BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 132-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__132_1>

SUR LES VARIÉTÉS DE COURBURE CONSTANTE D'UN ESPACE EUCLIDIEN OU NON EUCLIDIEN

(*Suite*) [1];

Par M. E. Cartan.

A la fin de la partie déjà parue de ce Mémoire [2], il était question du problème suivant :

Trouver r formes quadratiques indépendantes $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$, *appartenant à un réseau linéaire donné*

$$\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \ldots + \lambda_r\Phi_r,$$

et qui soient extérieurement orthogonales.

Pour résoudre ce problème, on cherche, comme il a été dit, toutes les formes quadratiques définies positives $H(u_1, \ldots, u_r)$ par rapport auxquelles les r formes données $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sont extérieurement conjuguées; les formes demandées $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ se déduisent alors des formes données par la substitution linéaire qui, effectuée sur les indéterminées u, ramène la forme quadratique définie $H(u)$ à la forme quadratique

$$K(v) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_r^2.$$

A chaque forme quadratique définie $H(u)$ ne correspond qu'une solution du problème, à condition de ne pas regarder comme distinctes deux solutions pour lesquelles les formes Ψ se déduisent

---

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLVII, p. 125-160.
[2] *Loc. cit.*, p. 160.

les unes des autres par une substitution orthogonale. Dans certains cas il y aura intérêt également à ne pas regarder comme distinctes deux solutions se déduisant l'une de l'autre par une substitution linéaire convenable sur $x_1, \ldots, x_n$.

La détermination des formes quadratiques H par rapport auxquelles les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sont extérieurement orthogonales revient évidemment à la résolution d'un système d'équations linéaires entre les coefficients $A_{\lambda\mu}$.

23. Prenons par exemple la totalité des formes quadratiques à n variables, soit

$$\Phi_{(ij)} = \theta_{ij} x_i x_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n;\ \theta_{ii} = 1,\ \theta_{ij} = 2 \text{ si } i \neq j).$$

On trouve sans difficulté que les coefficients $A_{(\lambda\mu)(\nu\rho)}$ de la forme quadratique $H(u)$ à $\frac{n(n+1)}{2}$ variables satisfont aux relations

$$\begin{aligned} A_{(\lambda\lambda)(\mu\mu)} &= A_{(\lambda\mu)(\lambda\mu)}, \\ A_{(\lambda\lambda)(\mu\nu)} &= A_{(\lambda\mu)(\lambda\nu)}, \\ A_{(\lambda\mu)(\nu\rho)} &= A_{(\lambda\nu)(\rho\mu)} = A_{(\lambda\rho)(\mu\nu)}. \end{aligned}$$

Ces formules nous serviront plus loin.

24. On peut enfin se proposer le problème général suivant :

Étant donné un réseau linéaire de formes quadratiques admettant pour formes de base ρ formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_\rho$ linéairement indépendantes, trouver dans ce réseau $r \geqq \rho$ formes $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$, dont ρ linéairement indépendantes, qui soient extérieurement conjuguées par rapport à une forme quadratique donnée à r variables H.

On adjoindra aux ρ formes données $\Phi_1, \ldots, \Phi_\rho$ un système de $r - \rho$ nouvelles formes $\Phi_{\rho+1}, \ldots, \Phi_r$ *identiquement nulles*, on cherchera toutes les formes quadratiques K par rapport auxquelles les r formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sont extérieurement conjuguées et l'on cherchera, si c'est possible, les substitutions linéaires qui transforment les formes K dans la forme donnée H : les mêmes substitutions, appliquées aux formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, donneront les formes cherchées $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$.

Prenons par exemple

$$\rho = 1, \qquad r = 2 \qquad \text{et} \qquad H(u) = u_1^2 - u_2^2.$$

Si la forme Φ_1 est un carré parfait, la forme K est arbitraire et l'on prendra

$$\Psi_1 = a_1 \Phi_1, \qquad \Psi_2 = a_2 \Phi_1,$$

avec deux coefficients arbitraires a_1, a_2. Si, au contraire, la forme Φ_1 n'est pas un carré parfait, on voit immédiatement qu'on a

$$\Psi_1 = \pm \Psi_2 = a\Phi_1,$$

le coefficient a étant arbitraire. On remarquera la différence profonde qui existe entre les cas où $H(u)$ est une forme indéfinie et celui où $H(u)$ est une forme définie : *dans ce dernier cas la forme Φ_1 est nécessairement un carré parfait*, le problème étant impossible si Φ_1 ne satisfait pas à cette condition.

25. *Les formes quadratiques complexes extérieurement orthogonales.* — Ce qui précède fait pressentir que la théorie des formes *complexes* extérieurement orthogonales est profondément différente de celle des formes *réelles*. Contentons-nous des trois remarques suivantes :

1° La détermination des formes à n variables extérieurement orthogonales non linéairement indépendantes *ne revient pas* à la détermination des formes extérieurement orthogonales linéairement indépendantes; si en effet il existe entre Φ_1, ..., Φ_r les p relations identiques

$$\begin{gathered} a_1\Phi_1 + \ldots + a_r\Phi_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1\Phi_1 + \ldots + l_r\Phi_r = 0, \end{gathered}$$

il n'existe pas nécessairement une substitution orthogonale, effectuée sur les *lettres* $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, et ramenant ces relations à la forme

$$\Phi_{r-p+1} = \ldots = \Phi_r = 0 :$$

cela revient à dire par exemple que, dans l'espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, l'équation d'un plan ne peut pas toujours être ramenée à la forme

$$z = 0,$$

ou l'équation d'une droite à la forme

$$y = z = 0\,;$$

il suffit en effet de prendre un plan isotrope ou une droite isotrope. Du reste, il est évident que les deux formes

$$\Phi, \quad i\Phi \qquad (i^2 = -1)$$

sont extérieurement orthogonales, même si l'unique forme Φ ne l'est pas.

2° Dans le cas des formes *réelles*, on ne peut pas, étant donné un réseau $\lambda_1 \Phi_1 + \ldots + \lambda_\rho \Phi_\rho$ admettant ρ formes de base linéairement indépendantes *quelconques*, trouver $r \geqq \rho$ formes de ce réseau qui soient extérieurement orthogonales, et cela quelque grand que soit r (du reste la valeur de r comme on sait ne joue ici aucun rôle). Au contraire, dans le cas des formes complexes, on peut partir d'un réseau *arbitraire* et l'on peut toujours trouver r formes de ce réseau extérieurement orthogonales, *pourvu que r soit assez grand;* il suffit en particulier de prendre $r \geqq 2\rho$: les formes

$$\Phi_1, \quad i\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad i\Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\rho, \quad i\Phi_\rho$$

sont en effet extérieurement orthogonales.

3° Le théorème général du n° 20, même si l'on suppose les formes considérées linéairement indépendantes, peut tomber en défaut : c'est ainsi que pour $r = n = 2$, les formes

$$\Phi_1 = x_1^2 + 2x_1x_2, \qquad \Phi_2 = 2ix_1x_2$$

sont extérieurement orthogonales et cependant elles ne peuvent pas se déduire, par une substitution orthogonale, de deux formes carrés parfaits, puisque le réseau $\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2$ ne contient qu'une forme carré parfait, à savoir x_1^2.

CHAPITRE III.

LES FORMES BILINÉAIRES ALTERNÉES, LES COVARIANTS BILINÉAIRES ET LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EN INVOLUTION.

26. Considérons une expression de Pfaff à n variables $x_1, \ldots, x_n$, soit

$$\omega_d = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \ldots + a_n\, dx_n.$$

On sait qu'on appelle *covariant bilinéaire* de l'expression ω l'expression

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d,$$

où d et δ désignent deux symboles de différentiation *échangeables entre eux ;* on a

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) dx_i\, \delta x_j.$$

Le second membre est manifestement une forme bilinéaire *alternée* des deux séries de variables $dx_1, \ldots, dx_n$; $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$; on a en effet

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d = \sum_{(ij)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)(dx_i\, \delta x_j - dx_j\, \delta x_i),$$

la somme du second membre étant étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices 1, 2, ..., n. A cette forme bilinéaire alternée nous associerons une forme quadratique alternée, comme il est dit au n° 7, que nous continuerons à appeler le covariant bilinéaire de ω et que nous désignerons par la notation ω'. Nous écrirons donc

$$\omega' = \sum_{(ij)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) [dx_i\, dx_j].$$

Les variables étant ici $dx_1, \ldots, dx_n$, nous définirons comme plus haut le produit extérieur de deux formes linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, c'est-à-dire de deux expressions de Pfaff. Remarquons qu'on peut poser

$$\omega' = [da_1\, dx_1] + [da_2\, dx_2] + \ldots + [da_n\, dx_n],$$

et, si m désigne un coefficient, fonction finie de $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$(m\omega)' = m.\omega + [dm.\omega];$$

enfin, si u et v sont deux fonctions quelconques, le covariant bilinéaire de udv est $[du\, dv]$.

Le covariant bilinéaire d'une différentielle totale exacte est identiquement nul et *réciproquement*.

27. Considérons un système de s équations de Pfaff linéairement indépendantes à $n+s$ variables, soit

$$(16)\qquad \begin{cases} \theta_1 = 0, \\ \theta_2 = 0, \\ \ldots\ldots, \\ \theta_s = 0. \end{cases}$$

Un tel système est dit *complètement intégrable* si, considéré comme un système d'équations aux différentielles totales à s fonctions inconnues de n variables indépendantes, il admet toujours une solution (et une seule) telle que, pour des valeurs numériques données des variables indépendantes, les fonctions inconnues prennent des valeurs numériques arbitrairement données. On démontre au sujet de ces systèmes le *théorème de Frobenius* qui donne la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité complète :

Pour que le système de Pfaff (16) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les covariants bilinéaires* $\theta'_1, \ldots, \theta'_s$ *des premiers membres s'annulent quand on suppose les différentielles* $dx_1, \ldots, dx_{n+s}$ *liées par les relations* (16) *elles-mêmes.*

On se rend du reste facilement compte que cette condition est indépendante du choix des variables et aussi qu'elle est ou non simultanément vérifiée par deux systèmes (16) algébriquement équivalents en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+s}$.

28. *Systèmes de Pfaff en involution.* — Supposons maintenant que le système (16) soit à $n+r$ variables ($r \geqq s$) dont r fonctions inconnues de n variables indépendantes. Une variété à $\nu \leqq n$ dimensions (définie par $n+r-\nu$ relations entre les $n+r$ variables) sera dite une variété *intégrale* du système (16) si les équations (16) sont vérifiées pour tout déplacement infiniment petit sur cette variété.

Cela posé, le système (16) est dit en *involution* si par tout point arbitraire de l'espace à $n+r$ dimensions il passe au moins une variété intégrale à 1 dimension, si par toute variété intégrale arbitraire à 1 dimension il passe au moins une variété intégrale à 2 dimensions, et ainsi de suite ; si enfin par toute variété intégrale arbitraire à $n-1$ dimensions il passe au moins une variété intégrale à n dimensions.

Choisissons $n+r-s$ expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_{n+r-s}$ indépendantes entre elles et indépendantes de $\theta_1, \ldots, \theta_s$. Les covariants bilinéaires $\theta'_1, \ldots, \theta'_s$ peuvent s'exprimer comme des formes quadratiques alternées des θ_i et des ω_i. Si l'on y fait $\theta_1 = \ldots = \theta_s = 0$, ils se réduisent à des formes quadratiques alternées de $\omega_1, \ldots, \omega_{n+r-s}$. Pour toute variété intégrale du système (16), ces s formes quadratiques alternées, ou plutôt les s formes bilinéaires alternées qui leur sont associées, s'annulent si l'on regarde les deux séries de variables comme caractérisant deux déplacements infiniment petits quelconques sur la variété. Les s équations quadratiques alternées obtenues en annulant $\theta'_1, \ldots, \theta'_s$ [et en tenant compte des équations (16)] seront dites les *relations quadratiques alternées dérivées* des équations (16).

Supposons que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ soient n expressions de Pfaff, combinaisons linéaires indépendantes des différentielles des n variables indépendantes, et désignons par $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$ ($q = r - s$) les autres expressions ω. On peut toujours se ramener au cas où les relations quadratiques alternées dérivées des équations (16) sont de la forme

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=q} a_{ijk} [\omega_i \varpi_j] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

où les a_{ijk} sont des coefficients fonctions finies des variables.

Plaçons-nous dans ce cas. On peut alors énoncer de la manière suivante la condition nécessaire et suffisante d'involution du système (16) :

Introduisons n systèmes d'indéterminées

$$\begin{array}{lll} \xi_1, & \ldots, & \xi_n, \\ \xi'_1, & \ldots, & \xi'_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \xi_1^{(n-1)}, & \ldots, & \xi_n^{(n-1)}, \end{array}$$

et considérons les sn équations linéaires en $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=q} a_{ij1} \xi_i \varpi_j = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=q} a_{ijs} \xi_i \varpi_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=q} a_{ij1} \xi'_i \varpi_j = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=q} a_{ijs} \xi_i^{(n-1)} \varpi_j = 0.$$

Formons la matrice des coefficients des variables ϖ dans les s premières équations, puis la matrice des coefficients des $2s$ premières équations et ainsi de suite, jusqu'à la matrice des coefficients des ns équations. Soient alors

$$s_1, \quad s_1 + s_2, \quad \ldots, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

les rangs successifs de ces matrices.

Résolvons enfin de la manière la plus générale possible les équations (17) en prenant pour $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$ des combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_n$. *Pour que le système* (16) *soit en involution, il faut et il suffit que les expressions obtenues pour* $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$ *dépendent de*

$$\begin{aligned} nq &- s_{n-1} - 2s_{n-2} - \ldots - (n-1)s_1 \\ &= nr - s_{n-1} - 2s_{n-2} - \ldots - (n-1)s_1 - ns \end{aligned}$$

paramètres (1). La solution *générale* du système dépend alors de

(1) Le nombre de ces paramètres ne peut jamais *dépasser* la valeur limite indiquée.

$q-(s_1+\ldots+s_{n-1})$ fonctions arbitraires de n arguments si

$$q>s_1+\ldots+s_{n-1};$$

de s_{n-1} fonctions de $n-1$ arguments si

$$q=s_1+\ldots+s_{n-1},\qquad s_{n-1}>0;$$

de s_{n-2} fonctions de $n-2$ arguments si

$$q=s_1+\ldots+s_{n-2},\qquad s_{n-1}=0,\qquad s_{n-2}>0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

de s_1 fonctions de 1 argument si

$$q=s_1,\qquad s_{n-1}=\ldots=s_2=0,\qquad s_1>0;$$

de s constantes arbitraires si

$$q=s_{n-1}=\ldots=s_2=s_1=0.$$

Dans le dernier cas, on retombe sur un système complètement intégrable.

