BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur les développements en série suivant les inverses de polynômes donnés

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE SUIVANT LES INVERSES DE POLYNOMES DONNÉS;

PAR M. P. APPELL.

I. Dans leurs recherches sur les polynomes électrosphériques, MM. Guillet et Aubert (1) ont rencontré des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés. Je me suis proposé d'étudier, d'une façon générale, ce genre de développements dans diverses Notes aux *Comptes rendus* (2) et dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (3). Je voudrais réunir ici les principaux résultats obtenus antérieurement et en ajouter de nouveaux.

II. Considérons une suite donnée de polynomes

$$P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_n(x)$$

d'un degré marqué par l'indice, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de x est égal *à l'unité*. Les racines du polynome $P_n(x)$ sont supposées, quel que soit n, à l'intérieur d'un cercle fixe de centre O et de rayon déterminé R; autrement dit, ces racines, réelles ou complexes, ont leurs modules inférieurs à R. On a, dès lors, pour $|x| > R$,

$$\frac{1}{P_n(x)} = \frac{1}{x^n}\left(1 + \frac{p_{1n}}{x} + \frac{p_{2n}}{x^2} + \ldots\right),$$

---

(1) *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708, 820.
(2) *Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 5, 1042.
(3) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXXVII, nov. 1913.

série convergente. Soit, d'autre part,

$$f(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_\nu}{x^\nu} + \ldots$$

une fonction développée en série suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$ à l'extérieur du cercle R.

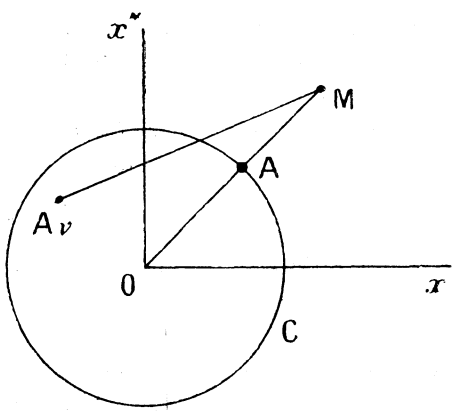
On pourra, par la méthode des coefficients indéterminés, calculer les coefficients a_ν du développement

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_1}{P_1(x)} + \frac{a_2}{P_2(x)} + \ldots + \frac{a_n}{P_n(x)} + \ldots$$

en ordonnant les deux membres suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

Ce développement n'est possible que d'une manière.

III. *Convergence.* — Soit M un point d'affixe $x = x' + ix''$ (*fig.* 1) en dehors du cercle C de rayon R; appelons r le module



OM > R. Les racines α_ν du polynome $P_n(x)$ sont représentées par des points A_ν dans le cercle C. Le module de $x - \alpha_\nu$ est $A_\nu M$: il est évidemment plus grand que AM, A désignant le point où OM rencontre la circonférence du cercle C; or $AM = r - R$; donc

$$|P_n(x)| = |x - \alpha_1|\,|x - \alpha_2| \ldots |x - \alpha_n| > (r - R)^n.$$

Cela posé, considérons la série auxiliaire

$$a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

qui est convergente pour

$$|z| < \rho,$$

ρ étant un certain nombre positif déterminé. Comme on a

$$\left|\frac{1}{P_n(x)}\right| < \frac{1}{(r-R)^n},$$

la série (1) est convergente pour

$$\frac{1}{r-R} < \rho, \qquad r > R + \frac{1}{\rho}:$$

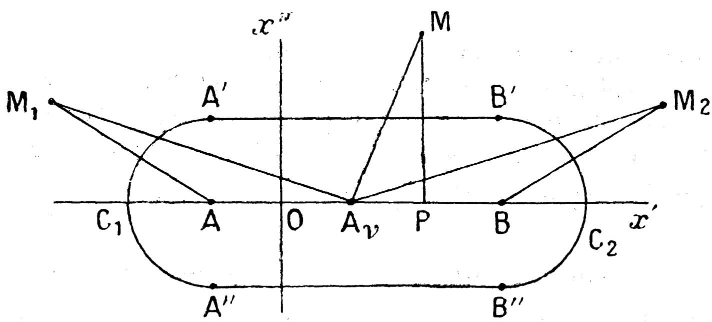
elle est donc convergente à l'extérieur d'un cercle Γ concentrique à C ayant pour rayon $R + \frac{1}{\rho}$.

