-\rho \sin \varphi} = \frac{f'_2 + \rho' \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \frac{f'_3 + K' \varphi}{K}.$$

De ces relations on peut éliminer φ , ce qui donne la condition pour qu'il y ait une enveloppe, et tirer la valeur de φ correspondant au contact. Il y a intérêt à distinguer deux cas, suivant que ρ est constant ou variable.

⁽¹⁾ L'arbitraire ainsi laissée correspond au choix de la développée. On examinera en particulier le cas où le lieu de O est plan. Ce lieu est alors nécessairement un cercle et l'axe de l'hélice décrit un cône de révolution dont le lieu de O est un parallèle. (L'enveloppe se réduit au point à l'infini sur l'axe du cercle lorsque ce cône dégénère en un cylindre.) Le demi angle au sommet θ_0 du cône des axes, le rayon R_0 du cercle lieu de O sont liés aux constantes K_0 et ρ_0 de l'hélice par la relation.

$$\rho_0 = \frac{K_0 \cotang \theta_0}{\sin \frac{R_0}{K_0 \sin \theta_0}}.$$

La surface engendrée est de révolution. Il est d'ailleurs facile, par un raisonnement géométrique très simple de démontrer *a priori* la possibilité d'engendrer une surface de révolution ayant un parallèle donné au moyen d'une hélice dont l'axe rencontre l'axe de la surface et qui reste constamment tangente à ce parallèle.

A. ρ est constant. — Soit ρ_0 sa valeur.

a. Si l'on suppose K variable, le cas où il est constant devant être étudié à part, on trouve, en *prenant* K *pour variable indépendante*,

$$(9) \quad \varphi = \frac{K}{\rho_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} - f_3'$$

avec la condition

$$(10) \quad \frac{f_1'}{f_2'} + \text{tang} \left[\frac{K}{\rho_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} - f_3' \right] = 0,$$

qu'il peut y avoir intérêt à écrire

$$(11) \quad f_3' = \text{arc tang} \left[\frac{f_1'}{f_2'} \right] + \frac{K}{\rho_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Une simplification particulièrement intéressante se présente lorsque l'axe décrit un plan : alors $\frac{f_1'}{f_2'}$ est constant et, par un choix d'axes convenable, peut être supposé nul. La formule (11) se réduit (en se bornant à une détermination de l'arc tang) à

$$f_3' = \frac{K}{\rho_0} f_2'.$$

b. Si K était constant, on aurait

$$(9 \text{ bis}) \quad \text{tang } \varphi = - \frac{f_1'}{f_2'},$$

$$(10 \text{ bis}) \quad f_2' = \frac{K_0}{\rho_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}},$$

dont l'interprétation géométrique, très simple, est immédiate : *le lieu de O est une hélice générale ayant pour plan directeur celui des hélices circulaires génératrices.*

B. ρ est variable. — En le prenant pour variable indépendante, on est conduit à remplacer les conditions (8) par les suivantes :

$$(12) \quad f_1' \cos \varphi + f_2' \sin \varphi + 1 = 0, \quad \rho (f_3' + K' \varphi) = K (f_2' \cos \varphi - f_1' \sin \varphi).$$

La première des équations (12) ne sera résoluble en éléments réels que si f_1' et f_2' , supposés réels, sont tels que

$$f_1'^2 + f_2'^2 > 1.$$

On posera donc

$$(13) \quad f'_1 = -\frac{\sin \Phi(\varphi)}{\cos \Theta(\varphi)}, \quad f'_2 = \frac{\cos \Phi(\varphi)}{\cos \Theta(\varphi)};$$

ces relations permettront, f'_1 et f'_2 étant données, de trouver Φ et Θ sans introduction d'élément imaginaire, en dehors du cas où ceux-ci s'introduisent par la nature même de la question. La première équation (12) donne alors simplement

$$(14) \quad \varphi = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi + \Theta \quad (n \text{ entier}),$$

et la condition à laquelle doit satisfaire le mouvement de la génératrice est

$$(15) \quad f_3 = \frac{K}{\varphi} \tan \Theta(\varphi) - K' \left[2n\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi + \Theta \right].$$

En résumé, on peut théoriquement se donner trois des quantités f_1 , f_2 , f_3 ou K : la dernière s'en déduit. La solution peut s'achever complètement lorsque les données sont, ou f_1 , f_2 et K , ou, sous une autre forme, K , Θ et Φ ; f_3 s'obtient par quadrature.

Le résultat est particulièrement simple lorsque K est constant; nous y reviendrons ultérieurement.

A titre d'exemple, en prenant

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta = \frac{\pi}{3}, \quad n = 0,$$

on obtient, avec un choix d'axes convenable, le système de fonctions

$$f_1 = -2\varphi, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \sqrt{3} \int \frac{K d\varphi}{\varphi} - \frac{\pi}{3} K.$$

En particulierisant K , on peut obtenir des surfaces plus ou moins simples; ainsi, en prenant $K = \frac{\varphi^2}{\varphi_0}$ (φ_0 const.), on obtient la surface suivante où ne figurent plus que des opérations dégagées de tout signe d'intégration :

$$x = -2\varphi + \varphi \cos \varphi, \quad y = \varphi \sin \varphi, \quad z = \left(\frac{\sqrt{3}}{a} - \frac{\pi}{3} \right) \frac{\varphi^2}{\varphi_0} + \frac{\varphi^2}{\varphi_0} \varphi.$$

On observera que les courbes $\varphi = \text{const.}$ de cette surface sont des paraboles.

2. RECHERCHE DES CONDITIONS DE CONTACT D'UNE HÉLICE CIRCULAIRE AVEC UNE COURBE DONNÉE. — La recherche directe des conditions de contact supérieur d'une hélice mobile avec son enveloppe est d'une complication considérable et ne présente aucun intérêt. Il est tout à fait préférable d'étudier les conditions de contact d'une hélice et d'une courbe donnée, ce qui définira géométriquement le mouvement de l'hélice génératrice, si l'on se place au point de vue de l'étude de la surface engendrée par cette courbe, de même que l'étude directe du mouvement de la tangente à une courbe gauche conduit beaucoup plus naturellement à l'obtention des propriétés des développables que la considération des conditions assurant à une droite mobile l'existence d'une enveloppe.

A. *Hélices circulaires tangentes en un point à une courbe gauche.* — On peut prendre pour axe de l'hélice une droite telle que la perpendiculaire qui lui est commune avec la tangente au point considéré coupe celle-ci en son point de contact avec la courbe. Le cylindre circulaire qui la porte s'obtient immédiatement : il est engendré par la parallèle à l'axe passant par le point de contact. L'hélice est alors entièrement déterminée. On voit donc qu'il existe une triple infinité d'hélices circulaires tangentes en un point à une courbe. Leurs axes forment un complexe.

Une démonstration géométrique très élémentaire conduit au résultat suivant :

Le cône du complexe des axes des hélices circulaires tangentes en un point à une courbe a pour base le cercle décrit dans le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe passant par le point de contact et ayant pour diamètre le segment compris entre ce point et la projection orthogonale sur le plan défini ci-dessus du sommet du cône du complexe.

B. *Hélices circulaires ayant en un point d'une courbe gauche un contact de second ordre avec cette courbe.* — L'hélice et la courbe doivent avoir même normale principale : on en conclut de suite que l'axe de l'hélice cherchée doit rencontrer la normale principale de la courbe.

Soit M le point de la courbe, ω le point de la normale principale

où l'axe de l'hélice cherchée coupe cette normale et α l'angle de la courbe avec cet axe.

L'axe de l'hélice doit évidemment être perpendiculaire à $M\omega$ en ω ; si cela a lieu, l'hélice tangente en M à la courbe considérée et décrite sur le cylindre circulaire de rayon $M\omega$, et dont l'axe satisfait aux conditions que nous venons de définir, admet même plan osculateur que la courbe donnée; le contact du second ordre sera donc réalisé en imposant l'égalité des rayons de courbure. c'est-à-dire si l'on a

$$(16) \quad \frac{M\omega}{\sin^2 \alpha} = R$$

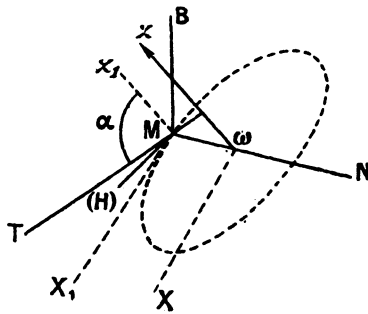
(R , rayon de courbure de la courbe en M).

On trouve sans peine que :

Le lieu des axes des hélices ayant en un point d'une courbe un contact du second ordre avec celle-ci est un cylindroïde ayant pour plan directeur le plan rectifiant et pour directrice rectiligne, la normale principale; l'équation de cette surface rapportée au trièdre fondamental correspondant au point considéré est

$$(17) \quad R z^2 = y(x^2 + z^2).$$

Fig. 1.