Un cas particulier important est celui où le nombre des expressions

$$\sum_{j=1}^{j=q} a_{ijk}\varpi_j \qquad (i=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,s)$$

qui sont linéairement indépendantes est égal à q; on a alors

$$q=s_1+\ldots+s_{n-1}+s_n.$$

La condition d'involution est que les expressions obtenues en résolvant les équations (17) par rapport à $\varpi_1,\ldots,\varpi_q$ dépendent de

$$s_1+2s_2+\ldots+ns_n$$

paramètres arbitraires; la solution générale dépend de s_α fonctions arbitraires de α arguments si l'on a

$$s_\alpha>0,\qquad s_{\alpha+1}=\ldots=s_n=0.$$

29. Nous aurons en fait à considérer des systèmes différentiels de la nature suivante. Ils seront formés de s équations linéaires par rapport aux différentielles de $n+s$ variables, $x_1,\ldots,x_{n+s}$, dont n indépendantes et s dépendantes, les coefficients de ces équations étant des fonctions données de ces $n+s$ variables et de q variables auxiliaires $u_1, \ldots, u_q$. Si l'on résolvait ces équations par rapport aux différentielles des s variables dépendantes, on aurait les dérivées partielles du premier ordre de ces s fonctions inconnues exprimées en fonction des n variables indépendantes, des s variables dépendantes et des q variables auxiliaires. En éliminant ces q variables auxiliaires, on aurait donc en définitive *un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à s fonctions inconnues de n variables indépendantes.*

Donnons à notre système différentiel la forme d'un système de Pfaff. Désignons par $\theta_1, \ldots, \theta_s$ les premiers membres des équations de ce système, choisissons n expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n$ formant avec $\theta_1, \ldots, \theta_s$ un système de $n+s$ expressions linéairement indépendantes par rapport à $dx_1, \ldots, dx_{n+s}$; enfin choisissons q expressions de Pfaff $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$ formant avec les θ et les ω un système de $n+s+q$ expressions linéairement indépendantes par rapport à $dx_1, \ldots, dx_{n+s}, du_1, \ldots, du_q$.

On se rend compte facilement que les équations quadratiques alternées dérivées du système de Pfaff donné (16) sont de la forme

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 \equiv \displaystyle\sum_{(ij)}^{1,\ldots,n} c_{ij1}[\omega_i\omega_j] + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=q} a_{ij1}[\omega_i\varpi_j] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_s \equiv \displaystyle\sum_{(ij)}^{1,\ldots,n} c_{ijs}[\omega_i\omega_j] + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=q} a_{ijs}[\omega_i\varpi_j] = 0, \end{array}\right.$$

puisque les covariants $\theta'_1, \ldots, \theta'_s$ s'annulent manifestement avec $dx_1, \ldots, dx_{n+s}$, c'est-à-dire avec $\theta_1, \ldots, \theta_s, \omega_1, \ldots, \omega_n$.

30. Il y a ici une remarque importante à faire. Il peut arriver que les q variables auxiliaires $u_1, \ldots, u_q$ soient en nombre surabondant, c'est-à-dire qu'on puisse trouver un système d'équations linéaires en $dx_1, \ldots, dx_{n+s}$ algébriquement équivalent à (16), mais tel que les coefficients des équations de ce système puissent s'exprimer en fonction de $x_1, \ldots, x_{n+s}$ et de $q' < q$ variables auxiliaires nouvelles $u'_1, \ldots, u'_{q'}$. Autrement dit, le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre équivalent à (16) peut être formé de $sn - q' > sn - q$ équations indépendantes. *Les équations* (18) *nous permettent facilement de connaître la valeur minimum de q' et de trouver $n + s + q'$ expressions de Pfaff linéairement indépendantes par rapport aux différentielles $dx_1, \ldots, dx_{n+s}, du'_1, \ldots, du'_{q'}$.*

Considérons en effet le système d'équations linéaires

$$(19)\quad \begin{cases} \theta_1 = \ldots = \theta_s = 0, \\ \omega_1 = \ldots = \omega_n = 0, \\ \dfrac{\partial\theta_\alpha}{\partial\omega_1} = \dfrac{\partial\theta_\alpha}{\partial\omega_2} = \ldots = \dfrac{\partial\theta_\alpha}{\partial\omega_n} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s). \end{cases}$$

Ce système est indépendant du choix des expressions θ, ω et ϖ, pourvu naturellement que les nouvelles expressions θ soient des combinaisons linéaires indépendantes des anciennes, que les nouvelles expressions θ et ω soient des combinaisons linéaires indépendantes des anciennes, et enfin que les nouvelles expressions θ, ω et ϖ soient des combinaisons linéaires indépendantes des anciennes. Supposons alors que, les expressions θ étant indépendantes par rapport à $dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+s}$, on prenne

$$\theta_\alpha = dx_{n+\alpha} - a_{n+\alpha,1}\,dx_1 - \ldots - a_{n+\alpha,n}\,dx_n \qquad (\alpha = 1, \ldots, s),$$
$$\omega_i = dx_i, \qquad \varpi_j = du_j \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, q),$$

on aura

$$\theta_\alpha = \sum_{(ij)} c_{ij\alpha}[dx_i\,dx_j] + \sum_{i=1}^{i=n}\left[dx_i\left(\sum_{j=1}^{j=q}\frac{\partial a_{n+\alpha,i}}{\partial u_j}du_j\right)\right] \qquad (\alpha = 1, \ldots, s),$$

où les coefficients $c_{ij\alpha}$ ont des valeurs qu'il est inutile d'écrire. Le système (19) est alors

$$(19')\quad \begin{cases} dx_1 = \ldots = dx_{n+s} = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{j=q}\frac{\partial a_{n+\alpha,i}}{\partial u_j}du_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, s). \end{cases}$$

On voit que le nombre des équations (19) linéairement indépendantes est égal à $n + s + q'$, où q' est le nombre cherché et que les premiers membres de ces $n + s + q'$ équations linéairement indépendantes sont les expressions de Pfaff cherchées.

En définitive, *on n'a pas à se préoccuper de la question de savoir si les variables auxiliaires entrent en nombre surabondant;* on peut toujours supposer en fait que ce nombre est réduit au minimum, qui est le nombre des expressions

$$\sum_{j=1}^{j=q} a_{ij\alpha}\varpi_j$$

linéairement indépendantes.

31. Cela posé, revenons au système donné. S'il est compatible, c'est-à-dire s'il admet au moins une solution, pour cette solution les θ_α sont nulles et par suite les Θ_α; les expressions ϖ_i sont des combinaisons linéaires des ω_i et l'on peut toujours, en ajoutant au besoin aux ϖ_i des combinaisons linéaires des ω_i, supposer que les ϖ_i sont nulles; les équations (18) exigent alors que les coefficients $c_{ij\alpha}$ soient tous nuls. Autrement dit, *si le système est compatible, on peut supposer les coefficients* $c_{ij\alpha}$ *tous nuls.* On est alors ramené à l'hypothèse examinée au n° 28, *mais dans le cas particulier où l'on a*

$$q = s_1 + s_2 + \ldots + s_n.$$

Si le système est en involution, la question de l'existence et du degré d'indétermination des solutions est résolue. S'il n'est pas en involution, on le prolongera en prenant comme nouvelles variables dépendantes $u_1, \ldots, u_q$ (q étant réduit à sa valeur minimum). Pour cela, on cherchera à résoudre de la manière la plus générale possible les équations (18) en $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$, considérées comme linéaires en $\omega_1, \ldots, \omega_n$; les coefficients dépendront d'un certain nombre de paramètres indépendants $v_1, \ldots, v_{q_1}$. On sera ramené au problème primitif, sauf que s sera remplacé par $s + q$ et q par q_1. On est sûr, d'après un théorème général, qu'en répétant ce procédé un certain nombre suffisant de fois, on arrivera soit à un système incompatible, soit à un système en involution.

On peut aussi prolonger le système (16) d'une manière partielle en adjoignant aux équations (16) celles qui expriment un nombre $q' < q$ de combinaisons linéaires de $\varpi_1, \ldots, \varpi_q$ en fonctions linéaires de $\omega_1, \dots, \omega_n$; mais il faut alors que le système obtenu en annulant les θ, les ω et ces q' combinaisons linéaires de $\varpi_1, \dots, \varpi_q$ soit *complètement intégrable*, les intégrales de ce système jouant le rôle de nouvelles variables x, en nombre $n+s+q'$.

32. Pour abréger le langage, nous dirons que les expressions $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont les expressions de Pfaff *principales*, les expressions ϖ étant dites *secondaires*.

Un système d'équations quadratiques extérieures de la forme (17), avec des variables principales ω_i et des variables secondaires ϖ_j fonctions linéaires inconnues des variables principales, sera dit *involutif* s'il satisfait aux conditions énoncées au n° **28**.

Supposons que le système (17) se décompose en deux systèmes partiels

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=\varkappa} a_{ijk}[\omega_i \varpi_j] = 0 \qquad (k = 1, \dots, \sigma),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=\varkappa'} b_{ijk}[\omega_i \chi_j] = 0 \qquad (k = 1, \dots, \sigma'),$$

avec deux séries de variables secondaires $\varpi_1, \dots, \varpi_\varkappa$; $\chi_1, \dots, \chi_{\varkappa'}$, indépendantes entre elles. *Pour que le système total soit involutif, il faut et il suffit que chacun des systèmes partiels le soit.* Soient en effet

$$\sigma, \quad \sigma_1, \quad \dots, \quad \sigma_n;$$
$$\sigma', \quad \sigma'_1, \quad \dots, \quad \sigma'_n$$

les nombres qui, pour chacun des systèmes partiels, jouent le rôle des entiers

$$s, \quad s_1, \quad \dots, \quad s_n.$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} s &= \sigma + \sigma', \\ s_1 &= \sigma_1 + \sigma'_1, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ s_n &= \sigma_n + \sigma'_n. \end{aligned}$$

Résolvons maintenant les équations données par rapport aux ϖ et aux χ; le nombre des paramètres entrant dans les expressions des ϖ sera *au plus égal* à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + n\sigma_n;$$

le nombre des paramètres entrant dans les expressions des χ sera *au plus égal* à

$$\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n;$$

pour que le nombre total des paramètres soit égal à

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n,$$

il faut donc et il suffit que les deux limites supérieures soient atteintes, c'est-à-dire que les deux systèmes partiels soient involutifs.

Ajoutons encore une remarque utile. Supposons que le système formé par les σ premières équations (17) jouisse de la propriété que l'entier σ_2 qui lui correspond soit nul (et par suite aussi les entiers suivants $\sigma_3, \ldots, \sigma_n$) : alors pour que le système (17) soit involutif, il faut que le système partiel des σ premières équations soit aussi involutif. Les σ premières équations (17) font en effet intervenir σ_1 variables secondaires; supposons qu'on annule dans les $s - \sigma$ autres équations (17) ces σ_1 variables secondaires, et soient

$$\sigma'_1, \quad \sigma'_2, \quad \ldots, \quad \sigma'_n$$

les nombres correspondant à ce nouveau système; on a évidemment

$$s_1 = \sigma_1 + \sigma'_1, \qquad s_2 = \sigma'_2, \quad \ldots, \quad s_n = \sigma'_n.$$

Cela posé, supposons que les expressions des σ_1 premières variables secondaires contiennent moins de σ_1 paramètres arbitraires, les expressions des autres variables secondaires faisant intervenir *au plus* $\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n$ paramètres nouveaux, les expressions des variables secondaires dans le système total contiendraient moins de $s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n$ paramètres et le système ne serait pas involutif.

Tout système (17) formé d'une seule équation est évidemment involutif. Nous aurons à considérer d'autres systèmes involutifs simples, en particulier le suivant :

$$\begin{array}{l}
[\omega_1\varpi_{11}] + [\omega_2\varpi_{12}] + \ldots + [\omega_p\varpi_{1p}] = 0, \\
[\omega_1\varpi_{21}] + [\omega_2\varpi_{22}] + \ldots + [\omega_p\varpi_{2p}] = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[\omega_1\varpi_{p1}] + [\omega_2\varpi_{p2}] + \ldots + [\omega_p\varpi_{pp}] = 0,
\end{array}$$

où les variables secondaires ϖ_{ij} satisfont aux seules relations

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji};$$

on a pour ce système

$$s_1 = p, \qquad s_2 = p-1, \qquad \ldots, \qquad s_{p-1} = 2, \qquad s_p = 1.$$

La résolution donne

$$\varpi_{ij} = \Sigma a_{ijk}\omega_k$$

avec les $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ paramètres a_{ijk} où l'on peut changer d'une manière quelconque l'ordre des indices inférieurs.

CHAPITRE IV.

LES VARIÉTÉS A p DIMENSIONS DE L'ESPACE PROJECTIF A n DIMENSIONS. HYPERPLANS OSCULATEURS. RÉSEAUX ASYMPTOTIQUES.

33. Revenons au système de référence considéré au n° **1** dans un espace projectif à n dimensions. Les formules (1) ont introduit $(n+1)^2$ expressions de Pfaff ω_{ij} qui peuvent être regardées comme les composantes mobiles du déplacement instantané du système de référence; ce sont $(n+1)^2$ expressions linéairement indépendantes par rapport aux différentielles des $(n+1)^2$ paramètres dont dépend le système. Il est facile de calculer leurs covariants bilinéaires. Egalons en effet les covariants bilinéaires des deux membres de l'identité

$$d\mathrm{A}_i = \omega_{i1}\mathrm{A}_1 + \omega_{i2}\mathrm{A}_2 + \ldots + \omega_{i,n+1}\mathrm{A}_{n+1} \qquad (i = 1, \ldots, n+1);$$

nous aurons (n° **26**)

$$\begin{aligned} 0 = \omega'_{i1}\mathrm{A}_1 + \ldots + \omega'_{i,n+1}\mathrm{A}_{n+1} + [d\mathrm{A}_1\omega_{i1}] \\ + [d\mathrm{A}_2\omega_{i2}] + \ldots + [d\mathrm{A}_{n+1}\omega_{i,n+1}], \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $d\mathrm{A}_1, \ldots, d\mathrm{A}_{n+1}$ par leurs valeurs,

$$\sum_{j=1}^{j=n+1} \left\{ \omega'_{ij} - [\omega_{i1}\omega_{1j}] - [\omega_{i2}\omega_{2j}] - \ldots - [\omega_{i,n+1}\omega_{n+1,j}] \right\} \mathrm{A}_j = 0.$$

Cette identité entraîne évidemment les suivantes, qui fournissent les covariants cherchés :

$$
(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_{ij} = [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + \ldots + [\omega_{i,n+1}\omega_{n+1,j}] \\ \qquad\qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1). \end{array} \right.
$$

Dans la théorie des groupes, ces formules sont les *formules de structure du groupe projectif à n variables*. Elles vont jouer un rôle capital dans la suite.