IV. *Cas particulier.* — Supposons que les polynomes P_n aient toutes leurs racines réelles, comme, par exemple, les polynomes

$$P_n(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

qui diffèrent par un facteur constant des polynomes X_n de Legendre. Supposons (*fig.* 2) les racines comprises entre deux

Fig. 2.



nombres réels α et β, $\alpha < \beta$, représentés par les points A et B de l'axe réel Ox'. Soit M un point ayant pour affixe $x' + ix''$. Supposons d'abord $\alpha \leqq x' \leqq \beta$. Comme la racine α_ν de $P_n(x)$ est représentée par un point A_ν entre A et B, le module $A_\nu M$ de $x - \alpha_\nu$ est évidemment plus grand que la perpendiculaire PM à Ox':

$$|x - \alpha_\nu| > |x''|, \qquad |P_n(x)| > |x''^n|.$$

La série (1) est alors convergente avec la série $\left|\frac{a_n}{x''^n}\right|$, c'est-à-dire quand

$$|x''| > \frac{1}{\rho}.$$

Supposons ensuite x' extérieur à l'intervalle $\alpha\beta$, par exemple $x' < \alpha$, point M_1. Alors

$$|x - \alpha_\nu| > AM_1, \qquad |P_n(x)| > \overline{AM}_1^n;$$

la série est convergente si $AM_1 > \frac{1}{\rho}$. Enfin si $x' > \beta$, point M_2, la série est convergente si $BM_2 > \frac{1}{\rho}$. En résumé, construisons le contour suivant. D'abord deux segments de droites A'B' et A''B'' formés par les points $x'' = \pm \frac{1}{\rho}$, $\alpha \leqq x' \leqq \beta$; puis deux demi-cercles C_1 et C_2, de diamètres de base verticaux, décrits de A et B respectivement comme centres avec $\frac{1}{\rho}$ comme rayons. La série (1) sera convergente aux points extérieurs à ce contour. Il peut arriver que $\rho = \infty$, par exemple si

$$a_n = \frac{1}{1.2\ldots n};$$

alors le contour se réduit à AB lui-même.

Il est évident qu'un contour analogue peut être tracé si toutes les racines de $P_n(x)$ sont, quel que soit n, sur un segment de droite déterminé AB, par exemple si elles sont toutes purement imaginaires et limitées en module.

V. *Développement de* $\frac{1}{x-y}$. — Pour l'application du théorème de Cauchy, il est utile de connaître le développement de $\frac{1}{x-y}$, avec

$$|x| > |y|.$$

Posons alors

$$\frac{1}{x-y} = \frac{Q_0}{P_1(x)} + \frac{Q_1}{P_2(x)} + \ldots + \frac{Q_{n-1}}{P_n(x)} + \ldots,$$

les P_n étant donnés, et calculons les coefficients Q_ν par la méthode générale du n° II en écrivant

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} + \ldots;$$

on trouve $Q_0 = 1$ et l'on voit que Q_ν est un polynome de degré ν en y, que nous désignerons par $Q_\nu(y)$, dont le terme de degré le plus élevé est y^ν. On a ainsi le développement

$$(2) \qquad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{Q_1(y)}{P_2(x)} + \ldots + \frac{Q_{n-1}(y)}{P_n(x)} + \ldots,$$

où figurent de nouveaux polynomes $Q_\nu(y)$ associés à $P_n(x)$. J'ai montré, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* pour 1913, comment on peut calculer les polynomes Q par la méthode des fonctions symétriques. Comme je l'ai indiqué ensuite dans les *Comptes rendus* (décembre 1913), les résultats obtenus pour le calcul des $Q_\nu(y)$ peuvent être résumés dans le théorème suivant.

L'intégrale

$$I_n^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Q_\nu(x)}{P_{n+1}(x)}\,dx,$$

prise le long de la circonférence C *dans le sens positif, est égale à zéro si* $\nu \gtrless n$ *et à l'unité si* $\nu = n$.

Supposons ν donné. Quand $n > \nu$, l'intégrale est nulle, quels que soient les coefficients du polynome Q_ν, d'après les éléments de l'algèbre. Mais en écrivant qu'elle est nulle pour

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \nu - 1,$$

on a ν équations linéaires pour déterminer les coefficients b_1, b_2, ..., b_ν du polynome

$$Q_\nu(x) = x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + \ldots + b_\nu.$$

Par le fait que le coefficient de x^ν est 1, l'intégrale I_ν^ν est égale à 1.

Le cas le plus simple est le cas où $P_n(x) = (x-\alpha)^n$ (α constante); alors

$$Q_\nu(y) = (y-\alpha)^\nu.$$

Les polynomes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont identiques.