La considération de la figure ci-dessus donne sans difficulté, en se rappelant que

$$K = \rho \cot \alpha$$

et que, pour des hélices ayant avec la courbe un contact du second

ordre. $\varphi = M\omega = R \sin^2 \alpha$:

$$(18) \quad \begin{cases} x = R \cos \varphi \sin^2 \alpha + R \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ y = R \sin^2 \alpha \sin \varphi + R \sin^2 \alpha \quad (M\omega = R \sin^2 \alpha), \\ z = -R \cos \varphi \sin^2 \alpha \cos \alpha + \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

On déduit immédiatement de là les équations paramétriques générales des surfaces engendrées par une hélice circulaire ayant avec une courbe donnée un contact du deuxième ordre; ces équations sont

$$(19) \quad X = \mathfrak{X} + \tau_1 x + \tau_2 y + \tau_3 z, \quad \dots,$$

τ_1, τ_2, τ_3 , cosinus directeurs de la tangente;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$, cosinus directeurs de la binormale;

ν_1, ν_2, ν_3 , cosinus directeurs de la normale principale à la courbe considérée;

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, coordonnées d'un de ses points; x, y, z définies par les équations (18) dans lesquelles α doit être considérée comme une fonction du paramètre qui définit l'arête de rebroussement.

Parmi les hélices ayant avec la courbe un contact du second ordre, il est intéressant de rechercher s'il n'en existe pas ayant le même rayon de torsion que celle-ci. Envisageons d'abord les valeurs absolues.

Soit T le rayon de torsion de la courbe; l'égalité des rayons de torsion donne

$$(20) \quad \frac{\varphi}{\sin \alpha \cos \alpha} = T,$$

et, d'autre part, on a [équation (16)]

$$(21) \quad \varphi = R \sin^2 \alpha;$$

des équations (20) et (21), on tire

$$\varphi = \frac{RT^2}{R^2 + T^2}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{T}{\sqrt{R^2 + T^2}} \quad (\sin \alpha \cos \alpha \neq 0).$$

Il existe donc deux hélices répondant à la question; les deux axes passent par le point central de la normale principale et sont, l'un d'eux parallèle à la caractéristique du plan rectifiant, l'autre symé-

trique du précédent par rapport à la tangente. La première hélice seule a même torsion que la courbe, compte tenu du signe, c'est-à-dire de la disposition.

C. *Hélices ayant un contact du troisième ordre avec une courbe.* — Pour qu'une hélice circulaire ait un contact du troisième ordre avec une courbe, il faut et il suffit qu'outre les conditions ci-dessus (contact du deuxième ordre et même torsion en grandeur et signe), la suivante :

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds} = 0$$

soit aussi vérifiée.

Donc :

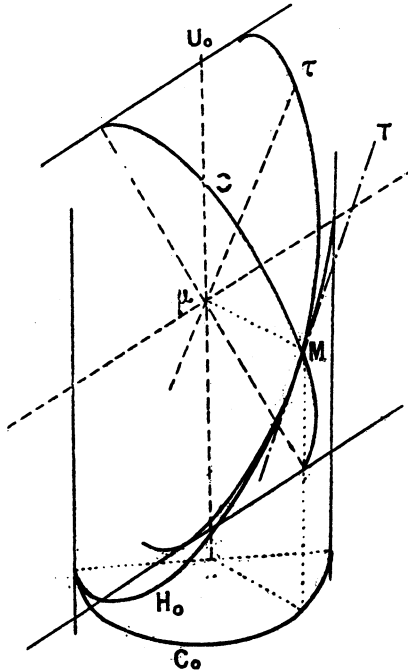
Aux points d'une courbe où la courbure est stationnaire, il existe une hélice circulaire ayant un contact du troisième ordre avec la courbe.

En particulier : *pour toute courbe à courbure constante, il existe en chaque point une hélice circulaire ayant un contact du troisième ordre avec la courbe. Cette hélice (sauf l'exception signalée ci-après) engendre, dans son mouvement, une surface dont l'arête de rebroussement possède un contact du troisième ordre avec la génératrice. On voit en passant que cette condition implique pour la génératrice de conserver la même courbure pendant tout son mouvement.*

Par contre : *une hélice circulaire de grandeur constante ne peut engendrer une telle surface : l'arête de rebroussement est en effet une hélice égale à la génératrice qui se confond avec toutes ses hélices osculatrices.* Il est intéressant de voir directement comment se comporte la seconde hélice ayant avec l'hélice de rebroussement un contact du second ordre et une torsion symétrique de la sienne. Cette hélice engendre visiblement un hélicoïde. Dans la figure ci-contre, (H_0) représente l'hélice circulaire donnée; fixe (C_0) son cercle principal; M est un point de l'hélice, $M\mu$ la normale principale coupant l'axe en μ . Le plan de la figure est le plan perpendiculaire à $M\mu$ passant par μ : $\mu\tau$ parallèle à la tangente $M\tau$ est dans ce plan; soit μU symétrique de l'axe μU_0 de (H_0) par rapport à $\mu\tau$.

Un cylindre circulaire d'axe μU égal au cylindre de base (C_0) passe en M . L'hélice de tangente MT tracée sur le cylindre est symétrique de l'hélice H_0 car elle a même courbure et même rayon de torsion mais forme avec elle une disposition différente. C'est

Fig. 2.



l'hélice cherchée. On voit que, dans son mouvement, son axe engendre une surface de vis. Ceci permettrait un autre énoncé à peu près évident pour définir la génération de la surface engendrée par l'hélice (H). Si H_0 , et par suite H , sont équiangles, la surface des axes est l'hélicoïde minimum réglé.

Cas particulier des surfaces à plan directeur. — Il est à peu près évident que le contact d'ordre le plus élevé que l'on puisse imposer à l'hélice mobile d'avoir avec l'arête de rebroussement, dans le cas des surfaces à plan directeur, est le contact du second ordre. On voit, en effet, en projetant sur le plan directeur, que le cercle principal possèdera avec son enveloppe un contact de

même ordre au moins que l'hélice avec l'arête de rebroussement. Ceci montre, également, que, pour qu'il y ait contact du second ordre, il faut que le cercle principal sur le plan de base reste osculateur à une courbe fixe. Il faut, en outre, que l'arête de rebroussement soit une hélice quelconque de même plan de base. Car sa normale principale commune en chaque point avec l'hélice mobile reste parallèle à ce plan.

On voit sans peine que ces conditions sont suffisantes.

On obtiendra donc de la façon suivante la surface la plus générale ayant un plan directeur et une arête de rebroussement dont la génératrice possède un contact du second ordre avec son enveloppe :

Une hélice quelconque (H) étant donnée, tracer sur le cylindre ayant pour base le cercle osculateur de la projection de cette hélice sur son plan de base, l'hélice circulaire tangente à (H) au point correspondant au cercle osculateur considéré. Lorsque ce point varie, l'hélice circulaire engendre la surface cherchée.

CHAPITRE II.

SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE À PLAN DIRECTEUR ET À PAS CONSTANT.

La présente étude comportera deux parties, l'une relative aux surfaces générales engendrées par une hélice circulaire à plan directeur et à pas constant, l'autre consacrée à l'examen de quelques types particuliers.

PREMIÈRE PARTIE. — Surfaces générales.

1. FORMULES GÉNÉRALES. — Par un choix convenable et évident des axes, les surfaces engendrées par une hélice circulaire à pas constant et à plan directeur peuvent être représentées par les formules

$$(I) \quad \begin{cases} x = f_1(t) + \rho \cos \varphi, \\ y = f_2(t) + \rho \sin \varphi, \\ z = f_3(t) + K_0 \varphi \end{cases}$$

(φ fonction de t qui se réduit à une constante dans le cas d'une génératrice indéformable), desquelles on tire

$$(II) \quad \begin{cases} dx = -\rho \sin \varphi d\varphi + (f'_1 + \rho' \cos \varphi) dt, \\ dy = \rho \cos \varphi d\varphi + (f'_2 + \rho' \sin \varphi) dt, \\ dz = K_0 d\varphi + f'_3 dt \end{cases}$$

et

$$(III) \quad ds^2 = E dt^2 + 2F dt d\varphi + G d\varphi^2$$

avec

$$(III \text{ bis}) \quad \begin{cases} E = f'^2_1 + f'^2_2 + f'^2_3 + \rho'^2 + 2\rho'(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi), \\ F = \rho(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) + K_0 f'_3, \\ G = \rho^2 + K_0^2. \end{cases}$$

Les coefficients A, B, C du plan tangent sont donnés par

$$(IV) \quad \begin{cases} A = K_0(f'_2 + \rho' \sin \varphi) - f'_3 \rho \cos \varphi, \\ B = -K_0(f'_1 + \rho' \cos \varphi) - f'_3 \rho \sin \varphi, \\ C = \rho(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho') \end{cases}$$

et

$$(V) \quad H^2 = A^2 + B^2 + C^2 = K_0^2[f'^2_1 + f'^2_2 + \rho'^2 + 2\rho'(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi)] \\ + \rho^2 f'^2_3 + 2K_0 f'_3 \rho[f'_1 \sin \varphi - f'_2 \cos \varphi] \\ + \rho^2(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho')^2.$$

L'angle ϖ fait par la normale principale de la génératrice avec la normale à la surface est donné par la formule

$$(VI) \quad \tan \varpi = \frac{(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho')(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3},$$

et l'angle V du plan tangent avec le plan de base par

$$(VII) \quad \tan^2 V = \frac{K_0^2}{\rho^2} + \frac{[K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3]^2}{\rho^2(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho')^2}.$$

Enfin, les déterminants D, D', D'' de Gauss sont ici

$$(VIII) \quad D = f''_3 \rho(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho') - f'_3 \rho(f''_1 \cos \varphi + f''_2 \sin \varphi + \rho'') \\ + K_0[f''_1 f'_2 - f'_1 f''_2 + \cos \varphi(f'_2 \rho'' - f''_2 \rho') \\ - \sin \varphi(f'_1 \rho'' - f''_1 \rho')],$$

$$(IX) \quad D' = -\rho' K_0[f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho'],$$

$$(X) \quad D'' = -\rho[K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3].$$

Pour la plupart des utilisations pratiques de ces formules, il y aura, lorsque l'hélice est déformable, intérêt à prendre φ pour variable indépendante ($\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$); lorsque l'hélice est de forme invariable, on ne peut plus prendre φ , qui est constant, comme variable indépendante; mais alors $\varphi' = \varphi'' = 0$ et les formules se simplifient considérablement.