34. Nous ferons un usage fréquent du théorème suivant :

Étant donnés h points mobiles $M_1, \ldots, M_h$ *non situés dans une même variété plane à* $h-2$ *dimensions, pour que la variété plane à* $h-1$ *dimensions définie par ces h points soit fixe, il faut et il suffit que les différentielles* $dM_1, \ldots, dM_h$ *soient de la forme*

$$
\begin{array}{l} dM_1 = \omega_{11} M_1 + \ldots + \omega_{1h} M_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dM_h = \omega_{h1} M_1 + \ldots + \omega_{hh} M_h. \end{array}
$$

La condition est évidemment nécessaire, car les points $dM_1, \ldots, dM_h$ appartiennent nécessairement à la variété plane supposée fixe.

Pour démontrer que la condition est suffisante, considérons le système d'équations aux différentielles totales linéaires

$$
\begin{array}{l} dx_1 = \omega_{11} x_1 + \ldots + \omega_{1h} x_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_h = \omega_{h1} x_1 + \ldots + \omega_{hh} x_h, \end{array}
$$

à h fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_h$ des paramètres dont dépendent les points mobiles. Ce système admet évidemment $n+1$ solutions connues, à savoir les $i^{\text{èmes}}$ coordonnées $x_{1i}, \ldots, x_{hi}$ des points $M_1, \ldots, M_h$ ($i = 1, \ldots, n+1$); on voit immédiatement aussi que sur ces $n+1$ solutions h sont indépendantes; or on sait qu'un tel système ne peut pas admettre plus de h solutions indépendantes; il faut donc qu'il existe $n+1-h$ relations linéaires à coefficients constants entre les $n+1$ valeurs de chacune des h fonctions inconnues; autrement dit les coordonnées de chacun des points $M_1, \ldots, M_h$ satisfont à un même système de $n+1-h$ relations linéaires à coefficients constants, et par suite les points $M_1, \ldots, M_h$ sont dans une même variété plane fixe à $h-1$ dimensions. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous utiliserons également cet autre théorème :

Pour que la variété plane mobile $[M_1 M_2 \dots M_h]$ *ait en commun le point* $x_1 M_1 + \dots + x_h M_h$ *avec la variété plane infiniment voisine, il faut et il suffit que le point*

$$x_1 dM_1 + \dots + x_h dM_h$$

appartienne à la variété plane donnée.

En effet, pour que l'égalité

$$x_1 M_1 + \dots + x_h M_h = (x_1 + \varepsilon_1)(M_1 + dM_1) + \dots + (x_h + \varepsilon_h)(M_h + dM_h),$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$ sont des quantités infiniment petites, puisse avoir lieu, il faut et il suffit que $x_1 dM_1 + \dots + x_h dM_h$ soit de la forme $-\varepsilon_1 M_1 - \dots - \varepsilon_h M_h$.

35. Nous allons faire des applications immédiates du premier théorème. Mais auparavant nous changerons légèrement les notations employées pour désigner les $n+1$ sommets du système de référence; nous écrirons A au lieu de A_{n+1}, ω_i au lieu de $\omega_{n+1,i}$, ω_{i0} au lieu de $\omega_{i,\,n+1}$ et ω_{00} au lieu de $\omega_{n+1,\,n+1}$; de cette manière, les formules (1) et (20) deviennent

$$(1')\quad \begin{cases} dA = \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \dots + \omega_n A_n \\ dA_i = \omega_{i0} A + \omega_{i1} A_1 + \dots + \omega_{in} A_n \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(20')\quad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_{00}\omega_i] + [\omega_1 \omega_{1i}] + \dots + [\omega_n \omega_{ni}] \\ \omega'_{ij} = [\omega_{i0}\omega_j] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + \dots + [\omega_{in}\omega_{nj}] \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Cela posé, exprimons que le point A est fixe ; les conditions pour qu'il en soit ainsi sont

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0;$$

il en résulte que *les expressions de Pfaff* $\omega_1, \dots, \omega_n$ *sont* n *combinaisons linéaires indépendantes des coordonnées (ou plutôt des rapports mutuels des coordonnées) du point* A.

Considérons de même la variété plane à p dimensions définie par les $p+1$ points A, $A_1, \dots, A_p$, variété que nous désignerons pour abréger par $[AA_1 \dots A_p]$. Les conditions pour que cette variété soit fixe sont, d'après le théorème du n° **34**,

$$\omega_{p+1} = \ldots = \omega_n = 0,$$
$$\omega_{i,p+1} = \ldots = \omega_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Il en résulte que les $(p+1)(n-p)$ expressions de Pfaff ω_α, $\omega_{i\alpha}$, où α prend toutes les valeurs $p+1, \ldots, n$ et i les valeurs 1, 2, ..., p, sont linéairement indépendantes par rapport aux $(p+1)(n-p)$ paramètres dont dépend la variété plane à p dimensions $[AA_1 \ldots A_p]$.

Considérons enfin l'*élément* formé du point A et de la variété plane à p dimensions $[AA_1 \ldots A_p]$ passant par ce point. Cet élément dépend de $n(p+1) - p^2$ paramètres et les expressions de Pfaff

$$\omega_i, \quad \omega_\alpha, \quad \omega_{i\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n)$$

sont linéairement indépendantes par rapport à ces paramètres.

Plus généralement la figure formée du point A, de la variété plane à p dimensions $[AA_1 \ldots A_p]$, de la variété $[AA_1 \ldots A_p A_{p+1} \ldots A_q]$ dépend de

$$n(q+1) - p^2 + pq - q^2$$

paramètres et les expressions de Pfaff

$$\omega_i, \quad \omega_\alpha, \quad \omega_\beta, \quad \omega_{i\alpha}, \quad \omega_{i\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta}$$
$$(i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, q;\ \beta = q+1, \ldots, n)$$

sont des combinaisons linéaires indépendantes de ces paramètres.

36. Cela posé, considérons dans l'espace projectif à n dimensions une variété à p dimensions et faisons correspondre à chaque point A de cette variété un système de référence dont les $n+1$ sommets seront le point A, puis p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ situés dans l'hyperplan tangent, enfin $n-p$ autres points $A_{p+1}, \ldots, A_n$. Ce système de référence ne dépendra naturellement plus de $(n+1)^2$ paramètres. Pour tout déplacement infiniment petit, on aura évidemment

$$\omega_{p+1} = \ldots = \omega_n = 0 \tag{21}$$

et, d'après (20'),

$$\left\{\begin{array}{lllll} [\omega_1 \omega_{1,p+1}] & + [\omega_2 \omega_{2,p+1}] & + \ldots + [\omega_p \omega_{p,p+1}] & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & & & \ldots, \\ [\omega_1 \omega_{1n}] & + [\omega_2 \omega_{2n}] & + \ldots + [\omega_p \omega_{pn}] & = 0. \end{array}\right. \tag{22}$$

Comme les expressions $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont linéairement indépendantes (ce sont des combinaisons linéaires des p paramètres dont dépend la position du point A sur la variété donnée), les expressions

$$\omega_{i\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n)$$

sont (n° 17) des combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_p$, et les coefficients de $\omega_1, \ldots, \omega_p$ dans les expressions de $\omega_{1\alpha}, \omega_{2\alpha}, \ldots, \omega_{p\alpha}$ forment un tableau symétrique. Autrement dit, si l'on considère les $n-p$ formes quadratiques en $\omega_1, \ldots, \omega_p$

$$\Phi_\alpha = \omega_1\omega_{1\alpha} + \omega_2\omega_{2\alpha} + \ldots + \omega_p\omega_{p\alpha},$$

on a

$$\omega_{i\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\omega_i}. \tag{23}$$

Remarquons que, si l'on considère les expressions $\omega_i, \omega_\alpha, \omega_{i\alpha}$ qui sont (n° 35) des combinaisons linéaires des paramètres dont dépend l'hyperplan tangent $[AA_1 \ldots A_p]$, les p premières sont indépendantes et les autres s'en déduisent linéairement par les formules (21) et (23).

37. Soit q le nombre des formes quadratiques Φ_α qui sont linéairement indépendantes; on peut choisir le système de référence associé au point A de la variété de manière que les formes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+q}$ soient linéairement indépendantes, les formes $\Phi_{p+q+1}, \ldots, \Phi_n$ étant identiquement nulles.

Considérons en effet une courbe quelconque tracée sur la variété et passant par P. La tangente à cette courbe est définie par les points A et dA; le plan osculateur (à deux dimensions) par les points A, dA et d^2A. Or on a

$$\begin{aligned}
dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_p A_p,\\
d^2A &= \omega_1\, dA_1 + \ldots + \omega_p\, dA_p + \ldots\\
&= \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} (\omega_1\omega_{1\alpha} + \ldots + \omega_p\omega_{p\alpha})A_\alpha + \ldots\\
&= \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \Phi_\alpha(\omega_1, \ldots, \omega_p)A_\alpha + \ldots,
\end{aligned}$$

les termes non écrits dépendant linéairement de A, A_1, ..., A_p. Il résulte de là que si l'on cherche le lieu des plans osculateurs en A aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A, ce lieu contiendra évidemment l'hyperplan tangent à la variété et, d'une manière générale, tous les hyperplans à $p+1$ dimensions définis par les équations

$$\frac{x_{p+1}}{\Phi_{p+1}(t_1, \ldots, t_p)} = \ldots = \frac{x_n}{\Phi_n(t_1, \ldots, t_p)}$$

avec les p paramètres arbitraires $t_1, \ldots, t_p$. Par suite *la plus petite variété plane contenant les plans osculateurs aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par* A *s'obtient en établissant entre* $x_{p+1}, \ldots, x_n$ *les mêmes relations linéaires que celles qui existent entre les formes* $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$. C'est donc une variété plane à $p+q$ dimensions. On peut l'appeler *l'hyperplan osculateur à la variété en* A.

Si maintenant on choisit les sommets $A_{p+1}, \ldots, A_{p+q}$ du système de référence dans l'hyperplan osculateur, on voit immédiatement que les formes $\Phi_{p+q+1}, \ldots, \Phi_n$ sont nulles.

38. *Le réseau asymptotique.* — Considérons une variété plane (Π) à $p+q-1$ dimensions contenue dans l'hyperplan osculateur et contenant l'hyperplan tangent, soit

$$\lambda_{p+1}x_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q}x_{p+q} = 0$$

son équation.

Cherchons le lieu des tangentes aux courbes de la variété dont le plan osculateur est contenu dans (Π).

Il en sera ainsi si le point

$$\Phi_{p+1}A_{p+1} + \ldots + \Phi_{p+q}A_{p+q}$$

est contenu dans (Π), c'est-à-dire s'il existe entre $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+q}$ la relation linéaire

$$\lambda_{p+1}\Phi_{p+1} + \ldots + \lambda_{p+q}\Phi_{p+q} = 0.$$

Le lieu cherché est donc un cône du second ordre de sommet A (et situé dans l'hyperplan tangent). Tous ces cônes forment un réseau linéaire qu'on peut appeler le *réseau asymptotique* relatif au point A. Les formes Φ_α peuvent aussi s'appeler les *formes asymptotiques* relatives au point A.

Pour que le plan osculateur d'une courbe soit dans l'hyperplan tangent à la variété, il faut et il suffit que la tangente à cette courbe appartienne à tous les cônes du réseau asymptotique. Nous appellerons donc *tangente asymptotique* toute génératrice commune à tous les cônes du réseau asymptotique. Si $q < p - 1$, il y a une infinité de tangentes asymptotiques; si $q = p - 1$, il y en a en général un nombre fini; si $q \geqq p$, il n'y a pas en général de tangente asymptotique.

Deux tangentes seront dites *conjuguées* si elles sont conjuguées par rapport à tous les cônes du réseau asymptotique. Étant données deux tangentes conjuguées définies par leurs paramètres directeurs $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ et $(\varpi_1, \ldots, \varpi_p)$, lorsque le point A se déplace sur la variété dans la direction d'une de ces tangentes, l'hyperplan tangent en A a en commun l'autre tangente avec l'hyperplan tangent infiniment voisin. En effet, le point $x\mathrm{A} + x_1 \mathrm{A}_1 + \ldots + x_p \mathrm{A}_p$ appartient à l'hyperplan tangent au point $\mathrm{A} + d\mathrm{A}$ si (n° 34) le point $x d\mathrm{A} + x_1 d\mathrm{A}_1 + \ldots + x_p d\mathrm{A}_p$ appartient à l'hyperplan tangent en A, ou si

$$x_1 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_1} + \ldots + x_p \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_p} = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, p+q).$$

Or les conditions

$$\varpi_1 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_1} + \ldots + \varpi_p \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_p} = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, p+q)$$

expriment précisément que les deux tangentes considérées sont conjuguées.

39. *Les hyperplans osculateurs et les réseaux asymptotiques d'ordre supérieur.* — Considérons les variétés planes à trois dimensions osculatrices en A aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A; elles sont définies par les points A, $d\mathrm{A}$, $d^2\mathrm{A}$ et $d^3\mathrm{A}$. Or, en négligeant les termes en A, A_1, ..., A_p, A_{p+1}, ..., A_{p+q}, on a

$$\begin{aligned} d^3\mathrm{A} &= \Phi_{p+1}\, d\mathrm{A}_{p+1} + \ldots + \Phi_{p+q}\, d\mathrm{A}_{p+q} \\ &= \sum_{\lambda = p+q+1}^{\lambda = n} (\Phi_{p+1}\, \omega_{p+1,\lambda} + \ldots + \Phi_{p+q}\, \omega_{p+q,\lambda}) \mathrm{A}_\lambda. \end{aligned}$$

Posons

$$\Psi_\lambda = \omega_{p+1,\lambda}\,\Phi_{p+1} + \ldots + \omega_{p+q,\lambda}\,\Phi_{p+q};$$

les Ψ_λ sont des formes cubiques en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, car des équations

$$\omega_{i\lambda} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \lambda = p+q+1, \ldots, n)$$

on déduit par les formules (20)

$$(24) \qquad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} [\omega_{i\alpha}\omega_{\alpha\lambda}] = 0,$$

relations qui montrent (n° **17**) que les expressions $\omega_{\alpha\lambda}$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_p$.

Supposons que parmi les $n-p-q$ formes cubiques Ψ_λ il y en ait exactement r linéairement indépendantes; on en déduira, comme au n° **36**, que la plus petite variété plane contenant toutes les variétés planes osculatrices à trois dimensions aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A est à $p+q+r$ dimensions; de plus, si l'on choisit les sommets $A_{p+q+1}, \ldots, A_{p+q+r}$ du système de référence dans cette variété plane, les formes cubiques $\Psi_{p+q+1}, \ldots, \Psi_{p+q+r}$ seront linéairement indépendantes et les formes cubiques $\Psi_{p+q+r+1}, \ldots, \Psi_n$ seront identiquement nulles.

Cette variété plane à $p+q+r$ dimensions peut s'appeler *l'hyperplan osculateur du second ordre en A à la variété;* le réseau de cônes du troisième ordre

$$\lambda_1\Psi_{p+q+1} + \ldots + \lambda_r\Psi_{p+q+r} = 0$$

le réseau asymptotique du second ordre, les formes Ψ_λ les formes asymptotiques du second ordre.