On peut donner une démonstration intuitive du théorème ci-dessus par le procédé suivant. Supposons

$$|x| > |y|$$

et multiplions les deux membres du développement (2) par $\frac{Q_\nu(x)}{2\pi i}$, puis intégrons par rapport à x sur la circonférence C, dans le sens positif. Nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{Q_\nu(x)\,dx}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Q_n(y)}{2\pi i}\int_C \frac{Q_\nu(x)\,dx}{P_{n+1}(x)}.$$

Le premier membre est $Q_\nu(y)$; on a donc

$$Q_\nu(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} I_n^\nu Q_n(y).$$

Quand $n > \nu$ l'intégrale I_n^ν est nulle, car sous le signe $\int$ le degré du dénominateur surpasse, au moins de deux unités, celui du numérateur. On a donc

$$Q_\nu(y) = I_0^\nu Q_0(y) + I_1^\nu Q_1(y) + \ldots + I_\nu^\nu Q_\nu(y).$$

Cette identité *entre deux polynomes* exige

$$I_0^\nu = I_1^\nu = \ldots = I_{\nu-1}^\nu = 0, \qquad I_\nu^\nu = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

Ce théorème permet de déterminer les polynomes Q quand les P sont donnés. Il permet ensuite de calculer les coefficients a_n du développement (1).

VI. Pour terminer, nous ferons la remarque suivante : Supposons que, comme les polynomes de Legendre, les polynomes $P_n(x)$ soient alternativement pairs et impairs,

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1,\\
&P_1(x) = x,\\
&P_2(x) = x^2 - a,\\
&P_3(x) = x(x^2 - b),\\
&P_4(x) = x^4 - cx^2 - f,
\end{aligned}$$

en écrivant

$$\frac{1}{x-y}=\frac{Q_0}{P_1}+\frac{Q_1}{P_2}+\frac{Q_2}{P_3}+\frac{Q_3}{P_4}+\dots$$

et identifiant les deux membres ordonnés suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, on trouve, par un calcul facile,

$$Q_0=1,\qquad Q_1=y,\qquad Q_2=y^2,\qquad Q_3=y(y^2-a),\qquad Q_4=y^2(y^2-b).$$

Donc, on a pour les premiers termes

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{P_1(x)}+\frac{yP_0(y)}{P_2(x)}+\frac{yP_1(y)}{P_3(x)}+\frac{yP_2(y)}{P_4(x)}+\dots$$

où la loi ne continue pas aussi simple, mais où tous les polynomes $Q_\nu(y)$ contiennent y en facteur.

Plus généralement, si $P_1(x)=x-\alpha$, les autres $P_n(x)$ étant quelconques, en écrivant

$$\frac{1}{x-y}=\frac{Q_0(y)}{P_1(x)}+\frac{Q_1(y)}{P_2(x)}+\dots+\frac{Q_n(y)}{P_{n+1}(x)}+\dots,$$

on voit, en faisant $y=\alpha$, que tous les polynomes $Q_1, \dots, Q_n$ doivent s'annuler; ils contiennent tous $y-\alpha$ en facteur.

VII. En dérivant par rapport à y, on obtient les développements de $\frac{1}{(x-y)^k}$, $k=2, 3, \dots$.

VIII. *Exemple.* — Si chaque polynome P_n a les mêmes racines que le précédent avec une racine nouvelle, les $Q_n(x)$ sont identiques aux $P_n(x)$. En effet, dans ce cas, on donne une suite de nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \qquad |\alpha_n|<R,$$

et l'on prend

$$P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).$$

On vérifie que l'on a aussi

$$Q_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n);$$

en effet, l'intégrale I_n^ν est alors évidemment nulle si $n<\nu$, car, sous le signe $\int$, le numérateur est divisible par le dénominateur.

On a, dès lors, le développement

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{P_1(y)}{P_2(x)} + \frac{P_2(y)}{P_3(x)} + \ldots;$$

ce qu'on peut vérifier, comme il suit. En appelant R_n la différence entre $\frac{1}{x-y}$ et la somme des n premiers termes du développement, on trouve, de proche en proche,

$$R_n = \frac{1}{x-y}\,\frac{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_n)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}.$$

En supposant $|x| > |y|$ de telle façon que

$$\left|\frac{y-\alpha_n}{x-\alpha_n}\right| < a < 1$$

(a positif), pour toutes les valeurs de n, on voit que $\lim R_n = 0$.

Quoique eette hypothèse sorte de ce que nous avons admis, on pourrait supposer

$$\alpha_1 = -1, \qquad \alpha_2 = -2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = -n.$$

Alors on aurait

$$R_n = \frac{1}{x-y}\,\frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+n)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)};$$

et en posant, par exemple,

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'',$$
$$x' > y',$$

on trouverait $\lim R_n = 0$. Sous ces conditions, on aurait encore

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x+1} + \frac{y+1}{(x+1)(x+2)} + \frac{(y+1)(y+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots,$$

série intéressante de factorielles. Mais ce résultat apparaît alors comme un cas très particulier des formules que Gauss a données (*Œuvres*, t. III) pour exprimer les fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ par des fonctions Γ ou Π.