2. PROBLÈMES RELATIFS AU PLAN TANGENT. — La détermination de la courbe de contact du cône circonscrit ayant son sommet en un point donné est, comme dans le cas général, un problème dépendant d'équations où l'angle φ est enchevêtré avec les lignes trigonométriques. Mais, par contre, il est intéressant d'observer que le problème correspondant relatif aux cylindres circonscrits dépend uniquement de la solution d'équations trigonométriques. La considération de ces équations conduit même à des résultats intéressants.

L'équation déterminant la courbe de contact du cylindre parallèle à la direction (α , β , γ) est

$$(1) \quad \alpha [K_0(f'_2 + \varphi' \sin \varphi) - f'_3 \rho \cos \varphi] \\ - \beta [K_0(f'_1 + \varphi' \cos \varphi) + f'_3 \rho \sin \varphi] + \gamma \rho (f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \varphi') = 0.$$

Dès lors :

Sur chaque génératrice existent deux séries de points de la courbe de contact, les points de chaque série étant répartis à égale distance sur une arête du cylindre principal de la génératrice. En particulier, si $\alpha = \beta = 0$, on obtient l'équation du contour apparent sur le plan de la base.

La détermination de la développable d'égale pente, faisant avec plan de base l'angle V_0 , donne lieu à des remarques analogues. Toutefois, dans le cas des hélicoïdes ($f'_1 = f'_2 = 0$), la courbe de contact se réduit à un ensemble de génératrices.

3. LIGNE DE STRICTIION. — La ligne de striction de première espèce est donnée par l'équation

$$(2) \quad K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3 = 0;$$

celle de seconde espèce est définie par la relation

$$(3) \quad (f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) [\rho^2 (f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi) + \rho' (\rho^2 + K_0^2)] \\ + K_0 \rho f'_3 (f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi) = 0.$$

Ces deux lignes ont une branche commune dans les trois cas suivants :

si

$$f'_3 = 0,$$

ou si

$$f'_2 = \varepsilon i f'_1 \quad (\varepsilon = \pm i)$$

avec

$$f'_3 = \frac{\varepsilon K_0 i \rho'}{\rho},$$

ou enfin si

$$f_1'^2 + f_2'^2 - \frac{\rho^2}{K_0^2} f_3'^2 - \rho'^2 = 0.$$

A. Lorsque $f'_3 = 0$, on trouve les surfaces Φ déjà rencontrées (cf *T. H. C.*, Chap. II, n° 6) et que nous retrouverons plus loin. La ligne de striction de première espèce fait entièrement partie de la ligne de striction de seconde espèce.

B. Si $f'_2 = \varepsilon i f'_1$, sans que f'_1 et f'_2 soient nuls ensemble ⁽¹⁾, l'axe de l'hélice décrit un plan isotrope. Deux cas à distinguer :

1° Si ρ est constant, la surface engendrée est un cylindre isotrope à génératrices parallèles à l'intersection du plan directeur et du plan décrit par l'axe.

2° Si ρ est variable, on trouve la surface représentée canoniquement par les équations

$$(XI) \quad x = f_1(\rho) + \rho \cos \varphi, \quad y = f_2(\rho) + \rho \sin \varphi, \\ z = K_0 \left(\varphi + i \log \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (\rho_0 \text{ const.}).$$

C. Reste enfin le cas où l'on a

$$(4) \quad f_1'^2 + f_2'^2 - \frac{\rho^2}{K_0^2} f_3'^2 - \rho'^2 = 0.$$

(1) Si $f'_1 = f'_2 = 0$ on trouve les hélicoïdes; dans ce cas il faut examiner directement ce qui se passe. La ligne de striction de seconde espèce est indéterminée : celle de première espèce s'évanouit, sauf pour l'hélicoïde gauche minimum pour lequel elle est indéterminée.

Enfin, notons que, dans tout ce paragraphe, on laisse de côté le cas de $f_3'^2 + K_0^2 = 0$.

Les surfaces correspondantes sont les surfaces Γ déjà trouvées (cf *T. H. C.*, Chap. II, n° 6) et que nous allons étudier plus spécialement ci-après. La partie commune des deux lignes de striction est une arête de rebroussement enveloppe des hélices génératrices.

V. *Courbure moyenne et courbure totale.* — Leur expression est facile à écrire; nous nous bornons à en indiquer la forme sans en expliciter les coefficients; on a

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{H^3} = \frac{P_2(\sin \varphi, \cos \varphi)}{[R_2(\sin \varphi, \cos \varphi)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^4} = \frac{Q_2(\sin \varphi, \cos \varphi)}{[R_2(\sin \varphi, \cos \varphi)]^2}$$

(P_2, Q_2, R_2 polynomes du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$).

DEUXIÈME PARTIE. — Surfaces particulières.

I. — Surfaces Γ .

1. SURFACES A GÉNÉRATRICE INDÉFORMABLE. — A. Nous étudierons tout d'abord celles des surfaces Γ qui sont engendrées par une hélice de forme invariable, c'est-à-dire pour lesquelles ρ est constant, soit $\rho = \rho_0$.

La relation (4) devient alors

$$(4 \text{ bis}) \quad f_1'^2 + f_2'^2 = \frac{\rho_0^2}{K_0^2} f_3'^2,$$

qu'on peut alors remplacer par

$$(5) \quad f_1' = \varepsilon_1 \frac{\rho_0}{K_0} f_3'(t) \sin \theta(t), \quad f_2' = \varepsilon_2 \frac{\rho_0}{K_0} f_3'(t) \cos \theta(t),$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$).

On peut d'ailleurs, sans limiter aucunement la généralité de l'étude, prendre $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1$. Cela posé, si l'on suppose θ constant, on trouve un cylindre engendré par une droite primitivement tangente à une hélice circulaire et qui se meut parallèlement à sa position initiale en s'appuyant constamment sur l'hélice. Ce cas éliminé, on peut prendre θ comme variable indépendante, et l'on obtient sous la forme réduite suivante les équations

tions paramétriques des surfaces étudiées :

$$(XI'') \quad \begin{cases} x = -\frac{\rho_0}{K_0} \int_0^\theta f'_3(\theta) \sin \theta \, d\theta + \rho_0 \cos \varphi, \\ y = \frac{\rho_0}{K_0} \int_0^\theta f'_3(\theta) \cos \theta \, d\theta + \rho_0 \sin \varphi, \\ z = f_3(\theta) + K_0 \varphi. \end{cases}$$

La surface définie par les équations (XII) est une surface de translation. Les courbes conjuguées des hélices circulaires génératrices sont des hélices de même pas angulaire et de même plan directeur que les génératrices, comme on le voit en observant que, pour les courbes $\varphi = \text{const.}$ on a, en désignant par ds l'élément d'arc de la projection sur xOy ,

$$\frac{ds}{dz} = \frac{(\rho_0^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0}.$$

Le rayon de courbure du cylindre principal de ces hélices est

$$R = \frac{\rho_0}{K_0} f'_3.$$

L'enveloppe des génératrices, partie commune aux deux lignes de striction, est définie par la relation

$$(6) \quad 0 - \varphi = 2n\pi \quad (n \text{ entier}).$$

Nous distinguerons ces surfaces en les désignant sous le nom de *surfaces* Γ_0 .

2. L'équation des asymptotiques se réduit à

$$(7) \quad f'_3[1 - \cos(\theta - \varphi)] \left[\frac{f'_3(\theta)}{K_0} d\theta^2 - d\varphi^2 \right] = 0.$$

On ne peut supposer f'_3 nul identiquement ⁽¹⁾ car l'hélice génératrice serait immobile; l'annulation du premier crochet correspond à l'arête de rebroussement. L'équation des asymptotiques

(1) Quant aux valeurs isolées de θ annulant f'_3 , elles correspondent à des génératrices singulières. Les coefficients A, B, C du plan tangent s'annulent en effet dans ce cas (Cf. Formule IV).

prend en définitive la forme simple

$$(8) \quad d\varphi = \pm \left(\frac{f'_3}{K_0} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

ou

$$\varphi = \pm \int^{\theta} \left(\frac{f'_3}{K_0} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Les *invariants de Gauss* et les éléments de courbure de la surface sont donnés par le Tableau suivant :

$$(XIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = f_3'^2 \left(\frac{\rho_0^2 + K_0^2}{K_0^2} \right), \quad F = f_3' \frac{f_0'^2}{K_0^2} \left[\frac{K_0^2}{\rho_0^2} + \cos(\theta - \varphi) \right], \\ G = \rho_0^2 + K_0^2; \\ H = \frac{2f_3'\rho_0}{K_0} \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \left[\rho_0^2 \cos^2\frac{\theta - \varphi}{2} + K_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ D = -2 \frac{f_3'^2 \rho_0^2}{K_0} \sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right), \\ D' = 0, \quad D'' = 2f_3'\rho_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right); \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4} \frac{K_0(\rho_0^2 + K_0^2)[f_3'(\theta) - K_0]}{\rho_0 \left[f_3'(\theta) \sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \right] \left[\rho_0^2 \cos^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) + K_0^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{4} \frac{K_0^3}{f_3'(\theta) \left[\rho_0^2 \cos^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) + K_0^2 \right]^2}. \end{array} \right.$$

Le contour apparent de la surface sur son plan directeur est donné par la formule

$$(9) \quad \theta - \varphi = (2n + 1)\pi \quad (\pi \text{ entier}).$$

Il est donc constitué en projection sur le plan directeur par le lieu du point du cercle principal diamétralement opposé de son contact avec son enveloppe, résultat qui pouvait être prévu géométriquement.