40. Il y a entre les formes asymptotiques du premier ordre et celles du second ordre une relation remarquable: *les dérivées partielles du premier ordre d'une forme asymptotique du second ordre quelconque sont des formes asymptotiques du premier ordre.*

Soit en effet

$$\Psi_\lambda = \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \Phi_\alpha\omega_{\alpha\lambda} = \sum_{i=1}^{i=p}\ \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_i\omega_{i\alpha}\omega_{\alpha\lambda}$$

une forme asymptotique du second ordre. On a

$$\frac{\partial\Psi_\lambda}{\partial\omega_i} = \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_{i\alpha}\omega_{\alpha\lambda} + \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_j \frac{\partial\omega_{j\alpha}}{\partial\omega_i}\omega_{\alpha\lambda} + \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_j\omega_{j\alpha}\frac{\partial\omega_{\alpha\lambda}}{\partial\omega_i};$$

or les identités (22) et (24), différentiées par rapport à ω_i, donnent

$$\omega_{i\alpha} - \sum_{j=1}^{j=p}\omega_j\frac{\partial\omega_{j\alpha}}{\partial\omega_i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,p;\ \alpha=p+1,\ \ldots,\ p+q),$$

$$\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q}\frac{\partial\omega_{j\alpha}}{\partial\omega_i}\omega_{\alpha\lambda} - \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q}\omega_{j\alpha}\frac{\partial\omega_{\alpha\lambda}}{\partial\omega_i} = 0 \qquad (i,j=1,\ldots,p).$$

Il en résulte que dans l'expression de $\frac{\partial\Psi_\lambda}{\partial\omega_i}$ les trois sommes du second membre sont égales et par suite on a

$$\frac{\partial\Psi_\lambda}{\partial\omega_i} = 3\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q}\frac{\partial\omega_{\alpha\lambda}}{\partial\omega_i}\Phi_\alpha,$$

formule qui démontre le théorème.

On déduit de ce qui précède que, le réseau asymptotique (du premier ordre) étant supposé connu, *le réseau asymptotique du second ordre n'est pas arbitaire*. Si en particulier le réseau asymptotique est défini par un certain nombre de relations linéaires à coefficients constants entre les coefficients des formes Φ_α, soit

$$\sum_{i,j} A_{ij}a_{ij} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\sum_{i,j} L_{ij}a_{ij} = 0,$$

les coefficients a_{ijk} des formes cubiques Ψ_λ devront satisfaire aux relations suivantes, en nombre p fois plus grand,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i,j} A_{ij}a_{ijk} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\sum_{i,j} L_{ij}a_{ijk} = 0\end{array}\right\} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Supposons par exemple que les formes asymptotiques du premier ordre se déduisent linéairement des formes rectangles $2\omega_i\omega_j$; le réseau asymptotique est défini par les conditions

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{pp} = 0$$

et par suite le réseau asymptotique du second ordre satisfera aux conditions

$$a_{iij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots, p);$$

les formes cubiques Ψ_λ n'auront donc que des termes de la forme $a\omega_i\omega_j\omega_k$, les indices i, j, k étant distincts.

41. Il peut arriver que les conditions imposées par le réseau asymptotique du premier ordre au réseau asymptotique du second ordre ne conviennent qu'à des formes cubiques identiquement nulles : c'est ce qui arrive dans l'exemple précédent si $p = 2$. Dans ce cas, l'hyperplan osculateur du second ordre se confond avec l'hyperplan osculateur du premier ordre et l'on peut démontrer facilement que *cet hyperplan est fixe quand le point* A *se déplace sur la variété*. On a en effet, quel que soit l'indice $\lambda > p + q$,

$$\omega_\lambda = 0,$$
$$\omega_{i\lambda} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, p + q).$$

Par suite (n° 34), l'hyperplan $|AA_1 \dots A_{p+q}|$ est fixe. La variété est donc contenue dans un hyperplan fixe à $p + q$ dimensions.

La même conclusion subsiste sous la seule condition que l'hyperplan osculateur du second ordre coïncide en chaque point A avec l'hyperplan osculateur du premier ordre.

42. On pourra convenir d'appeler *tangente asymptotique du second ordre* toute tangente génératrice commune des cônes $\Psi_\lambda = 0$; en vertu du théorème du n° 39, toute tangente asymptotique du premier ordre est tangente asymptotique du second ordre, mais la réciproque n'est pas vraie.

On pourra enfin définir les hyperplans osculateurs du troisième, du quatrième, etc. ordre, ainsi que les formes asymptotiques de chacun de ces ordres. *Les dérivées partielles d'ordre h d'une forme asymptotique du $m^{\text{ième}}$ ordre sont des formes asympto-*

tiques d'ordre $m-h$. Si l'hyperplan osculateur du $m^{\text{ième}}$ ordre coïncide en chaque point A avec l'hyperplan osculateur du $(m-1)^{\text{ième}}$ ordre, ce dernier hyperplan est fixe.

43. Convenons de dire que deux réseaux linéaires de cônes d'ordre h (de sommet A) appartiennent au *même type projectif* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation projective (laissant invariant le point A), ou, analytiquement parlant, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une substitution linéaire effectuée sur les coordonnées $\omega_1, \ldots, \omega_p$. On peut alors se proposer de déterminer toutes les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique du premier ordre appartient à un type projectif donné, ou encore toutes celles dont les réseaux asymptotiques du premier, du second, etc., du $h^{\text{ième}}$ ordre appartiennent à des types projectifs donnés.

Pour donner une idée de la méthode à suivre, prenons deux exemples.

Proposons-nous d'abord de *trouver toutes les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique*, *supposé d'ordre p*, *est réductible à la forme*

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \ldots + \lambda_p \omega_p^2 = 0.$$

On aura ici $q = p$, et l'on pourra supposer choisis les sommets du système de référence de manière à avoir

$$\Phi_{p+i} = \omega_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Cela posé, les variétés cherchées peuvent être regardées comme les solutions du système de Pfaff :

$$(25)\qquad \begin{cases} \omega_{p+1} &= \ldots = \omega_n = 0, \\ \omega_{i,p+i} &= \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega_{j,p+i} &= 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega_{i,2p+\lambda} &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, n-2p). \end{cases}$$

Les premiers membres des équations de ce système sont des combinaisons linéaires des expressions

$$\omega_i, \quad \omega_\alpha, \quad \omega_{i\alpha} \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n)$$

qui sont linéairement indépendantes par rapport aux différentielles des $n(p+1)-p^2$ paramètres dont dépend *l'élément* générateur de la variété (formé du point A et de l'hyperplan tangent $[AA_1 \ldots A_p]$). Le système (25) est donc de la nature de ceux qui sont considérés au n° **29**. Calculons alors les équations quadratiques alternées dérivées des équations (25). En appliquant les formules (20') et tenant compte des équations (25), on obtient

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} [\omega_i(\omega_{p+i,p+i}-\omega_{ii}-\omega_{00})]-\sum\limits_{k\neq i}^{1,\ldots,p}[\omega_k\omega_{ki}]=0 \quad (i=1,2,\ldots,p), \\ -[\omega_i\omega_{ji}]+[\omega_j\omega_{p+j,p+i}]=0 \quad (i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots,p), \\ [\omega_i\omega_{p+i,2p+\lambda}]=0 \quad (i=1,2,\ldots,p;\ \lambda=1,2,\ldots,n-2p). \end{array}\right.$$

Ici, les équations (26) sont d'elles-mêmes de la forme (17) et les expressions principales sont $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$. Les expressions secondaires sont

$$\begin{array}{c} \omega_{ij},\quad \omega_{p+i,p+j} \quad (i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots,p), \\ \omega_{p+i,p+i}-\omega_{ii}-\omega_{00} \quad (i=1,2,\ldots,p), \\ \omega_{p+i,2p+\lambda} \quad (i=1,2,\ldots,p;\ \lambda=1,2,\ldots,n-2p); \end{array}$$

elles sont au nombre de $p(n-1)$.

Le nombre s_1 est ici le nombre des équations linéairement indépendantes

$$\begin{array}{l} \xi_i(\omega_{p+i,p+i}-\omega_{ii}-\omega_{00})-\sum\limits_{k\neq i}^{1,\ldots,p}\xi_k\,\omega_{ki}=0, \\ -\xi_i\,\omega_{ji}+\xi_j\,\omega_{p+j,p+i}=0, \\ \xi_i\,\omega_{p+i,2p+\lambda}=0; \end{array}$$

on trouve immédiatement

$$s_1=p(n-p).$$

Pour avoir le nombre s_2, il faut adjoindre aux équations précédentes les suivantes :

$$\begin{array}{l} \xi'_i(\omega_{p+i,p+i}-\omega_{ii}-\omega_{00})-\sum\xi'_k\,\omega_{ki}=0, \\ -\xi'_i\,\omega_{ji}+\xi'_j\,\omega_{p+j,p+i}=0, \\ \xi'_i\,\omega_{p+i,2p+\lambda}=0; \end{array}$$

on déduit de toutes ces équations (si les ξ_i et les ξ'_i sont *arbitraires*)

$$\omega_{p+i,2p+\lambda}=0,$$
$$\omega_{ji}=\omega_{p+j,p+i}=0,$$
$$\omega_{p+i,p+i}-\omega_{ii}-\omega_{00}=0\,;$$

on a donc

$$s_1+s_2=p(n-1),\qquad \text{d'où}\qquad s_2=p(p-1).$$

Il est évident maintenant que les entiers $s_1+s_2+s_3$, $s_1+s_2+s_3+s_4$, ... sont tous égaux à s_1+s_2 ; donc

$$s_3=s_4=\ldots=s_p=0.$$

Des valeurs trouvées pour les s on déduit

$$s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ps_p=p(n+p-2)\,;$$

or si l'on résout les équations (26) par rapport aux $p(n-1)$ expressions ω_{ij}, $\omega_{p+i,p+j}$, ..., on trouve

$$\omega_{ij}=a_{ij}\omega_i+b_{ij}\omega_j,$$
$$\omega_{p+i,p+j}=c_{ij}\omega_i-a_{ij}\omega_j,$$
$$\omega_{p+i,p+i}-\omega_{ii}-\omega_{00}=h_i\omega_i-\sum_{k\neq i}^{1,\ldots,p}b_{ki}\omega_k,$$
$$\omega_{p+i,p+2\lambda}=g_{i\lambda}\omega_i,$$

avec les $p(n+p-2)$ paramètres arbitraires a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, h_i, $g_{i\lambda}$. *Le système* (25) *est donc en involution et les variétés cherchées dépendent de $s_2=p(p-1)$ fonctions arbitraires de deux arguments.*

14. On peut se placer à un autre point de vue et regarder les variétés cherchées comme engendrées par leurs hyperplans tangents. Les expressions

$$\omega_\alpha,\quad \omega_{i\alpha}\qquad (i=1,2,\ldots,p;\ \alpha=p+1,\ldots,n)$$

sont linéairement indépendantes par rapport aux $(p+1)(n-p)$ paramètres dont dépend l'hyperplan tangent $[AA_1\ldots A_p]$. Or les conditions auxquelles doit satisfaire la variété sont données par les relations

$$(27)\quad \begin{cases} \omega_{p+1} = \ldots = \omega_n = 0, \\ \omega_{j,p+i} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ \omega_{i,2p+\lambda} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, n-2p); \end{cases}$$

les relations (22) montrent en effet que $\omega_{i,p+i}$ ne dépend que de ω_i et que par suite le réseau asymptotique appartient au type projectif voulu. Les équations (27) sont bien de la nature de celles qui sont considérées au n° **29**, mais ici ce sont les p expressions $\omega_{i,p+i}$ qui sont principales. Les équations quadratiques extérieures dérivées des équations (27) sont

$$(28)\quad \begin{cases} [\omega_i \omega_{i,p+i}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ -[\omega_{i,p+i}\omega_{ji}] + [\omega_{j,p+j}\omega_{p+j,p+i}] = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p), \\ [\omega_{i,p+i}\omega_{p+i,2p+\lambda}] = 0 \qquad (i + 1, 2, \ldots, p;\ \lambda = 1, 2, \ldots, n-2p). \end{cases}$$

Ici, les expressions secondaires qui figurent dans une quelconque des équations (28) sont indépendantes de celles qui figurent dans les autres ; par conséquent (n° **32**), le système est en involution et les valeurs de $s_1, \ldots, s_n$ s'obtiennent en ajoutant les valeurs de ces nombres pour chacune des équations (28) ; on trouve ainsi immédiatement

$$s_1 = p(n-p), \qquad s_2 = p(p-1), \qquad s_3 = \ldots = s_p = 0,$$

comme avec la première méthode.

45. Les variétés précédentes jouissent d'une propriété remarquable. Considérons les équations

$$\omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

chacune de ces équations est complètement intégrable ; on a en effet, sur toute variété intégrale du système (25),

$$\omega'_i = [\omega_{00}\omega_i] + \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \omega_{ki}] = [\omega_i(\omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{00})];$$

comme ω'_i s'annule avec ω_i, l'équation $\omega_i = 0$ est bien complètement intégrable (n° **27**).

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante :

Les équations $\omega_i = 0$ *définissent p variétés planes à* $p - 1$ *dimensions tangentes à la variété en* A : *il existe sur la variété p familles de variétés à* $p - 1$ *dimensions tangentes en chacun de leurs points à l'une de ces p variétés planes.*

Convenons de dire qu'une variété plane tangente à $p - 1$ dimensions est ***distinguée*** si, considérée comme une variété plane ***double***, elle fait partie du réseau asymptotique. Appelons de même ***variété distinguée*** à $p - 1$ dimensions une variété située sur la variété donnée et telle qu'en chacun de ses points elle soit tangente à une variété plane tangente distinguée. Nous voyons alors que *si en chaque point* A *de la variété donnée le réseau asymptotique admet comme cônes de base p variétés planes doubles, la variété donnée admet p familles de variétés distinguées à* $p - 1$ *dimensions.*

46. Cherchons maintenant les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique peut se ramener à la forme

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \ldots + \lambda_q \omega_q^2 = 0 \qquad (q < p).$$

On est ici dans un cas particulier intéressant, celui où *les q formes quadratiques asymptotiques peuvent s'exprimer en fonction de moins de p variables.* La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que *l'hyperplan tangent dépende de moins de p paramètres.*

Supposons en effet que l'hyperplan tangent dépende de $p' < p$ paramètres ; d'après ce qui a été vu au n° **34**, il faut et il suffit pour cela que parmi les $(p+1)(n-p)$ expressions

$$\omega_\alpha, \quad \omega_{i\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p; \; \alpha = p+1, \ldots, n)$$

il y en ait exactement p' indépendantes ; or les seules qui ne soient pas nulles sont les demi-dérivées $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i}$; or dire que les dérivées $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i}$ ne dépendent que de $\omega_1, \ldots, \omega_{p'}$, c'est dire que les formes Φ_α peuvent s'exprimer au moyen de $\omega_1, \ldots, \omega_{p'}$ et ne peuvent pas s'exprimer au moyen d'un moindre nombre de variables.

Réciproquement, si les Φ_α ne dépendent que de $\omega_1, \ldots, \omega_{p'}$, il en est de même des $\omega_{i\alpha}$, et comme les ω_α sont nulles d'elles-mêmes, l'hyperplan tangent dépend exactement de p' paramètres.

Cela posé, revenons aux variétés pour lesquelles le réseau asymptotique est engendré par q variétés planes doubles à $p-1$ dimensions, et définissons ces variétés en coordonnées tangentielles.

On pourra supposer

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{p+q} = \omega_q^2, \qquad \Phi_{p+q+\lambda} = 0.$$

Le système de Pfaff qui définira les variétés cherchées sera

$$(29) \quad \begin{cases} \omega_{p+i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ \omega_{p+q+\lambda} = 0 & (\lambda = 1, 2, \ldots, n-p-q), \\ \omega_{j,p+i} = 0 & (j \neq i;\ j = 1, 2, \ldots, p;\ i = 1, 2, \ldots, q), \\ \omega_{i,p+q+\lambda} = 0 & (i = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, n-p-q). \end{cases}$$

On a ici q variables indépendantes et ce sont les expressions $\omega_{i,p+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ qui sont principales. Les équations quadratiques alternées dérivées des équations (29) sont alors

$$(30) \quad \begin{cases} [\omega_{i,p+i}\omega_i] = 0 & (i = 1, \ldots, q), \\ -[\omega_{i,p+i}\omega_{ji}] + [\omega_{j,p+j}\omega_{p+j,p+i}] = 0 & (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, q), \\ -[\omega_{i,p+i}\omega_{ki}] = 0 & (i = 1, \ldots, q;\ k = q+1, \ldots, p), \\ [\omega_{i,p+i}\omega_{p+i,p+q+\lambda}] = 0 & (i = 1, \ldots, q;\ \lambda = 1, \ldots, n-p-q). \end{cases}$$

On trouve facilement, comme plus haut, que le système est en involution avec

$$s_1 = q(n-q), \qquad s_2 = q(q-1), \qquad s_3 = \ldots = s_q = 0.$$

Les variétés cherchées dépendent donc de $q(q-1)$ fonctions arbitraires de deux arguments.

Il n'y a d'exception à cette conclusion que si q est égal à 1. Dans ce cas, les variétés dépendent de $s = n-1$ fonctions arbitraires d'un argument; ce sont les enveloppes d'une variété plane à p dimensions dépendant d'un paramètre ; nous les retrouverons plus loin.

47. Étudions maintenant les variétés à p dimensions dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $p + \frac{q(q+1)}{2}$ de dimensions.

On pourra supposer ici que les formes quadratiques asymptotiques ne dépendent que de $\omega_1, \ldots, \omega_q$. Nous poserons

$$\Phi_{(ii)} = \omega_i^2, \qquad \Phi_{(ij)} = 2\omega_i\omega_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, q)$$

en appelant $A_{(ii)}$, $A_{(ij)}$ les $\frac{q(q+1)}{2}$ sommets du système de référence qui, avec $A, A_1, \ldots, A_p$, déterminent l'hyperplan osculateur. Nous désignerons par $l, m, \ldots$, les indices compris entre $q+1$ et p, et par $\alpha, \beta, \ldots$, les indices des sommets du système de référence non situés dans l'hyperplan osculateur. On a évidemment

$$\omega_{i(ii)} = \omega_i, \qquad \omega_{i(ij)} = \omega_j, \qquad \omega_{i\alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$
$$\omega_{l(ii)} = 0, \qquad \omega_{l(ij)} = 0, \qquad \omega_{l\alpha} = 0 \qquad (l = q+1, \ldots, p).$$

Des dernières équations on déduit, en prenant les covariants bilinéaires,

$$[\omega_i\omega_{li}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$
$$[\omega_i\omega_{lj}] + [\omega_j\omega_{li}] = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, q).$$

Ces relations exigent qu'on ait

$$\omega_{li} = u_l\omega_i \qquad (i = 1, \ldots, \alpha;\ l = q+1, \ldots, p),$$

où u_l est un coefficient convenablement choisi.

Considérons alors le point $A_l - u_l A$ et choisissons-le pour nouveau sommet A_l du système de référence; cela revient à supposer $u_l = 0$. On a donc

$$\omega_{li} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, q;\ l = q+1, \ldots, p).$$

Cette équation donne, par les covariants bilinéaires,

$$[\omega_{l0}\omega_i] = 0.$$

L'expression ω_{l0} ne dépend donc que de ω_i; par suite *si q est plus grand que* 1, on a aussi

$$\omega_{l0} = 0.$$

On en déduit que $dA_{q+1}, \ldots, dA_p$ ne dépendent que de $A_{q+1}, \ldots, A_p$ et par suite (n° 34) *la variété plane* $[A_{q+1} \ldots A_p]$ *est fixe.*

Autrement dit, l'hyperplan tangent en A contient une variété plane fixe (Π) à $p - q - 1$ dimensions. Considérons alors une autre variété plane fixe (Π′) à $n - p + q$ dimensions n'ayant aucun point commun avec (II); elle a en commun avec la variété donnée une variété à q dimensions dont l'hyperplan tangent dépend de q paramètres et l'hyperplan osculateur est à $q+\frac{(q+1)}{2}$ dimensions; en joignant tous ses points aux différents points de (II) on a la variété cherchée.

Les variétés cherchées ont le même degré de généralité que les variétés à q dimensions de l'espace à $n-p+q$ dimensions; *elles dépendent donc de $n-p$ fonctions arbitraires de q arguments.*

48. La conclusion précédente ne s'applique pas si $q=1$, c'est-à-dire si l'hyperplan tangent à la variété ne dépend que d'un paramètre. Ici encore on a comme plus haut

$$\omega_{l1}=0 \qquad (l=2,\ldots,p).$$

La caractéristique de l'hyperplan tangent est (n° 34) le lieu des points $xA+x_1A_1+\ldots+x_pA_p$ tels que le point

$$x\,dA+x_1dA_1+\ldots+x_pdA_p$$

appartienne à l'hyperplan tangent; c'est donc la variété plane $[AA_2A_3\ldots A_p]$. La caractéristique de cette variété plane est le lieu des points $xA+x_2A_2+\ldots+x_pA_p$ tels que

$$x\omega_1+x_2\omega_{21}+\ldots+x_p\omega_{p1}=x\omega_1=0;$$

c'est donc la variété plane $[A_2A_3\ldots A_p]$. La caractéristique de cette variété plane est le lieu des points $x_2A_2+\ldots+x_pA_p$ tels qu'on ait

$$x_2\omega_{20}+x_3\omega_{30}+\ldots+x_p\omega_{p0}=0;$$

or l'équation

$$\omega_{l1}=0$$

conduit à

$$[\omega_{l0}\omega_1]=0,$$

ce qui montre que $\omega_{20},\ldots,\omega_{p0}$ ne dépendent que de ω_1. La caractéristique de $[A_2A_3\ldots A_p]$ est donc une variété plane à $p-2$ dimensions qu'on peut toujours supposer être $[A_3\ldots A_p]$; on aura alors

$$\omega_{30}=\ldots=\omega_{p0}=0.$$

On déduit de ces dernières équations

$$[\omega_{32}\omega_{20}]=\ldots=[\omega_{p2}\omega_{20}]=0,$$

ce qui montre que $\omega_{32}, \ldots, \omega_{p2}$ ne dépendent que de ω_1; par suite, la caractéristique de $[A_3 \ldots A_p]$ est une variété plane à 1 dimension de moins qu'on peut toujours supposer être $[A_4 \ldots A_p]$, avec

$$\omega_{42} = \ldots = \omega_{p2} = 0.$$

On continuera ainsi de proche en proche et l'on pourra toujours supposer que, dans la suite des variétés planes

$$[AA_1A_2 \ldots A_p], \quad [AA_2 \ldots A_p], \quad [A_2 \ldots A_p], \quad [A_3 \ldots A_p], \quad \ldots, \quad [A_{p-1}A_p], \quad A_p,$$

chacune est la caractéristique de la précédente; on aura

$$\omega_{lm} = 0 \quad \text{si} \quad m < l - 1,$$
$$[\omega_{l,l-1}\omega_1] = 0.$$

Cela posé, considérons le point A_p; il ne dépend que d'un paramètre, car

$$dA_p = \omega_{p,p-1}A_{p-1} + \omega_{pp}A_p;$$

il engendre donc une courbe dont la tangente est $[A_pA_{p-1}]$; comme on a

$$dA_{p-1} = \omega_{p-1,p-2}A_{p-2} + \omega_{p-1,p-1}A_{p-1} + \omega_{p-1,p}A_p,$$

le plan osculateur à cette courbe est $[A_pA_{p-1}A_{p-2}]$; la variété plane osculatrice à deux dimensions est $[A_pA_{p-1}A_{p-2}A_{p-3}]$ et ainsi de suite; finalement, sa variété plane osculatrice à $p-1$ dimensions est $[AA_2 \ldots A_p]$; cette variété plane engendre la variété donnée qui est ainsi *le lieu de la variété plane osculatrice à $p-1$ dimensions d'une courbe gauche.*

Réciproquement, partons d'une courbe gauche (C) lieu d'un point M fonction d'un paramètre t et considérons la variété à p dimensions lieu de la variété plane à $p-1$ dimensions osculatrice de (C). On a, pour tout point A de cette variété,

$$A = M + x_1\frac{dM}{dt} + x_2\frac{d^2M}{dt^2} + \ldots + x_{p-1}\frac{d^{p-1}M}{dt^{p-1}},$$

les p paramètres dont dépend la position de A sur la variété étant $t, x_1, \ldots, x_{p-1}$. On a alors

$$dA = dx_1\frac{dM}{dt} + dx_2\frac{d^2M}{dt^2} + \ldots$$
$$+ dx_{p-1}\frac{d^{p-1}M}{dt^{p-1}} + dt\left(\frac{dM}{dt} + x_1\frac{d^2M}{dt^2} + \ldots + x_{p-1}\frac{d^pM}{dt^p}\right);$$

on voit que l'hyperplan osculateur à la variété est déterminé par les $p+1$ points

$$M, \quad \frac{dM}{dt}, \quad \frac{d^2M}{dt^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^pM}{dt^p};$$

il ne dépend donc que d'un paramètre, à savoir t.

Les variétés dont l'hyperplan tangent ne dépend que d'un paramètre dépendent évidemment, d'après ce qui précède, de $n-1$ fonctions arbitraires d'un argument, comme on l'a trouvé directement au n° **46**.

49. Proposons-nous enfin de *déterminer les variétés à p dimensions dont le réseau asymtotique est le plus général possible* $\left(\textit{l'hyperplan osculateur étant alors à } \frac{p(p+3)}{2} \textit{ dimensions}\right)$, *mais dont le réseau asymptotique du second ordre est engendré par p variétés triples n'ayant d'autre point commun que* A.

Nous pourrons choisir le système de référence de manière que les formes asymptotiques du premier ordre soient

$$\Phi_{(ii)} = \omega_i^2, \qquad \Phi_{(j)} = 2\omega_i\omega_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \dots, p)$$

et les formes asymptotiques du second ordre soient

$$\Psi_{i'} = \omega_i^3 \qquad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Nous aurons donc

$$d^2M = \omega_1^2 A_{(11)} + 2\omega_1\omega_2 A_{(12)} + \dots + \omega_p^2 A_{(pp)} + \dots,$$
$$d^3M = \omega_1^3 A_{1'} + \omega_2^3 A_{2'} + \dots + \omega_p^3 A_{p'} + \dots,$$

les termes non écrits étant, dans la première formule, linéaires en $A, A_1, \dots, A_p$; dans la seconde formule, linéaires en $A, A_1, \dots, A_p, A_{(11)}, A_{(12)}, \dots, A_{(pp)}$. Il pourra enfin exister d'autres sommets du système de référence que $A, A_1, \dots, A_p, A_{(11)}, \dots, A_{(pp)}, A_{1'}, \dots, A_{p'}$; nous les appellerons A_α, A_β, etc.

Cela posé, on a démontré au n° **40** la formule

$$\frac{\partial \Psi_{i'}}{\partial \omega_j} = 3 \sum_{(hk)}^{1,\dots,p} \frac{\partial \omega_{(hk)i'}}{\partial \omega_j} \Phi_{(hk)};$$

on en déduit

$$\omega_{(ii)i'} = \omega_i, \qquad \omega_{(ij)i'} = 0, \qquad \omega_{(jk)i'} = 0 \qquad (i \neq j \neq k;\ i, j, k = 1, \ldots, p).$$

D'après cela, les variétés cherchées peuvent être regardées comme les solutions du système de Pfaff :

$$(31)\quad \begin{cases} \omega_{(ij)} = 0, \quad \omega_{i'} = 0, \quad \omega_\alpha = 0; \\ \omega_{i(ii)} = \omega_i, \quad \omega_{j(ii)} = 0, \\ \omega_{i(ij)} = \omega_j, \quad \omega_{i(jk)} = 0, \\ \omega_{ii'} = 0, \quad \omega_{ij'} = 0, \quad \omega_{i\alpha} = 0, \\ \omega_{(ii)i'} = \omega_i, \quad \omega_{(ij)i'} = 0, \quad \omega_{(jk)i'} = 0, \\ \omega_{(ii)\alpha} = \quad \omega_{(ij)\alpha} = 0. \end{cases}$$

Les équations de ce système expriment des relations linéaires entre les expressions ω_i, $\omega_{(ij)}$, $\omega_{i'}$, ω_α, $\omega_{i(jk)}$, ω_{ij}, $\omega_{i\alpha}$, $\omega_{(ij)k'}$, $\omega_{(ij)\alpha}$ qui sont linéairement indépendantes par rapport aux paramètres qui définissent la position de la figure formée par le point A, l'hyperplan tangent et l'hyperplan osculateur.