On a démontré (cf *T. H. C.*, Chap. II, nos 11 et 12) que la normale le long d'une génératrice d'une surface engendrée par une hélice indéformable à plan directeur admet une directrice

rectiligne et un plan directeur. Il suffit de se reporter aux formules données dans ce Mémoire pour voir que, dans le cas actuel :

La normale le long d'une génératrice admet pour directrice rectiligne la génératrice rectiligne de son cylindre principal passant par le point de contact de l'hélice et de son enveloppe, et pour plan directeur le plan

$$(10) \quad z = \frac{\varphi_0}{K_0} (x \sin \theta - y \cos \theta).$$

Les formules du Tableau XIII donnent lieu aux remarques suivantes :

La courbure moyenne est nulle sur les génératrices satisfaisant à l'équation $f'_3 = K_0$. En particulier, la surface est minima si f_3 se réduit à $K_0 \theta + \text{const.}$

On vérifie sans peine qu'on se trouve alors en présence de l'hélicoïde réglé minimum.

La valeur absolue de la courbure totale sur une hélice génératrice varie entre les deux limites suivantes :

$$\frac{1}{4K_0 f'_3} \quad \text{et} \quad \frac{K_0^2}{4(\varphi_0^2 + K_0^2) f'_3}$$

qu'elle atteint respectivement pour les points du contour apparent et sur l'arête de rebroussement ⁽¹⁾.

L'angle V du plan tangent avec le plan directeur est donné par

$$(11) \quad \tan^2 V = \frac{K_0^2}{\varphi_0^2} + \tan^2 U$$

avec

$$\tan U = \frac{K_0}{\varphi_0} \tan \alpha \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)$$

ou

$$(11 \text{ bis}) \quad \tan V = \frac{K_0}{\varphi_0} \frac{1}{\cos \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)}.$$

(¹) A la vérité, on obtient sur celle-ci ces éléments sous forme indéterminée sur cette arête; mais les formules du texte sont débarrassées du facteur d'indétermination, et l'on voit que si, comme cela a lieu en général, une arête est un lieu de singularités, les valeurs dont il s'agit ici sont les limites de celles qui sont relatives à un point s'approchant du point de l'arête.

L'expression du paramètre de distribution est

$$(12) \quad P = \frac{1}{2} \frac{K_0}{\rho_0} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)}.$$

3. SURFACES Γ_0 HÉLICOÏDALES. — Lorsque f_3 se réduit à une fonction du premier degré de θ , que l'on peut sans aucune restriction supposée réduite à $K_1 \theta$ (K_1 const.), les surfaces Γ_0 obtenues se réduisent à des hélicoïdes, les hélices conjuguées $\varphi = \text{const.}$ devenant des hélices circulaires (*cf* n° 1).

On obtient ainsi des hélicoïdes très remarquables à double génération par hélices circulaires indéformables formant un réseau conjugué. Ces surfaces peuvent être représentées par les équations

$$(XIV) \quad \begin{cases} x = \rho_1 \cos \theta + \rho_0 \cos \varphi, \\ y = \rho_1 \sin \theta + \rho_0 \cos \varphi \\ z = K_1 \theta + K_0 \varphi. \end{cases} \quad \left(\frac{\rho_1}{K_1} = \frac{\rho_0}{K_0} \right),$$

Les hélices $\varphi = \text{const.}$ et les hélices $\theta = \text{const.}$ ont pour enveloppe l'hélice

$$(13) \quad x = (\rho_0 + \rho_1) \cos \xi, \quad y = (\rho_0 + \rho_1) \sin \xi, \quad z = (K_0 + K_1) \xi.$$

La surface hélicoïdale étudiée peut être considérée comme engendrée, soit par l'hélice (ρ_0, K_0) , soit par l'hélice (ρ_1, K_1) , se mouvant en restant constamment tangente à l'hélice $(\rho_0 + \rho_1, K_0 + K_1)$.

Enfin, si l'on tient compte de la similitude des hélices considérées, on peut voir par un raisonnement géométrique très simple que :

Le mouvement de l'hélice génératrice s'obtient en faisant rouler son cylindre principal sur le cylindre principal $(\rho_0 + \rho_1)$ de l'enveloppe.

Avant de quitter ce sujet, faisons les deux remarques suivantes, faciles à vérifier :

1° Si $K_1 = K_0$, la surface trouvée est la surface de vis à filet carré.

2° Si $K_1 = -K_0$, on obtient une surface de révolution obtenue par la rotation d'une hélice autour d'une parallèle à son axe.

B. Surfaces Γ générales.

4. Nous allons passer maintenant à l'étude des surfaces Γ engendrées par une hélice déformable. Le rayon ρ est alors variable et, en le prenant pour variable indépendante, on peut remplacer la relation (4) par l'ensemble des suivantes, qui lui est équivalent :

$$f'_1 = -\frac{\sin \Phi(\rho)}{\cos \Theta(\rho)}, \quad f'_2 = \frac{\cos \Phi(\rho)}{\cos \Theta(\rho)}, \quad \rho f'_3 = K_0 \tan \Theta(\rho),$$

dans lesquelles Φ et Θ sont deux fonctions arbitraires.

On trouve ainsi pour les surfaces Γ les équations réduites suivantes :

$$(XV) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi - \int \rho \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} d\rho, \\ y = \rho \sin \varphi + \int \rho \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} d\rho, \\ z = K_0 \varphi + K_0 \int \frac{\tan \Theta(\rho)}{\rho} d\rho. \end{cases}$$

L'équation de l'enveloppe des génératrices est la solution commune aux équations

$$\cos(\varphi - \Phi) - \sin \Theta = 0, \quad \sin(\varphi - \Phi) + \cos \Theta = 0;$$

cette enveloppe a donc simplement pour équation

$$(XVI) \quad \varphi = 2n_1\pi - \frac{\pi}{2} + \Theta + \Phi \quad (n_1 \text{ entier}).$$

Les coefficients du plan tangent sont

$$(XVII) \quad \begin{cases} A = K_0 \frac{[\cos \Phi + \sin(\varphi - \Theta)]}{\cos \Theta}, & B = K_0 \frac{[\sin \Phi - \cos(\varphi - \Theta)]}{\cos \Phi}, \\ C = \rho \frac{[\sin(\varphi - \Phi) + \cos \Theta]}{\cos \Theta} \end{cases}$$

et

$$(XVIII) \quad H^2 = \frac{\rho^2 [\sin(\varphi - \Theta) + \cos \Theta]^2 + 2K_0^2 [1 + \sin(\varphi - \Phi - \Theta)]}{\cos^2 \Theta}.$$

L'équation du *contour apparent de la surface* sur son plan de base s'obtient immédiatement sous la forme

$$\sin(\varphi - \Phi) = -\cos \Theta.$$

Une partie de cette solution est à rejeter, en ce sens qu'elle donne l'arête de rebroussement pour laquelle le plan tangent est indéterminé; en définitive, l'équation du contour apparent est

$$(XIX) \quad \varphi = 2n_2\pi - \frac{\pi}{2} - \Theta + \Phi.$$

L'angle π *formé par le plan osculateur de la génératrice* avec la normale à la surface est donné par la formule

$$(XX) \quad \tan \pi = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi - \Phi + \Theta \right]}{K_0 \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \varphi + \Phi - \Theta \right]}.$$

On vérifie sans aucune difficulté que :

La normale relative à la génératrice (ρ) admet une directrice rectiligne parallèle à son axe, de coordonnées :

$$(14) \quad \begin{cases} x = - \int^{\rho} \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} d\rho + \rho \sin(\Theta - \Phi), \\ y = \int^{\rho} \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} d\rho + \rho \cos(\Theta - \Phi). \end{cases}$$

On voit que *cette directrice rectiligne est l'arête du cylindre principal de la génératrice*, correspondant à la valeur

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \Theta + \Phi.$$

Cette normale admet également un plan directeur d'équation

$$(15) \quad \frac{K_0}{\rho} z = \cos(\Theta - \Phi)x - \sin(\Theta - \Phi)y.$$

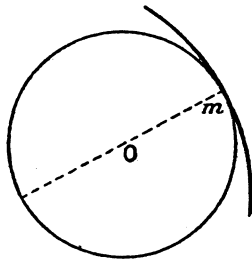
La comparaison des formules (XIX) et (14) conduit de suite au résultat suivant :

Les points d'une génératrice situés sur le contour apparent se trouvent sur la génératrice rectiligne de son cylindre

principal diamétralement opposée de la génératrice servant de directrice rectiligne à la normale relative à l'hélice considérée.