Le système quadratique extérieur dérivé de (31) est :

$$(32)\quad \begin{cases} \Theta_{i(ii)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ii)(ii)} + \omega_{00} - 2\omega_{ii})] + \displaystyle\sum_{k \neq i}^{k=1,\ldots,p} [\omega_k(\omega_{(ik)(ii)} - \omega_{ki})] = 0, \\ \Theta_{j(ii)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ij)(ii)} - \omega_{ji})] + \displaystyle\sum_{k \neq i}^{k=1,\ldots,p} [\omega_k \omega_{(jk)(ii)}] = 0, \\ \Theta_{i(ij)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ii)(ij)} - 2\omega_{ij})] + [\omega_j(\omega_{(ij)(ij)} + \omega_{00} - \omega_{ii} - \omega_{jj})] \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{k \neq i, j}^{k=1,\ldots,p} [\omega_k(\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj})] = 0, \\ \Theta_{k(ij)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj})] + [\omega_j(\omega_{(jk)(ij)} - \omega_{ki})] \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{h \neq i, j}^{h=1,\ldots,p} [\omega_h \omega_{(kh)(ij)}] = 0, \\ \Theta_{(ii)i'} \equiv [\omega_i(\omega_{i'i'} + \omega_{00} - \omega_{(ii)(ii)} - \omega_{ii})] - \displaystyle\sum_{k \neq i}^{k=1,\ldots,p} [\omega_k \omega_{ki}] = 0, \\ \Theta_{(ij)i'} \equiv [\omega_i \omega_{(ij)(ii)}] = 0, \\ \Theta_{(jk)k'} \equiv [\omega_i \omega_{(jk)(ii)}] = 0, \\ \Theta_{(ii)\alpha} \equiv [\omega_i \omega_{i'\alpha}] = 0. \end{cases}$$

Chacune des équations $\theta_{(ii)\alpha} = 0$ fait intervenir une expression secondaire $\omega_{i'\alpha}$ qui n'intervient dans aucune autre des équations ; elle est involutive avec

$$\sigma_1 = 1, \qquad \sigma_2 = \ldots = \sigma_p = 0.$$

De même le groupe des p équations

$$\theta_{1(ij)}, \quad \theta_{2(ij)}, \quad \ldots, \quad \theta_{p(ij)},$$

où i et j sont deux (différents) des indices $1, 2, \ldots, p$, fait intervenir $\frac{p(p+1)}{2}$ expressions secondaires

$$\omega_{(ii)(ij)} - 2\omega_{(ij)}, \quad \omega_{(jj)(ij)} - 2\omega_{ji}, \quad \omega_{(ij)(ij)} + \omega_{00} - \omega_{ii} - \omega_{jj},$$
$$\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj}, \quad \omega_{(jk)(ij)} - \omega_{ki}, \quad \omega_{(kh)(ij)},$$

qui n'interviennent dans aucune des autres équations du système, et le système partiel formé par ces p équations est involutif (fin du n° **32**), avec

$$\sigma_1 = p, \qquad \sigma_2 = p - 1, \qquad \ldots, \qquad \sigma_{p-1} = 2, \qquad \sigma_p = 1.$$

Il ne reste donc à étudier que le système des $\frac{p^2(p+3)}{2}$ équations

$$\theta_{i(ii)} = 0, \qquad \theta_{j(ii)} = 0, \qquad \theta_{(ii)i'} = 0, \qquad \theta_{(ij)i'} = 0, \qquad \theta_{jki'} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

et à voir s'il est involutif. Il fait intervenir les expressions secondaires

$$\omega_{(ii)(ii)} + \omega_{00} - 2\omega_{ii}, \quad \omega_{(ij)(ii)}, \quad \omega_{ji}, \quad \omega_{i'i'} + \omega_{00} - \omega_{(ii)(ii)} - \omega_{ii}$$

qui sont au nombre de $\frac{p^2(p+3)}{2}$. Or on trouve facilement que pour ce système partiel on a

$$\sigma_1 = \frac{p^2(p+3)}{2}, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sigma_p = 0,$$

et l'on vérifie sans peine que les valeurs des expressions secondaires en fonction de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ introduisent exactement $\frac{p^2(p+1)}{2}$ paramètres arbitraires.

Le système (31) est donc en involution, et l'on a en particulier

$$s_p = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Les variétés cherchées dépendent donc de $\frac{p(p-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de p arguments.*

Remarquons que la variété la plus générale à p dimensions dépend de $n - p$ fonctions arbitraires de p arguments, mais on a ici

$$n \geqq \frac{p(p+5)}{2}.$$

Enfin on peut remarquer que chacune des équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_p = 0$$

est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'il y a sur la variété p familles de variétés à $p-1$ dimensions tangentes en chacun de leurs points à l'une des p variétés planes qui, regardées comme variétés triples, définissent le réseau asymptotique du second ordre.

CHAPITRE V.

LES VARIÉTÉS DÉVELOPPABLES. LES VARIÉTÉS DE COURBURE CONSTANTE DANS UN ESPACE NON EUCLIDIEN DE MÊME COURBURE.

30. Plaçons-nous maintenant dans un espace euclidien à n dimensions et prenons d'abord un système de référence formé d'un point A et de n vecteurs-unités rectangulaires $I_1, \ldots, I_n$. On a les formules (2) et l'on trouve facilement, comme au n° **33**, les covariants bilinéaires

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega'_i &= \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \, \omega_{ki}] \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ \omega'_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_{ik} \omega_{kj}] \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n). \end{aligned} \right.$$

Faisons correspondre à chaque point A d'une variété à p dimensions un système de référence ayant pour origine le point A et tel que les p premiers vecteurs $I_1, I_2, \ldots, I_p$ soient tangents à la variété. On aura

$$\omega_{p+1} = \ldots = \omega_n = 0.$$

Nous dirons que la variété est *développable* lorsque son ds^2 sera celui d'un espace euclidien à p dimensions, c'est-à-dire lorsque la variété sera *applicable* sur une variété plane à p dimensions (de l'espace euclidien donné E_n à n dimensions). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on puisse faire correspondre à chaque point A de la variété un point B d'un espace euclidien E_p à p dimensions de telle sorte que le ds^2 du point B soit égal à celui du point A, c'est-à-dire égal à $\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2$. Si alors on pose

$$dB = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_p J_p,$$

en désignant par $J_1, J_2, \ldots, J_p$ un système de p vecteurs de l'espace E_p, on aura

$$dB \mid dB = \Sigma\, \omega_i \omega_k J_i \mid J_k,$$

et, par suite, les vecteurs $J_1, \ldots, J_p$ seront de longueur 1 et rectangulaires entre eux.

Cela posé, prenons dans l'espace E_p un système de référence mobile $\left(\text{dépendant de } \frac{p(p+1)}{2} \text{ paramètres arbitraires}\right)$; soient θ_j, θ_{ij} les composantes de son déplacement instantané. La variété donnée de E_n sera développable si l'on peut déterminer les $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres du système de référence de E_p de manière à satisfaire aux équations

$$\theta_i = \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{34}$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées de (34) sont

$$\sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k(\theta_{ki} - \omega_{ki})] = 0, \tag{35}$$

avec les ω_k comme expressions principales et les $\theta_{ki} - \omega_{ki}$ comme expressions secondaires. Or, si l'on cherche à résoudre les équations (35), on trouve

$$\theta_{ji} - \omega_{ji} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{jik}\, \omega_k$$

avec

$$a_{jik} = a_{kij}$$

et, naturellement,

$$a_{jik} = -a_{ijk}.$$

On déduit facilement de ces relations que tous les coefficients a_{ijk} sont nuls. Il faut donc adjoindre aux équations (34) les suivantes :

$$(36) \qquad \theta_{ji} = \omega_{ji}.$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées du système (34) et (36) sont maintenant

$$[\omega_{j,p+1}\omega_{p+1,i}] + [\omega_{j,p+2}\omega_{p+2,i}] + \ldots + [\omega_{jn}\omega_{ni}] = 0.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, le système (34) est incompatible; si elles le sont, le système (34), (36) est *complètement intégrable* et, par suite, la variété est développable.

La condition nécessaire et suffisante pour que la variété soit développable est donnée par les équations quadratiques extérieures

$$(37) \qquad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha}\omega_{j\alpha}] = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n).$$

51. Introduisons maintenant les $n-p$ formes quadratiques asymptotiques

$$\Phi_{p+1}, \quad \ldots, \quad \Phi_n;$$

on a

$$\omega_{i\alpha} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i}.$$

Les conditions (37) *expriment donc que les formes quadratiques* $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ *des variables* $\omega_1, \ldots, \omega_p$ *sont extérieurement orthogonales.*

Ces formes quadratiques sont susceptibles d'une interprétation euclidienne. On a, en effet, pour toute courbe tracée sur la variété,

$$d^2\mathrm{A} = \Phi_{p+1}\mathrm{I}_{p+1} + \ldots + \Phi_n \mathrm{I}_n + \ldots,$$

les termes non écrits dépendant des vecteurs $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_p$. Or, si l'on appelle $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ le *vecteur courbure* de la courbe, $\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$ le *vecteur courbure normale*, on a

$$d^2\mathrm{A} = ds^2\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

et, par suite,

$$ds^2\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \Phi_{p+1} \mathrm{I}_{p+1} + \ldots + \Phi_n \mathrm{I}_n.$$

Les *formes* Φ_α *sont donc les composantes suivant les* $n - p$ *axes rectangulaires* $\mathrm{I}_{p+1}, \ldots, \mathrm{I}_n$ *du vecteur courbure normale, multiplié par* ds^2.

Pour qu'une variété soit développable, il faut et il suffit que les composantes suivant $n - p$ ***axes rectangulaires du vecteur*** $ds^2\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$ ***soient des formes quadratiques extérieurement orthogonales.***

32. On arrive à des résultats analogues en se plaçant dans un espace non euclidien de courbure $\mathbf{C}$. En prenant un système de référence normal, on a

$$(38)\quad \begin{cases} d\mathrm{A} = \omega_1 \mathrm{A}_1 + \ldots + \omega_n \mathrm{A}_n, \\ d\mathrm{A}_i = -\mathbf{C}\omega_i \mathrm{A} + \omega_{i1} \mathrm{A}_1 + \ldots + \omega_{in} \mathrm{A}_n \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

avec

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

Les formules (20′) deviennent alors ici

$$(39)\quad \begin{cases} \omega'_i = \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}], \\ \omega'_{ij} = -\mathbf{C}[\omega_i \omega_j] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_{ik} \omega_{kj}] \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Considérons une variété à p dimensions applicable sur une variété plane de l'espace non euclidien donné E_n, ou encore applicable sur un espace non euclidien E_p à p dimensions de même courbure $\mathbf{C}$. Le raisonnement fait au n° 30 peut se répéter mot pour mot. On aura à considérer les équations (34) qui conduisent aux équations (35), puis (36). Comme on a ici

$$\theta'_{ij} = -\mathbf{C}[\theta_i \theta_j] + \sum_{k=1}^{k=p} [\theta_{ik} \theta_{kj}] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

on sera conduit à la même condition finale, exprimée par les équations (37).

Pour que la variété soit développable (c'est-à-dire applicable sur une variété plane de l'espace dans lequel est la variété),

il faut et il suffit que les composantes, par rapport aux points $A_1, \ldots, A_n$, *du point* d^2A, *soient des formes quadratiques extérieurement orthogonales.*

Si l'on considère dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue le point dont les coordonnées sont $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$, ce point est sur la projection normale de la normale principale à une certaine courbe de la variété et à une distance réduite du point A égale à la grandeur de la courbure normale de cette courbe.

Si l'on substitue dans le système de référence aux points $A_1, \ldots, A_n$ n autres points quelconques situés dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue (n vecteurs si l'espace est euclidien), la condition pour qu'une variété soit développable devient évidemment la suivante :

Il faut et il suffit que les $n-p$ *formes quadratiques* $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ *soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique* $H(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *qui indique le carré de la distance réduite au point* A *du point dont les* $n-p$ *dernières coordonnées sont* $x_{p+1}, \ldots, x_n$, *les autres étant*

$$x = 1, \qquad x_1 = \ldots = x_p = 0.$$

53. Nous avons démontré (n° 20) que si r formes quadratiques réelles extérieurement orthogonales ne peuvent pas s'exprimer en fonction de moins de n variables, le nombre r est au moins égal à n, et, si r est égal à n, les r formes sont linéairement indépendantes et se déduisent par une substitution orthogonale de n formes carrés parfaits.

Nous déduisons de là que, *étant donné un espace euclidien ou non euclidien, et dans cet espace une variété développable réelle à p dimensions, si l'hyperplan tangent à la variété dépend de q paramètres, l'hyperplan osculateur est au moins à* $p+q$ *dimensions, et, s'il est exactement à* $p+q$ *dimensions, on peut choisir les sommets* $A_{p+1}, \ldots, A_n$ *du système de référence de manière que* $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+q}$ *soient les carrés parfaits de q formes linéaires indépendantes en* $\omega_1, \ldots, \omega_p$, *les formes quadratiques* $\Phi_{p+q+1}, \ldots, \Phi_n$ *étant identiquement nulles.*

On peut énoncer ce théorème sous une autre forme :

Étant donnée, dans un espace euclidien ou non euclidien à *n dimensions, une variété développable réelle à p dimensions, si l'hyperplan osculateur est à $p+q \leqq 2p$ dimensions, l'hyperplan tangent dépend de q paramètres au plus, et s'il dépend exactement de q paramètres, on peut choisir les sommets* $A_{p+1}, \ldots, A_n$ *du système de référence de manière que* $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+q}$ *soient les carrés parfaits de q formes linéaires indépendantes,* $\Phi_{p+q+1}, \ldots, \Phi_n$ *étant identiquement nulles.*

34. Pour savoir quel est le degré de généralité des variétés développables précédentes, choisissons un système de référence, comme il a été expliqué au n° 13, en partant d'une forme quadratique absolue

$$\Omega = \frac{x^2}{C} + \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} a_{ij} x_i x_j + x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

avec $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres arbitraires a_{ij}. Les relations *identiques* qui existeront entre les expressions de Pfaff ω_i, ω_{i0}, ω_{ij} seront :

$$(40)\quad \begin{cases} \omega_{i0} + C\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\omega_k = 0 & (i = 1, \ldots, p), \\ \omega_{\alpha 0} + C\omega_\alpha = 0 & (\alpha = p+1, \ldots, n), \\ \omega_{i\alpha} + \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\omega_{\alpha k} = 0 & (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n), \\ \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0 & (\alpha, \beta = p+1, \ldots, n). \end{cases}$$

On pourra toujours supposer que les formes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+q}$ sont égales à $\omega_1^2, \ldots, \omega_q^2$, de sorte que, comme au n° 46, les variétés cherchées seront définies par le système de Pfaff (29). Les équations quadratiques extérieures dérivées sont encore les équations (30), mais les expressions secondaires

$$\omega_i, \quad \omega_{ji}, \quad \omega_{p+j,p+i}, \quad \omega_{ki}, \quad \omega_{p+i,p+q+\lambda}$$

ne sont plus indépendantes ; elles sont, d'après (40), liées par les relations

$$\omega_{p+i,p+j} + \omega_{p+j,p+i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, q).$$

D'après cela, si i et j sont deux quelconques des indices 1, 2, …, q, les expressions scondaires

$$\omega_{ij}, \ \omega_{ji} \qquad \text{et} \qquad \omega_{p+i,\,p+j} = -\,\omega_{p+j,\,p+i}$$

entrent dans deux et deux seulement des équations (30), à savoir

$$-[\omega_{i,p+i}\omega_{ji}]+[\omega_{j,p+j}\omega_{p+j,p+i}]=0,$$
$$-[\omega_{j,p+j}\omega_{ij}]-[\omega_{i,p+i}\omega_{p+j,p+i}]=0;$$

ces deux équations forment un système involutif avec

$$\sigma_1=2, \qquad \sigma_2=1.$$

Le système (29) est donc lui-même involutif, avec les valeurs

$$s_1=q(n-q), \qquad s_2=\frac{q(q-1)}{2}, \qquad s_3=\ldots=s_q=0.$$

Par conséquent, *les variétés développables réelles à p dimensions pour lesquelles l'hyperplan tangent dépend de $q \leqq p$ paramètres, le nombre de dimensions de l'hyperplan osculateur ayant la valeur minima $p+q$, dépendent de $\frac{q(q-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux arguments.*

Rappelons (n° 46) que les variétés non développables dont le réseau asymptotique appartient au même type projectif dépendent de $q(q-1)$ fonctions arbitraires de deux arguments.

Il y a exception pour $q=1$; mais alors toutes les variétés dont l'hyperplan tangent ne dépend que d'un paramètre sont développables; elles dépendent de $n-1$ fonctions arbitraires d'un argument et sont engendrées (n° 48) par les variétés planes à $p-1$ dimensions osculatrices à une courbe gauche. Ces variétés développables sont les seules qui existent lorsque $n=p+1$.

55. Étudions maintenant l'autre cas extrême. Supposons que l'hyperplan osculateur d'une variété développable réelle à p dimensions soit au nombre maximum $\frac{p(p+3)}{2}$ de dimensions. Choisissons un système de référence défini en partant de la forme quadratique absolue

$$\Omega=\frac{x^2}{C}+H(x_1,x_2,\ldots,x_p)+H'(x_{p+1},\ldots,x_n),$$

où H et H' sont deux formes quadratiques définies positives provisoirement arbitraires.

Les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du système de référence sont dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue; les sommets $A_1, \ldots, A_p$ seront choisis dans l'hyperplan tangent et les sommets $A_{p+1}, \ldots, A_n$ seront alors dans l'hyperplan normal. On pourra, en désignant par (ii), (ij) les $\frac{p(p+1)}{2}$ indices $p+1, \ldots, \frac{p(p+3)}{2}$, et par λ les indices suivants, supposer qu'on a

$$\Phi_{(ii)} = \omega_i^2, \qquad \Phi_{(ij)} = 2\omega_i\omega_j, \qquad \Phi_\lambda = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

La condition pour la variété d'être développable ne sera plus que les formes quadratiques $\Phi_{(ii)}$, $\Phi_{(ij)}$ soient extérieurement orthogonales, mais *qu'elles soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique* H'. Il résulte de là que cette forme H' n'est pas arbitraire; on trouve facilement que ses coefficients satisfont aux conditions

$$(41) \qquad \begin{cases} a_{(ii)(jj)} = a_{(ij)(ij)}, \\ a_{(ii)(jk)} = a_{(ij)(ik)}, \\ a_{(ij)(kl)} = a_{(ik)(jl)} = a_{(il)(jk)}. \end{cases}$$

56. Cela posé, les variétés cherchées seront les solutions du système de Pfaff:

$$(42) \qquad \begin{cases} \omega_{(ii)} = 0, & \omega_{(ij)} = 0, & \omega_\lambda = 0, \\ \omega_{i(ii)} = \omega_i, & \omega_{j(ii)} = 0, & \\ \omega_{i(ij)} = \omega_j, & \omega_{j(ij)} = \omega_i, & \omega_{k(ij)} = 0, \\ \omega_{i\lambda} = 0. & & \end{cases}$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées des équations (42) sont:

$$(43) \qquad \begin{cases} \Theta_{i(ii)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ii)(ii)} - 2\omega_{ii})] + \sum\limits_{k \neq i}^{k=1, \ldots, p} [\omega_k(\omega_{(ik)(ii)} - \omega_{ki})] = 0, \\ \Theta_{j(ii)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ij)(ii)} - \omega_{ji})] + \sum\limits_{k \neq i}^{k=1, \ldots, p} [\omega_k \omega_{(jk)(ii)}] = 0; \\ \Theta_{i(ij)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ii)(ij)} - 2\omega_{ij})] \\ \qquad + [\omega_j(\omega_{(ij)(ij)} - \omega_{ii} - \omega_{jj})] + \sum\limits_{k \neq i, j}^{k=1, \ldots, p} [\omega_k(\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj})] = 0, \\ \Theta_{k(ij)} \equiv [\omega_i(\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj})] \\ \qquad + [\omega_j(\omega_{(jk)(ij)} - \omega_{ki})] + \sum\limits_{k \neq i, j}^{k=1, \ldots, p} [\omega_k \omega_{(kl)(ij)}] = 0, \\ \Theta_{i\lambda} \equiv [\omega_i \omega_{(ii)\lambda}] + \sum\limits_{k \neq i}^{k=1, \ldots, p} [\omega_k \omega_{(ik)\lambda}] = 0. \end{cases}$$

Les expressions principales sont ici $\omega_1, \ldots, \omega_p$, et les expressions secondaires sont :

$$\omega_{(ii)(ii)}-2\omega_{ii},\quad \omega_{(ij)(ii)}-\omega_{ji},\quad \omega_{(jk)(ii)},\quad \omega_{(ii)(ij)}-2\omega_{ij},\quad \omega_{(ij)(ij)}-\omega_{ii}-\omega_{jj},$$
$$\omega_{(ik)(ij)}-\omega_{kj},\quad \omega_{(kl)(ij)},\quad \omega_{(ii)\lambda},\quad \omega_{(ij)\lambda};$$

mais *elles ne sont plus indépendantes*. En effet la forme Ω dépend d'un certain nombre de paramètres arbitraires, à savoir tous les coefficients de la forme H et ensuite tous les coefficients de la forme H′ *assujettis aux seules relations* (41). Par suite, les expressions ω_i, ω_{i0}, ω_{ij} sont liées (n° 13) par les relations *identiques* (10′) qui s'écrivent ici [en tenant compte de (42)] :

$$(44)\quad \begin{cases} \omega_{i0}+C\displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\omega_k = 0 & (i=1,2,\ldots,p), \\ \omega_{\alpha 0}=0, & (\alpha=p+1,\ldots,n), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\omega_{\alpha k}+\sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta}\omega_{i\beta}=0 & (i=1,\ldots,p;\ \alpha=p+1,\ldots,n); \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} A_{ij|ij}\equiv \displaystyle\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n}[a_{(ii)\alpha}\omega_{(jj)\alpha}+a_{(jj)\alpha}\omega_{(ii)\alpha}-2a_{(ij)\alpha}\omega_{(ij)\alpha}]=0, \\ A_{ij|ik}\equiv \displaystyle\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n}[a_{(ii)\alpha}\omega_{(jk)\alpha}+a_{(jk)\alpha}\omega_{(ii)\alpha}-a_{(ij)\alpha}\omega_{(ik)\alpha}-a_{(ik)\alpha}\omega_{(ij)\alpha}]=0, \\ A_{il|jk}\equiv \displaystyle\sum [a_{(ij)\alpha}\omega_{(kl)\alpha}+a_{(kl)\alpha}\omega_{(ij)\alpha}-a_{(ik)\alpha}\omega_{(jl)\alpha}-a_{(jl)\alpha}\omega_{(ik)\alpha}]=0. \end{cases}$$

Les identités (44) ne nous intéressent pas. Quant aux identités (45), elles expriment des relations entre les expressions secondaires du système (43) :

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{(ii)(ii)} &= \omega_{(ii)(ii)}-2\omega_{ii}, \\ \overline{\omega}_{(ij)(ii)} &= \omega_{(ij)(ii)}-\omega_{ji}, \\ \overline{\omega}_{(jk)(ii)} &= \omega_{(jk)(ii)}, \\ \overline{\omega}_{(ii)(ij)} &= \omega_{(ii)(ij)}-2\omega_{ij}, \\ \overline{\omega}_{(ij)(ij)} &= \omega_{(ij)(ij)}-\omega_{ii}-\omega_{jj}, \\ \overline{\omega}_{(ik)(ij)} &= \omega_{(ik)(ij)}-\omega_{kj}, \\ \overline{\omega}_{(kh)(ij)} &= \omega_{(kh)(ij)}, \\ \overline{\omega}_{(ii)\lambda} &= \omega_{(ii)\lambda}, \\ \overline{\omega}_{(ij)\lambda} &= \omega_{(ij)\lambda}. \end{aligned}$$

Désignons maintenant par $\chi_{(ij)\alpha}$ la combinaison linéaire des expressions secondaires $\overline{\omega}_{(ij)\beta}$ ($\beta = p+1, \ldots, n$) obtenue en prenant la demi-dérivée par rapport à la variable x_α de la forme quadratique K et en remplaçant dans cette demi-dérivée chaque variable x_β par $\overline{\omega}_{(ij)\beta}$. Comme le discriminant de H' n'est pas nul, les $n-p$ expressions $\chi_{(ij)\alpha}$, où $\alpha = p+1, \ldots, n$, sont des combinaisons indépendantes des expressions $\overline{\omega}_{(ij)\alpha}$.

Avec ces notations les relations (45) deviennent

$$(45') \quad \begin{cases} A_{ij|ij} \equiv \chi_{(ii)(jj)} + \chi_{(jj)(ii)} - 2\chi_{(ij)(ij)} = 0 & (i \neq j), \\ A_{ij|ik} \equiv \chi_{(ii)(jk)} + \chi_{(jk)(ii)} - \chi_{(ij)(ik)} - \chi_{(ik)(ij)} = 0 & (i \neq j;\ i \neq k), \\ A_{il|jk} \equiv \chi_{(ij)(kl)} + \chi_{(kl)(ij)} - \chi_{(ik)(jl)} - \chi_{(jl)(ik)} = 0 & (i \neq l;\ j \neq k), \end{cases}$$

et les équations quadratiques extérieures (43) peuvent également s'écrire

$$(43') \quad \overline{\theta}_{i\alpha} \equiv \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \chi_{(ik)\alpha}] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n).$$

57. Les expressions de Pfaff $A_{il|jk}$ ne sont pas toutes indépendantes ; si en effet les indices i, j, k, l sont distincts, on a l'identité

$$A_{ij|kl} + A_{ik|lj} + A_{il|jk} = 0.$$

D'autre part, on a évidemment

$$A_{ij|kl} = A_{kl|ij} = -A_{ji|kl} = -A_{ij|lk}.$$

Cela posé, on pourra toujours se borner à considérer les expressions $A_{ij|kl}$ pour lesquelles on a

$$i < j, \qquad k < l, \qquad j \leqq l,$$

et enfin on pourra aussi supposer $i \leqq k$, car si i était supérieur à k, l'équation

$$A_{ij|kl} = 0$$

serait une conséquence des équations

$$A_{ki|jl} = 0, \qquad A_{kj|il} = 0.$$

Nous dirons que l'expression $A_{ij|kl}$, où les indices i, j, k, l satisfont aux inégalités précédentes, est de *poids* j ; nous dirons de même que l'expression $\chi_{(ij)\alpha}$ où $i \leqq j$ est de ***poids*** i. Le poids de $A_{ij|kl}$ est le poids maximum des expressions χ qu'elle contient.

Cela posé, nous allons calculer pour les équations (43') les valeurs des nombres $s_1, \ldots, s_n$. Si les expressions $\chi_{(ij)\alpha}$ étaient toutes indépendantes, les expressions $\chi_{(ij)\alpha}$ pour lesquelles α a une valeur donnée n'entreraient que dans les p équations

$$\bar{\theta}_{1\alpha} = 0, \quad \ldots, \quad \bar{\theta}_{p\alpha} = 0;$$

or ces p équations formeraient un système involutif avec les valeurs

$$p, \quad p-1, \quad \ldots, \quad 2, 1$$

des caractères s_i. Le système total serait donc involutif avec les valeurs

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 \;\; = p(n-p), & \sigma_2 = (p-1)(n-p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_{p-1} = 2(n-p), & \sigma_p = n-p. \end{array}$$

Le système (43') conserve la même forme si l'on effectue sur les variables principales $\omega_1, \ldots, \omega_p$ une substitution linéaire quelconque ; on peut donc supposer que les p systèmes de valeurs

$$\begin{array}{lll} \xi_1, & \ldots, & \xi_p; \\ \xi'_1, & \ldots, & \xi'_p; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ \xi_1^{(p-1)}, & \ldots, & \xi_p^{(p-1)}, \end{array}$$

dont il est question au n° **28**, se réduisent à

$$\begin{array}{llll} 1, & 0, & \ldots, & 0; \\ 0, & 1, & \ldots, & 0; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ 0, & 0, & \ldots, & 1. \end{array}$$

Le nombre s_1 est alors le nombre des expressions $\chi_{(1i)\alpha}$ indépendantes, c'est-à-dire le nombre des expressions χ indépendantes de poids 1 ; le nombre $s_1 + s_2$ est le nombre des expressions indépendantes de poids 1 et 2, et ainsi de suite, le nombre $s_1 + s_2 + \ldots + s_h$ le nombre des expressions indépendantes de poids 1, 2, ..., h.