Dans le cas général où Φ et Θ sont quelconques, la surface est encore très générale, et il ne paraît pas qu'il soit possible de signaler de nouvelles propriétés intéressantes.

Fig. 3.



Si Θ se réduit à une constante, f_3 est logarithmique; nous nous arrêterons de suite au cas où $\Theta = 0$; on trouve alors les surfaces C. qui appartiennent à la fois à la classe des surfaces Γ et à celle des surfaces Φ .

3. Surfaces C.

En choisissant convenablement l'origine, on peut prendre pour équations de ces surfaces

$$(XV \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi - \int \sin \Phi(\rho) d\rho, \\ y = \rho \sin \varphi + \int \cos \Phi(\rho) d\rho, \\ z = K_0 \varphi. \end{cases}$$

Les diverses formules relatives aux surfaces Γ générales se simplifient considérablement; on trouve :

Enveloppe des génératrices

$$(XVI \text{ bis}) \quad \varphi = 2n_1\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi.$$

Coefficients du plan tangent :

$$(XVII \text{ bis}) \quad \begin{cases} A = K_0(\sin \varphi + \cos \Phi), \\ B = K_0(-\cos \varphi + \sin \Phi), \\ C = \rho[\sin(\varphi - \Phi) + 1]. \end{cases}$$

Le contour apparent se réduit ici à la projection de l'enveloppe. résultat à prévoir, si l'on observe que la condition

$$f_1'^2 + f_2'^2 = 1$$

indique que le cylindre principal reste osculateur à un cylindre fixe.

L'angle ϖ est donné par la formule

$$(XX\ bis) \quad \tan \varpi = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi - \Phi}{2} \right).$$

Le paramètre de distribution a pour valeur en chaque point

$$(16) \quad P = -\frac{1}{2} \frac{K_0}{\rho} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \Phi}{2} \right)};$$

abstraction faite du signe, cette valeur est minima, sur une génératrice donnée par les points pour lesquels

$$(17) \quad \varphi = 2n_3\pi + \frac{\pi}{2} + \Phi. \quad (n_3 \text{ entier}).$$

Ces points se trouvent sur la génératrice rectiligne du cylindre principal directement opposée à celle qui porte les points de l'enveloppe de l'hélice; cette droite n'est autre que la directrice rectiligne de la normale correspondant à l'hélice génératrice considérée.

L'équation des asymptotiques est

$$(18) \quad \Phi' d\rho^2 + 2 d\rho \cdot d\varphi + \rho \tan \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\varphi - \Phi}{2} \right) \right] d\varphi^2 = 0.$$

Elle s'intègre sans difficulté lorsque Φ est constant. Mais alors on constate sans peine qu'on se trouve en présence de la génération de la surface de vis à filet carré par des hélices du deuxième système dont l'axe décrit un plan passant par l'axe de la surface.

Dans le cas général, on observera qu'elle ne dépend pas de K_0 .

Courbure totale et courbure moyenne. — On obtient sans

difficulté les valeurs suivantes des invariants de Gauss, en posant

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \Phi}{2}, \\ E = 4 \cos^2 \varphi_1, \quad F = 2 \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_1, \\ G = \rho^2 + K_0^2, \quad H = 2 \cos \varphi_1 (K_0^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}, \\ D = -2 K_0 \Phi' \cos^2 \varphi_1, \quad D' = -2 K_0 \cos^2 \varphi_1, \\ D'' = -2 K_0 \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_1. \end{array} \right.$$

D'où l'on tire pour la courbure moyenne

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \frac{K_0 \Phi' (\rho^2 + K_0^2)}{4 (K_0^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi_1)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi_1}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{K_0^2}{4} \frac{\Phi' \rho \tan \varphi_1 - 1}{(K_0^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi_1)^2}. \end{array} \right.$$

Les seuls résultats qu'il nous paraît intéressant de tirer de ces formules sont indiquées par le théorème suivant :

THÉOREME. — *Sur une hélice génératrice déterminée : il existe une série de points paraboliques situés sur une génératrice du cylindre principal. Cette génératrice est définie par la valeur de l'argument φ donnée par la formule*

$$(21) \quad \varphi_0 = \Phi + \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

l'angle α étant l'angle compris entre 0 et π dont la tangente est

$$(22) \quad \tan \alpha = \frac{1}{\rho \Phi'} \quad (1).$$

2° *La courbure moyenne possède un minimum de valeur absolue : les points où cette valeur est minima sont les mêmes que ceux qui rendent minimum le paramètre de distribution.*

La valeur du minimum de la valeur absolue de la courbure

(1) Si Φ' est constamment nul, $\varphi_0 = \Phi - \frac{\pi}{2}$, on trouve l'enveloppe des génératrices. Le résultat pour ces points peut être en défaut. Il l'est, en effet. La surface est ici un hélicoïde de gauche minimum.

moyenne est donnée par :

$$(23) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_m = \frac{K_0 \Phi'}{(K_0^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Remarque. — Sur les génératrices pour lesquelles $\Phi'(\rho)$ est nulle, la courbure moyenne est constamment nulle.

Courbure géodésique. — En se reportant aux formules générales données antérieurement (Cf. *T. H. C.* Chap. I, n^{os} 9 et 13), on obtient pour la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_g}$ d'une courbe inclinée de l'angle i sur la génératrice

$$(24) \quad \frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} - \frac{\rho \cos \varphi_1}{(K_0^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{2 \sin \varphi_1 (K_0^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}}{K_0^2 + \rho^2} \frac{d\rho}{ds}.$$

En particulier :

Pour une génératrice

$$(25) \quad \left(\frac{1}{\rho_g} \right)_H = - \frac{\rho \cos \varphi_1}{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 \cos^2 \varphi_1 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette valeur est maxima pour les points qui donnent à la courbure moyenne la valeur absolue minima.

6. ÉTUDE PARTICULIÈRE D'UNE SURFACE. — Comme exemple d'une surface C dont la construction graphique est facile, et qui constitue, après la surface de vis à filet carré, la plus simple de ces surfaces, nous étudierons particulièrement celle qui est définie par la valeur suivante de la fonction Φ

$$\Phi = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (\rho_0 \text{ const.}).$$

Les équations de cette surface particulière sont :

$$(XV \text{ ter}) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi + \rho_0 \cos \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ y = \rho \sin \varphi + \rho_0 \sin \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ z = K_0 \varphi. \end{cases}$$

L'axe de la génératrice décrit un cylindre circulaire; le rayon

du cercle principal croît proportionnellement à l'arc décrit par le pied de son axe. La projection sur le plan de base de l'enveloppe des génératrices est définie par la relation

$$(26) \quad \varphi = 2n_1\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi.$$

L'interprétation de cette condition est facile et d'ailleurs évidente si l'on se rappelle la loi de variation du rayon du cercle principal de la génératrice. L'enveloppe des génératrices se projette sur le plan de base suivant une développante de cercle. On en déduit immédiatement le lieu des directrices rectilignes des normales le long d'une génératrice; ce lieu se confond avec le cylindre projetant sur le plan de base la courbe lieu commun des points de chaque hélice génératrice à courbure moyenne minima et à paramètre de distribution minimum.

II. — Surfaces Φ .

7. Comme pour les surfaces Γ , nous commencerons par étudier celles de ces surfaces dont la génératrice est indéformable.

A. *Surfaces Φ engendrées par une hélice de forme invariable.* — Alors φ est constant, soit $\varphi = \varphi_0$.

La surface peut être représentée en équations réduites par le système

$$(XXI) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi_0 \cos \varphi + \int_0^\sigma \cos f(\tau) d\tau, \\ y = \varphi_0 \sin \varphi + \int_0^\sigma \sin f(\tau) d\tau, \\ z = K_0 \varphi, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles la variable τ et la fonction f ont une signification géométrique évidente. Ces surfaces sont de translation.

L'élément linéaire est

$$(27) \quad ds^2 = d\tau^2 + 2\varphi_0 \sin[f(\tau) - \varphi] d\varphi d\tau + (\varphi_0^2 + K_0^2) d\varphi^2.$$

Les *éléments de courbure de la surface* sont :

1° *La courbure moyenne* donnée par :

$$(28) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -K_0 \frac{[\rho_0 \sin(f - \varphi) + (\rho_0^2 + K_0^2)f']}{[K_0^2 + \rho_0^2 \cos^2(f + \varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule prend une forme géométrique si l'on observe que tous les éléments qui y figurent ont un sens géométrique connu en remarquant que f' , n'est autre que la courbure du cylindre des axes.

2° *La courbure totale* donnée par :

$$(29) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\rho_0 K_0^2 f' \sin(f - \varphi)}{[K_0^2 + \rho_0^2 \cos^2(f - \varphi)]^2}.$$

Les coefficients du plan tangent sont donnés par

$$(30) \quad A = K_0 \sin f, \quad B = -K_0 \cos f, \quad C = \rho_0 \cos(f - \varphi).$$

L'angle U et le paramètre de distribution P sont donnés respectivement par les formules

$$(30) \quad \tan U = \frac{K_0}{\rho_0} \tan(f - \varphi); \quad P = -\frac{K_0}{\rho_0} \frac{1}{\cos^2(f - \varphi)}.$$

On voit que l'angle U est nul et que P prend sa valeur absolue minima $\frac{K_0}{\rho_0}$ pour les points de chaque génératrice qui se projettent sur les extrémités du diamètre du cercle principal constitué par la tangente au lieu des centres.

La directrice rectiligne de la normale correspondant à la génératrice (σ) se confond avec la droite de l'infini du plan directeur. Ce dernier a pour équation

$$x \cos f + y \sin f = 0.$$

résultat qui s'interprète immédiatement.

La *ligne de striction de première espèce* est représentée par l'équation

$$(31) \quad f - \varphi = n\pi \quad (n \text{ entier});$$

cette ligne se confond avec les *stries* dans les surfaces que nous étudions; la *ligne de striction de seconde espèce* contient, outre la

branche précédente, les deux branches représentées par la double relation

$$(32) \quad f - \varphi = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m \text{ entier}).$$

8. Le cas le plus simple de cette série (hors celui où f est constant et où la surface se réduit à un cylindre engendré par une perpendiculaire à l'axe d'une hélice qui se meut en rencontrant toujours cette courbe et en restant parallèle à elle-même) est obtenu en faisant

$$f = \frac{\pi}{\alpha} + \varphi_0, \quad (\alpha, \varphi_0, \text{const.}).$$

On obtient ainsi, en choisissant convenablement l'origine des arcs σ , la surface dont les équations réduites sont

$$(XXI \text{ bis})^* \quad \begin{cases} x = \rho_0 \cos \varphi + \alpha \sin \frac{\sigma}{\alpha} \\ y = \rho_0 \sin \varphi - \alpha \cos \frac{\sigma}{\alpha} \end{cases} \quad z = K_0 \varphi.$$

Pour l'étude de cette surface, on n'introduit aucune restriction en supposant α et ρ_0 positifs.

On voit immédiatement, en considérant les courbes $\varphi = \text{const.}$, que cette surface est un hélicoïde engendré par un cercle horizontal de rayon α et dont le centre décrit une hélice

$$(x = \rho_0 \cos \varphi, y = \rho_0 \sin \varphi, z = K_0 \varphi).$$

Cette surface est à la fois cerclée et doublement hélicée. Bien qu'elle rentre dans le type des hélicoïdes, elle nous paraît assez intéressante pour faire ici l'objet d'une étude rapide établie sur les équations (XXI bis) (*).

(*) L'élimination de σ et de φ permet d'ailleurs d'obtenir les équations de cet hélicoïde sous la forme habituelle, en coordonnées semi-polaires :

$$(XXI \text{ ter}) \quad \begin{cases} x = R \cos \theta, & y = R \sin \theta, \\ z = K_0 \theta + K_0 \arccos \frac{R^2 + \rho_0^2 - \alpha^2}{2R\rho_0}, \end{cases}$$

que l'on pourrait obtenir géométriquement par la considération même de la génération cerclée de la surface. Pour certaines questions, par exemple la détermination des lignes de courbure, la forme (XXI ter) est plus commode.

Le calcul conduirait aux deux résultats suivants évidents géométriquement :

1° Le contour apparent horizontal en projection sur le plan de base se réduit aux deux cercles de centre D et de rayon $a \pm \varphi_0$.

2° Le contour apparent vertical en projection sur le plan YOZ se réduit à la projection des hélices extrêmes

$$x = \varphi_0 \cos \varphi, \quad y = \varphi_0 \sin \varphi \pm a, \quad z = k_0 \varphi.$$

Asymptotiques. — L'équation des asymptotiques est

$$(33) \quad a\varphi^2 - a\varphi_0 \sin\left(\varphi - \frac{\tau}{a}\right) d\varphi^2 = 0,$$

qu'on écrit

$$(33 \text{ bis}) \quad d\left(\frac{\tau}{a}\right) = du \frac{\varepsilon \sqrt{\frac{\varphi_0}{a} \sin u}}{1 - \varepsilon \sqrt{\frac{\varphi_0}{a} \sin u}} \quad \left(u = \varphi - \frac{\tau}{a}, \varepsilon = \pm 1\right),$$

formule dans laquelle la séparation des variables est effectuée.

En posant enfin

$$(34) \quad t^2 = \frac{\varphi_0 \sin u}{a},$$

on obtient pour équation des asymptotiques

$$(35) \quad \varepsilon \frac{\tau - \tau_0}{a} = \frac{2a}{\varphi_0} \int_0^t \frac{t^2 dt}{(1-t) \sqrt{t^2 - \frac{a^2}{\varphi_0^2}}} \quad (r = \pm 1, \tau_0 \text{ const.}).$$

On voit que l'intégration est ramenée aux fonctions elliptiques.

Trajectoires orthogonales des génératrices. — On obtient sans difficulté l'équation

$$(36) \quad \frac{1}{\varphi_0^2 + K_0^2} \left(\frac{\tau - \tau_0}{a} \right) + \int'' \frac{du}{\varphi_0^2 + K_0^2 - a\varphi_0 \sin u} = 0$$

qui ne comporte que des intégrales élémentaires.

On obtient suivant l'ordre de grandeur de $a\varphi_0$ et de $\varphi_0^2 + K_0^2$ les

trois formes suivantes :

$$(2) \quad \tau = \tau_0 + \frac{2a(\varphi_0^2 + K_0^2)}{[(\varphi_0^2 + K_0^2)^2 - a^2\varphi_0^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \times \arctan \left[\sqrt{\frac{\varphi_0^2 + K_0^2 + a\varphi_0}{\varphi_0^2 + K_0^2 - a\varphi_0}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} \right) \right],$$

si $\varphi_0^2 + K_0^2 > a\varphi_0$,

$$(3) \quad \tau = \tau_0 + \frac{2a(\varphi_0^2 + K_0^2)}{[a^2\varphi_0^2 - (\varphi_0^2 + K_0^2)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \times \arctan \left[\sqrt{\frac{a\varphi_0 + \varphi_0^2 + K_0^2}{a\varphi_0 - \varphi_0^2 - K_0^2}} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} \right) \right],$$

si $\varphi_0^2 + K_0^2 < a\varphi_0$, et :

$$(4) \quad \tau = \tau_0 - 2a \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\tau}{2a} \right) \left(a = \frac{\varphi_0^2 + K_0^2}{\varphi_0} \right),$$

si $\varphi_0^2 + K_0^2 = a\varphi_0$.

Courbure moyenne et courbure totale. — Les formules (28) et (29) donnent ici

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= -K_0 \frac{\varphi_0 \sin \left(\frac{\sigma}{a} - \varphi \right) + \frac{\varphi_0^2 + K_0^2}{a}}{\left[K_0^2 + \varphi_0^2 \cos^2 \left(\frac{\sigma}{a} - \varphi \right) \right]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} &= \frac{\varphi_0 K_0^2 \sin \left(\frac{\sigma}{a} - \varphi \right)}{a \left[K_0^2 + \varphi_0^2 \cos^2 \left(\frac{\sigma}{a} - \varphi \right) \right]^2}. \end{aligned} \right.$$

Une première conséquence de ces formules, conséquence qui était à prévoir, la surface étant un hélicoïde, est la suivante : *La surface étudiée est une surface W*, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ et $\frac{1}{R_1 R_2}$ dépendant uniquement de $\frac{\sigma}{a} - \varphi$. La relation entre R_1 et R_2 est d'ailleurs algébrique.

Des formules (37) on déduit encore la détermination :

1° Des points paraboliques définis par la relation

$$(38) \quad \varphi = \frac{\sigma}{a} + n\pi \quad (n \text{ entier}).$$

2° Des points à indicatrice équilatère définis par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$(39) \quad \varphi = \frac{\tau}{\alpha} + \alpha + 2n_1\pi, \quad \varphi = \frac{\tau}{\alpha} - \alpha + (2n_2 + 1)\pi$$

$$(n_1, n_2 \text{ entiers, } \alpha \text{ angle défini par la relation } \sin \alpha = \frac{\rho_0^2 + K_0^2}{\alpha \rho_0}).$$

On voit que les points à indicatrice équilatère n'existent que si $\alpha \rho_0 \geq \rho_0^2 + K_0^2$. Dans le cas de l'égalité, les deux séries se confondent dans la seule série

$$(39 \text{ bis}) \quad \varphi = \frac{\tau}{\alpha} + \frac{\pi}{2} + 2n_1\pi.$$

B. Surfaces Φ engendrées par une hélice de forme variable.

— 9. Dans le cas des surfaces à génératrice déformable, ρ est variable et peut être pris pour variable indépendante.

Les formules générales du paragraphe I de la première partie se simplifient alors considérablement par l'introduction des conditions

$$f_3 = f'_3 = f''_3 = 0, \quad \varphi' = 1, \quad \varphi'' = 0.$$

Il serait fastidieux de les reproduire toutes. Bornons-nous à envisager l'équation des asymptotiques; sa réduction est considérable; cette équation devient

$$(40) \quad [(f'_1 f'_2 - f'_1 f''_2) + f''_1 \sin \varphi - f''_2 \cos \varphi] d\rho^2 \\ - 2(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + 1) d\rho d\varphi \\ + \rho [f'_1 \sin \varphi - f'_2 \cos \varphi] d\varphi^2 = 0.$$

Elle ne dépend pas de K_0 . Ce fait s'explique simplement si l'on se rappelle la remarque déjà faite (cf. *T. H. C.*, Chap. II, n° 6) : ces surfaces dérivent de la surface de vis à filet carré en faisant subir à chacune des asymptotiques de celle-ci une translation parallèle au plan directeur de loi quelconque.

On voit que chaque hélice génératrice touche une asymptotique aux points définis par la relation

$$\tan \varphi = \frac{f'_2}{f'_1},$$

c'est-à-dire aux points correspondant au diamètre du cercle de base tangent au lieu du centre de ce cercle. Ces points sont

aussi les points centraux appartenant à la fois aux deux lignes de striction. La ligne de striction de seconde espèce se complète par la branche définie par l'équation

$$(40) \quad f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^3} = 0.$$

Parmi ces surfaces apparaissent comme particulièrement intéressantes celles *qui dérivent de l'hélicoïde gauche minimum par une translation rectiligne de ses asymptotiques dont l'amplitude est proportionnelle au rayon du cercle principal de l'hélice déplacée. Ces surfaces sont réglées. Nous les désignons sous le nom de surfaces Φ_1 .*

10. *Surfaces Φ_1 .* — Les équations de cette surface peuvent être mises sous la forme canonique suivante :

$$(XXII) \quad \begin{cases} x = \rho(\cos \varphi + a), \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = K_0 \varphi \end{cases}$$

(a constante, que l'on peut supposer positive ou nulle, ce dernier cas correspondant à la surface gauche minima).

Les coefficients du plan tangent et les invariants de Gauss sont donnés par les formules

$$(XXIII) \quad \begin{cases} A = K_0 \sin \varphi, & B = -K_0(\cos \varphi + a), & C = \rho(a \cos \varphi + 1), \\ E = a^2 + 2a \cos \varphi + 1, & F = -a \rho \sin \varphi, & G = \rho^2 + K_0^2, \\ H^2 = a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi(\rho^2 + K_0^2) + \rho^2 + K_0^2(a^2 + 1), \\ D = 0, & D' = -K_0(a \cos \varphi + 1), & D'' = K_0 a \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

La courbure totale et la courbure moyenne sont données par les formules

$$(XXIV) \quad \begin{cases} \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{K_0^2 (a \cos \varphi + 1)^2}{[a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi(\rho^2 + K_0^2) + \rho^2 + K_0^2(a^2 + 1)]^2}, \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{a K_0 \rho \sin \varphi (a^2 - 1)}{[a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi(\rho^2 + K_0^2) + \rho^2 + K_0^2(a^2 + 1)]^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Dans le cas où $a = 1$, on trouve la génération de l'hélicoïde

gauche minimum par une famille de sa seconde série d'hélices circulaires.

Trajectoires orthogonales des hélices génératrices. — La séparation des variables est immédiate, et l'on obtient sans difficulté la relation en termes finis :

$$(41) \quad \varphi = K_0 \left[\left(\frac{\tan \frac{\varphi}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right)^{\frac{2}{\alpha}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(α constante d'intégration).

On voit dès à présent que si l'on veut préciser la construction des courbes, il y aura lieu de distinguer deux cas, suivant que l'on a $\alpha > 1$ ou $\alpha < 1$.

Si α est commensurable, la courbe est algébrique.

Malgré tout l'intérêt que présenterait une discussion complète, nous ne la ferons pas ici pour éviter de charger le présent Mémoire.

Trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes. — On trouve immédiatement l'équation

$$(42) \quad \rho^2 (2\alpha \cos \varphi + \alpha^2 + 1) = C$$

(C constante d'intégration).

La projection sur le plan de base est toujours une courbe algébrique.

Contours apparents. — Sur le plan de base, on trouve que le contour apparent est défini par la relation

$$(43) \quad \cos \varphi = -\frac{1}{\alpha}.$$

Ce contour est donc formé de deux droites symétriques par rapport à Ox , résultat évident géométriquement.

Le contour apparent vertical (sur $y = 0$) est donné par la relation

$$\varphi = (2n + 1)M \pm \alpha$$

(n entier, α arc compris entre 0 et π tel que $\cos \alpha = \alpha$).

Lignes de striction. — 1° *La ligne de striction des génératrices rectilignes* se réduit à Oz .

2° *Ligne de striction de première espèce des hélices génératrices.* — Cette ligne se confond avec la ligne de contour apparent vertical sur le plan $x = 0$ ($\varphi = n\pi$).

3° *Ligne de striction de seconde espèce des hélices génératrices.* — Outre la précédente, la ligne de striction de seconde espèce comporte en plus la branche définie par l'équation

$$(44) \quad a \cos \varphi + \frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2} = 0.$$

Cette ligne n'est réelle que si $a > 1$.

Stries. — Les stries des génératrices rectilignes sont un peu compliquées (données pour une équation du deuxième degré en $\cos \varphi$); nous ne la donnerons pas.

Celles des hélices circulaires se composent de deux branches, dont l'une est toujours imaginaire et dont l'autre a pour équation, $\cos \varphi = -\frac{1}{a}$. Cette branche se confond avec le contour apparent horizontal, formé lui-même de deux génératrices rectilignes.

Lignes asymptotiques. — Leur première famille est constituée par les génératrices rectilignes. La seconde est formée par les courbes définies par l'équation

$$(45) \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{a + 1}{a \cos \varphi + 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où ρ_0 est une constante d'intégration dont la signification est évidente.

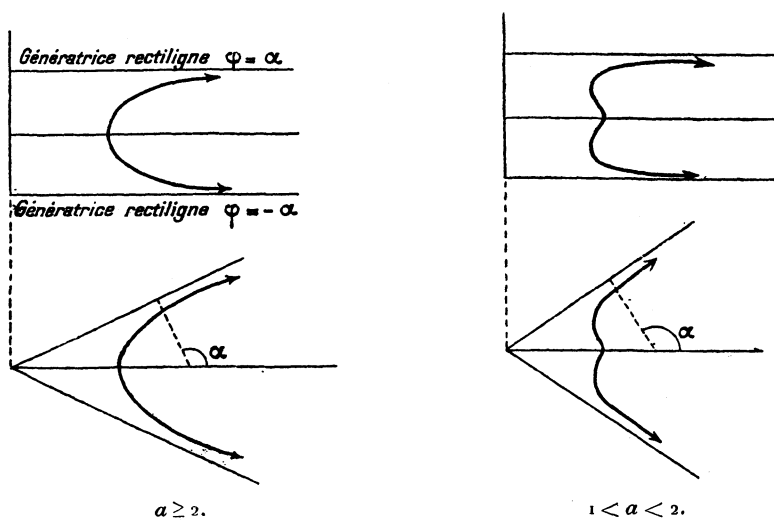
Si l'on rapproche les deux premières équations de la surface de l'équation (45), on voit que :

Toutes les asymptotiques du second système se projettent sur le plan de base suivant les courbes homothétiques de l'une quelconque d'entre elles par rapport à l'origine.

Ce résultat était à prévoir géométriquement; en effet : quatre asymptotiques quelconques déterminent sur les génératrices rectilignes un rapport anharmonique constant. Or deux de celles-ci sont la directrice rectiligne et la droite de l'infini du plan directeur. En considérant deux asymptotiques quelconques aux précédentes et projetant sur le plan directeur, la proposition devient évidente.

Épures annexées. — Nous avons joint à ce travail l'épure représentant une surface Φ_1 correspondant à $a = 2$.

Fig. 4.



Lorsque $a > 1$, les asymptotiques ont des formes différentes suivant que $a \geq 2$ ou que $a < 2$.

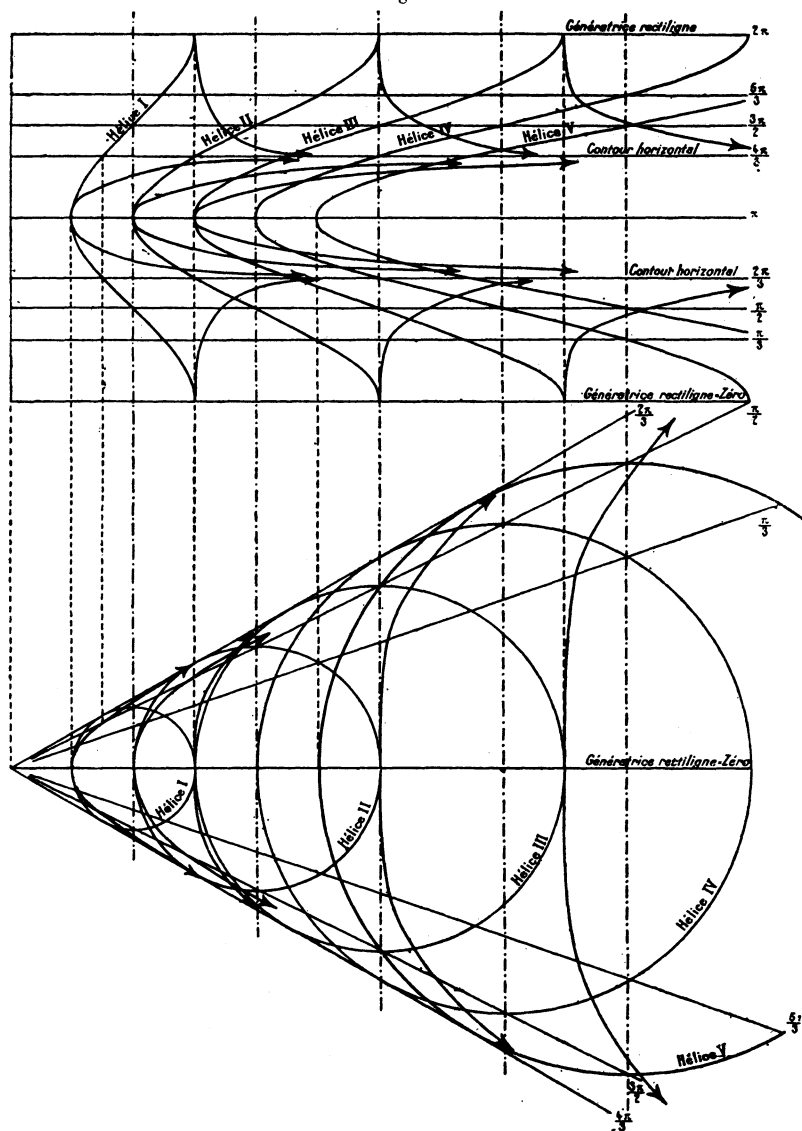
Une branche de chaque forme est représentée schématiquement ci-dessus (fig. 4) en projection sur le plan directeur et sur le plan $\gamma O z$. En réalité, la forme générale pour $a = 2$ est la même que pour $a > 2$, mais le sommet de chaque projection est un méplat lorsque $a = 2$.

Dans les deux projections, les courbes sont asymptotes aux génératrices rectilignes

$$\varphi = \pm \alpha + 2kr \left(\cos \alpha = -\frac{1}{a} \right).$$

Pour $a < 1$, courbes fermées en projection horizontale et à

Fig. 5.



infinité de spires, rappelant les hélices circulaires auxquelles elles se réduisent pour $a = 1$.

III. — Surfaces dont un système d'asymptotiques
est formé des courbes $\varphi = \text{const.}$

11. Dans les surfaces Φ_1 un système d'asymptotiques est formé pour les courbes $\varphi = \text{const.}$, qui se réduisent d'ailleurs à des génératrices rectilignes. On peut se proposer de rechercher toutes les surfaces engendrées par des hélices à plan directeur et à pas constant pour lequel ce fait a lieu. Cette propriété peut d'ailleurs prendre un énoncé géométrique évident.

La condition pour qu'une surface réponde à la question est que l'invariant D de Gauss soit identiquement nul, ce qui exige [cf. formule (VIII)] les trois conditions

$$(46) \quad \begin{cases} (f_3'' f_2' - f_2'' f_3') \rho + K_0 f_1'' = 0, \\ (f_3'' f_1' - f_1'' f_3') \rho - K_0 f_2'' = 0, \\ f_3'' \rho + K_0 (f_1'' f_2' - f_1' f_2'') = 0 \end{cases}$$

qui expriment que les coefficients de $\sin \varphi$, de $\cos \varphi$ et le terme indépendant de φ dans D sont nuls. La substitution dans les deux premières équations (46) de la valeur de f_3'' donnée par la troisième conduit aux deux équations suivantes :

$$(47) \quad \begin{cases} f_1'' K_0 (1 - f_2'^2) + f_2'' (K_0 f_1' f_2' - f_3' \rho) = 0, \\ f_1'' (f_1 f_2' K_0 + f_3' \rho) + f_2'' K_0 (1 - f_1'^2) = 0. \end{cases}$$

Les équations (47) donnent, si le déterminant de f_1'' et de f_2'' n'est pas nul, $f_1'' = f_2'' = 0$; d'où, en vertu de la troisième équation (46), $f_3'' = 0$. On obtient ainsi des surfaces réglées à directrice rectiligne perpendiculaire au plan de base et qui se déduisent des surfaces de vis générales comme les surfaces Φ_1 de la surface de vis à filet carré. Ces surfaces, qui ont pour équations réduites les suivantes :

$$(XXV) \quad x = \rho (\cos \varphi + a), \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = K_0 \varphi + c \rho \quad (a, c, \text{const.}),$$

se réduisent aux surfaces Φ_1 pour $c = 0$. La détermination du second système d'asymptotiques peut être ramenée aux quadratures, la surface réglée ayant une directrice rectiligne. C'est d'ailleurs évident sur l'équation des asymptotiques qui, après séparation de la solution $d\varphi = 0$, se réduit à une équation de Bernoulli en ρ :

$$(48) \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{a K_0 \sin \varphi}{2(a \cos \varphi + 1)} \rho + \frac{c}{2 K_0 (a \cos \varphi + 1)} \rho^2.$$

Il reste à rechercher les solutions qui peuvent résulter de l'annulation du déterminant de f_1'' et de f_2'' dans les équations (47). Cette condition est

$$(49) \quad (f_1'^2 + f_2'^2 - 1)K_0^2 = f_3'^2 \rho^2.$$

Ce qui montre que toute solution nouvelle du problème doit être une surface Γ . La condition (49) étant satisfaite, les deux premières équations (46) peuvent être remplacées par l'une d'elles et par leur combinaison évidente

$$(50) \quad f_3''(f_2'f_2'' + f_1'f_1'') - (f_1''^2 + f_2''^2)f_3' = 0.$$

En résumé, on obtiendra une nouvelle série de solutions en cherchant toutes les surfaces satisfaisant aux relations (49), (50) et à la troisième équation (46), ou encore en recherchant toutes les surfaces Γ répondant aux deux conditions

$$(51) \quad \begin{cases} f_3''(f_2'f_2'' + f_1'f_1'') - (f_1''^2 + f_2''^2)f_3' = 0, \\ f_3'\rho + K_0(f_1''f_2' - f_2''f_1') = 0, \end{cases}$$

ces surfaces satisfaisant par définition à la relation (49).

Si l'on se reporte au n° 4 du présent Chapitre, les équations (61) deviennent, par introduction des fonctions Φ et Θ figurant dans la définition des surfaces Γ ,

$$(52) \quad \Theta'^2 - \Phi'^2 = \frac{\Theta'}{\rho} \tan \Theta \quad \text{et} \quad \Theta' - \Phi' = \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\rho}$$

qu'on peut remplacer par les deux suivantes :

$$(XXVI) \quad \begin{cases} \Theta' - \Phi' = \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\rho}, \\ \Theta' + \Phi' = \frac{\Theta}{\cos^2 \Theta}. \end{cases}$$

Nous trouvons donc ainsi comme nouvelles solutions du problème proposé les surfaces Γ dont les fonctions caractéristiques Θ et Φ satisfont au système (XXVI).

Par voie d'addition on tire immédiatement du système (XXVI) la relation

$$(53) \quad \frac{4\Theta' \cos 2\Theta}{\sin 2\Theta(1 + \cos 2\Theta)} = \frac{1}{\rho}$$

qui s'intègre très rapidement en prenant pour variable auxiliaire

$\tan \Theta$. On trouve ainsi, en tenant compte de la seconde équation (XXVI), les deux relations

$$(XXVII) \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 \tan \Theta e^{-\frac{1}{2} \tan 2 \Theta} \\ \Phi = \tan \Theta - \Theta + \Phi_0 \end{cases} \quad (\rho_0, \Phi_0, \text{const.}).$$

Ces formules définissent explicitement ρ et Φ en fonction de Θ . On aura donc les équations des surfaces Γ correspondantes en introduisant les valeurs de ρ et de Φ données par les équations (XXVII) dans les formules définissant les surfaces.

NOTE.

Signalons ici les erreurs suivantes relevées dans nos Mémoires antérieurs à ce sujet :

A. Mémoire sur la théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire :

Chapitre I, formule (30), l'expression de $d\mu$ est incomplète; lire :

$$d\mu = \sin V \sin (\varphi - W) (d\varphi - dW) + \cos V \sin (\varphi - W) dV.$$

Chapitre IV, formule (57), dernière ligne, au lieu de $u = \frac{df_1}{d\varphi} \dots$,

$$\text{lire } u = \frac{df_1}{d\varphi}, \quad o = \frac{df_2}{d\varphi}, \quad W = \frac{df_3}{d\varphi}.$$

B. Mémoire sur les hélicoïdes de seconde espèce :

$$\text{Formule (17 bis), au lieu de } \varphi = \frac{c + f'_\rho - f}{k + k'\rho}, \text{ lire } \varphi = \frac{c + f'_\rho - f}{k - k'\rho}.$$

Page 40, ligne 10, après points d'arrêt, ajouter :

Chaque demi-méridienne se complète par symétrie relativement à Ox , chacune des courbes ainsi obtenues correspondant à la seconde détermination du radial figurant dans la formule (36). Chaque demi-méridienne ainsi complétée est une tractrice de base Oz .

Page 52, en remontant, ligne 11, au lieu de la valeur de $\frac{\rho}{\rho_0} \dots$, lire la valeur de $\log \frac{\rho}{\rho_0}$.

Page 57, intervertir les indications portées dans les deux figures.