Or il y a en tout, d'après ce qui a été dit plus haut, respectivement

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_p$$

expressions χ de poids 1, 2, ..., p ; tout revient donc à calculer le nombre de relations indépendantes qui existent entre les expressions de poids 1, les expressions de poids 1 et 2, et ainsi de suite ; soient

$$\tau_1, \quad \tau_1+\tau_2, \quad \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_p$$

ces nombres. On aura

$$s_i = \sigma_i - \tau_i.$$

Cela posé, il n'y a aucune relation $A_{ij|kl}=0$ de poids 1, puisque $j>i\geqq 1$. Prenons celles qui sont de poids 2 :

$$A_{12|kl}=0 \qquad (k=1,\ l>k,\ l\geqq 2);$$

si dans ces relations on ne conserve que les expressions χ de poids 2, elles se réduisent à

$$\chi_{(2l)(11)}=0 \qquad (l=2,\ \ldots,\ p),$$
$$\chi_{(2l)(1k)}-\chi_{(2k)(1l)}=0 \qquad (k<l;\ k,\ l=2,\ \ldots,\ p);$$

elles sont évidemment indépendantes et sont au nombre de

$$p-1+\frac{(p-1)(p-2)}{2}=\frac{p(p-1)}{2}.$$

Si maintenant dans les relations de poids 3

$$A_{i3|kl}=0 \qquad (i=1,\ 2;\ k\geqq i,\ l\geqq 3,\ l>k),$$

on ne conserve que les expressions χ de poids 3, elles se réduisent à

$$\chi_{(3l)(ik)}=0 \qquad (i=1,\ 2;\ k=1,\ 2;\ i\leqq k;\ l\geqq 3),$$
$$\chi_{(3l)(ik)}-\chi_{(3k)(il)}=0 \qquad (i=1,\ 2;\ k<l;\ k,\ l=3,\ \ldots,p);$$

elles sont manifestement indépendantes et sont au nombre de

$$3(p-2)+2\frac{(p-2)(p-3)}{2}=2\frac{p(p-2)}{2}.$$

D'une manière générale si, dans les relations de poids j,

$$A_{ij|kl}=0 \qquad (i=1,\ \ldots,j-1;\ k\geqq i,\ l\geqq j,\ l>k),$$

on ne conserve que les expressions χ de poids j, elles se réduisent à

$$\chi_{(jl)(ik)}=0 \quad (i,k=1,\ 2,\ \ldots,j-1;\ i\leqq k;\ l=j,\ j+1,\ \ldots,p),$$
$$\chi_{(jl)(ik)}-\chi_{(jk)(il)}=0 \quad (i=1,2,\ldots,j-1;\ k<l;\ k,l=j,j+1,\ldots,p);$$

elles sont manifestement indépendantes et sont au nombre de

$$(p-j+1)\frac{(j-1)j}{2}+(j-1)\frac{(p-j+1)(p-j)}{2}$$
$$=p\frac{(j-1)(p-j+1)}{2}.$$

De ce qui précède il résulte que τ_1 est nul, que τ_2 est le nombre des expressions A de poids 2, d'une manière générale que τ_h est le nombre des expressions A de poids h :

$$\tau_1=0,\qquad \tau_2=\frac{p(p-1)}{2},\quad \ldots,\quad \tau_j=\frac{p(j-1)(p-j+1)}{2},\quad \ldots,$$
$$\tau_p=\frac{p(p-1)}{2}.$$

On aura finalement

$$s_1=\sigma_1-\tau_1=p(n-p),\qquad s_2=\sigma_2-\tau_2=(p-1)\left(n-\frac{3p}{2}\right),\quad \ldots,$$
$$s_j=\sigma_j-\tau_j=(p-j+1)\left(n-p\frac{j+1}{2}\right),\quad \ldots,$$
$$s_p=\sigma_p-\tau_p=n-\frac{p(p+1)}{2}.$$

58. Calculons maintenant le nombre des paramètres entrant dans la solution générale du système (43′). Si les expressions $\chi_{(ij)\alpha}$ étaient indépendantes, on aurait

$$\chi_{(ij)\alpha}=\sum_{k=1}^{k=p} c_{(ijk)\alpha}\,\omega_k,$$

où les coefficients $c_{(ijk)\alpha}$ sont arbitraires, avec la restriction que les trois indices i, j, k peuvent être échangés d'une manière quelconque; le nombre de ces paramètres serait

$$\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+p\sigma_p.$$

Or il est évident que les paramètres doivent satisfaire aux relations

$$(A_{ij\,|\,kh})_l\equiv c_{(ikl)(jh)}+c_{(jhl)(ik)}-c_{(ihl)(jk)}-c_{(jkl)(ih)}=0;$$

nous pouvons, d'après ce qui a été dit plus haut, toujours supposer

$$i<j,\qquad k<h;\qquad i\leqq k,\qquad j\leqq h;$$

mais nous pouvons toujours aussi supposer

$$l \leqq j.$$

En effet, on a les identités

$$(\mathrm{A}_{ij\,|\,kh})_l + (\mathrm{A}_{jl\,|\,kh})_i + (\mathrm{A}_{li\,|\,kh})_j = 0,$$
$$(\mathrm{A}_{ij\,|\,kh})_l + (\mathrm{A}_{ij\,|\,hl})_k + (\mathrm{A}_{ij\,|\,lk})_h = 0;$$

la dernière montre d'abord que si l est supérieur à h, la relation

$$(\mathrm{A}_{ij\,|\,kh})_l = 0$$

se ramène aux relations

$$(\mathrm{A}_{ij\,|\,hl})_k = 0, \qquad (\mathrm{A}_{ij\,|\,kl})_h = 0$$

pour lesquelles l'indice qui joue le rôle de l est inférieur à celui qui joue le rôle de h. On peut donc toujours supposer

$$l \leqq h.$$

Si maintenant l est supérieur à j, la relation

$$(\mathrm{A}_{ij\,|\,kh})_l = 0$$

se ramène aux relations

$$(\mathrm{A}_{jl\,|\,kh})_i = 0, \qquad \mathrm{A}_{(il\,|\,kh)j} = 0$$

dont la dernière satisfait aux conditions voulues et la première y satisfait aussi si $j \leqq k$; si j était supérieur à k, c'est-à-dire si l'on avait

$$i \leqq k < j < l < h,$$

cette première relation serait une conséquence des relations

$$(\mathrm{A}_{kj\,|\,lh})_i = 0, \qquad (\mathrm{A}_{kl\,|\,jh})_i = 0$$

qui satisfont elles-mêmes à toutes les conditions voulues.

Finalement, nous n'avons à considérer que les relations

$$(\mathrm{A}_{ij\,|\,kh})_l = 0$$

pour lesquelles on a

$$i < j, \qquad k < h, \qquad i \leqq k, \qquad j \leqq h, \qquad l \leqq j.$$

Nous dirons qu'une telle relation est de *poids* l. Si de même nous appelons *poids* du coefficient $c_{(ijk)\alpha}$ le plus petit des indices i, j, k, nous voyons que le poids de $(A_{ij|kh})_l$ est le plus grand des poids des coefficients c qui y figurent.

Cela posé, considérons d'abord les relations $(A_{ij|kh})_l = 0$ de poids 1 ; on les déduit des relations entre les expressions χ en remplaçant $\chi_{(ij)\alpha}$ par $c_{1(ij)\alpha}$; il y en a donc autant que de relations entre les χ, c'est-à-dire

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_p.$$

Prenons maintenant les relations $(A_{ij|kh})_2 = 0$ de poids 2 ; si dans ces relations nous ne conservons que les coefficients c de poids 2, elles se déduisent des relations $A_{ij|kl} = 0$ de poids supérieur ou égal à 2, où l'on aurait enlevé les expressions χ de poids 1 et où l'on aurait remplacé toutes les autres expressions $\chi_{(ij)\alpha}$ par $c_{2ij)\alpha}$; il en résulte que les relations $(A_{ij|kh})_2 = 0$ sont toutes indépendantes entre elles et indépendantes de celles de poids 1 et que leur nombre est

$$\tau_2 + \ldots + \tau_p.$$

Le raisonnement peut être continué et l'on voit finalement que les coefficients c sont liés par

$$\tau_1 + 2\tau_2 + \ldots + p\tau_p$$

relations indépendantes. Le nombre des paramètres c indépendants est donc

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + p\sigma_p - (\tau_1 + 2\tau_2 + \ldots + p\tau_p) = s_1 + 2s_2 + \ldots + ps_p.$$

Le système de Pfaff (42) *est donc en involution et les variétés cherchées, qui sont les variétés développables à p dimensions les plus générales de l'espace à n dimensions, dépendent de*

$$s_p = n - \frac{p(p+1)}{2}$$

fonctions arbitraires de p arguments.

59. On peut remarquer que la discussion précédente revient à celle du système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

$$\frac{\partial^2 z_{(ij)}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 z_{(kl)}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 z_{(ik)}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 z_{(jl)}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

aux $n-p$ fonctions inconnues $z_{(ij)}$, z_λ des p variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$. Si l'on fait abstraction des fonctions z_λ, la solution générale du système précédent dépend, d'après ce qu'on a trouvé, de p fonctions arbitraires de p arguments. Ce système contient

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_p = \frac{p^2(p^2-1)}{12}$$

équations à $\frac{p(p+1)}{2}$ fonctions inconnues.

60. *Les variétés développables à p dimensions dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres.* — Nous nous proposons maintenant de déterminer les variétés développables dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $p + \frac{q(q+1)}{2}$ de dimensions. Nous supposons naturellement $q > 1$, car le cas $q = 1$ a déjà été étudié (n^{os} 48 et 54).

Nous avons vu au n° 47 que les variétés à p dimensions dont l'hyperplan tangent ne dépend que de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur est à $p + \frac{q(q+1)}{2}$ dimensions contiennent une variété plane fixe (H) à $p - q - 1$ dimensions. Nous pouvons, comme au n° 47, supposer

$$\Phi_{(ii)} = \omega_i^2, \qquad \Phi_{(ij)} = 2\omega_i\omega_j \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, q)$$

avec

$$(46) \quad \begin{cases} \omega_{i(ii)} = \omega_i, & \omega_{i(ij)} = \omega_j, & \omega_{i\lambda} = 0 & (i, j = 1, 2, \ldots, q), \\ \omega_{l(ii)} = 0, & \omega_{l(ij)} = 0, & \omega_{l\lambda} = 0 & (l = q+1, \ldots, p). \end{cases}$$

Prenons d'autre part dans la variété plane fixe (H) $p - q$ points fixes $B_{q+1}, \ldots, B_p$ et choisissons $p - q$ coefficients $u_{q+1}, \ldots, u_p$ tels que les points

$$B_{q+1} - u_{q+1}A, \quad \ldots, \quad B_p - u_p A$$

soient dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue (ou soient des vecteurs dans l'espace euclidien) ; on pourra choisir ces points comme points $A_{q+1}, \ldots, A_p$. La variété cherchée devra donc satisfaire à la condition que les points

$$A_l + u_l A \qquad (l = q+1, \ldots, p)$$

soient fixes. Cela donne

$$(47) \qquad \begin{cases} du_l + \omega_{l0} = 0, \\ \omega_{li} + u_l \omega_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ \omega_{lm} + u_l \omega_m = 0 & (m = q+1, \ldots, p). \end{cases}$$

Finalement, les variétés cherchées sont les solutions du système de Pfaff formé par les équations (46), (47) et

$$(48) \qquad \omega_{(ii)} = 0, \qquad \omega_{(ij)} = 0, \qquad \omega_\lambda = 0.$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées de ce système se réduisent aux équations (43), mais où les indices i, j, k ne prennent que les valeurs $1, 2, \ldots, q$. On arrive donc à la conclusion que *les variétés cherchées dépendent de*

$$n - p - \frac{q(q-1)}{2}$$

fonctions arbitraires de q arguments.

61. Nous avons vu au n° **21** que si $p = 3$, un système quelconque de formes quadratiques réelles linéairement indépendantes extérieurement orthogonales se ramème toujours par une substitution orthogonale à un système de formes carrés parfaits.

Supposons d'une manière générale qu'avec un système de référence normal, les formes asymptotiques linéairement indépendantes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+r}$ soient les carrés parfaits de $n-p$ formes linéaires $\Omega_{p+1}, \ldots, \Omega_{p+r}$ en $\omega_1, \ldots, \omega_p$, les formes $\Phi_{p+r+1}, \ldots, \Phi_n$ étant identiquement nulles.

Chacune des variétés planes tangentes

$$\Omega_{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_{p+r} = 0$$

est une variété plane tangente *distinguée*. Quand le point A se déplace d'une manière quelconque sur la variété, l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin le point

$$x\,A + x_{p+1}A_{p+1} + \ldots + x_n A_n$$

si le point

$$x\,dA + x_{p+1}\,dA_{p+1} + \ldots + x_n\,dA_n$$

appartient à l'hyperplan normal; on voit facilement ainsi que l'hyperplan normal admet comme variété plane caractéristique la variété plane $[A_{p+r+1}\ldots A'_n]$. La variété plane normale $[AA_{p+1}\ldots A_{p+r}]$, qui est l'intersection de l'hyperplan normal et de l'hyperplan osculateur, peut s'appeler l'*hyperplan normal principal.*

Cela posé, lorsque le point A se déplace tangentiellement à la variété plane tangente distinguée $\Omega_\alpha = 0$, l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin le point A_α de l'hyperplan normal principal. Ce point A_α est dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue (ou est un vecteur, si l'espace est euclidien). On peut l'appeler le centre de courbure principal relatif à la variété plane tangente distinguée considérée.

L'hypothèse faite revient donc à admettre *l'existence dans l'hyperplan normal principal à r dimensions de r centres de courbure principaux conjugués entre eux et conjugués de* A *par rapport à la quadrique absolue.*

Cette propriété appartient à toutes les variétés développables réelles à moins de quatre dimensions, et aussi à toutes les variétés développables réelles dont l'hyperplan tangent dépend d'un nombre quelconque $q \leqq p$ de paramètres, l'hyperplan osculateur n'étant pas à plus de $p+q$ dimensions.

CHAPITRE VI.

LES VARIÉTÉS D'UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE DONT LE ds^2 EST ÉGALEMENT A COURBURE CONSTANTE, MAIS DIFFÉRENTE DE CELLE DE L'ESPACE.

62. Nous allons nous placer maintenant dans un espace non euclidien de courbure **C** et chercher dans cet espace les variétés à p dimensions dont le ds^2 est de courbure constante **c**, c'est-à-dire dont le ds^2 est celui d'un espace à p dimensions de courbure **c**.

Conservons le point de vue du nº 30. Les variétés cherchées sont celles pour lesquelles le système de Pfaff

$$\theta_1 = \omega_1, \quad \ldots, \quad \theta_p = \omega_p$$

est compatible ; il entraîne comme conséquence les équations

$$\theta_{ij} = \omega_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p);$$

mais ici on a

$$\theta'_{ij} = -\mathbf{c}\,[\theta_i \theta_j] + \sum_{k=1}^{k=p} [\theta_{ik}\theta_{kj}],$$

$$\omega'_{ij} = -\mathbf{C}\,[\omega_i \omega_j] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_{ik}\omega_{kj}].$$

On en déduit la condition nécessaire et suffisante exprimée par les relations

$$(\mathbf{C} - \mathbf{c})[\omega_i \omega_j] + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha}\omega_{j\alpha}] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces relations sont encore vraies si l'espace donné est euclidien ; il suffit alors d'y faire $\mathbf{C} = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété à p dimensions d'un espace de courbure $\mathbf{C}$ *ait son* ds^2 *de courbure constante* $\mathbf{c}$ *est que le* ds^2 *de la variété et les composantes normales* $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$ *du vecteur* d^2A *soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique*

$$(\mathbf{C} - \mathbf{c})\,u^2 + u_{p+1}^2 + \ldots + u_n^2.$$

Considérons la projection sur l'hyperplan normal à la variété en A, du point $d^2A + \mathbf{c}A$. On a

$$dA = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_p A_p,$$

$$d^2A = (\omega_1\omega_{10} + \ldots + \omega_p\omega_{p0})A + \Phi_{p+1}A_{p+1} + \ldots + \Phi_n A_n + \ldots,$$

les termes non écrits ne dépendant que de $A_1, \ldots, A_p$; or

$$\omega_1\omega_{10} + \ldots + \omega_p\omega_{p0} = -\mathbf{C}\,(\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2) = -\mathbf{C}\,\Phi\,;$$

donc

$$\text{proj.}(d^2A + c\, ds^2 A) = (c - C)\Phi A + \Phi_{p+1}A_{p+1} + \ldots + \Phi_n A_n.$$

Les composantes de cette projection par rapport aux points $A, A_{p+1}, \ldots, A_n$ sont

$$(c - C)\Phi, \quad \Phi_{p+1}, \quad \ldots, \quad \Phi_n.$$

La condition pour que la variété soit de courbure constante c *est que ces* $n - p + 1$ *composantes soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique*

$$\frac{x^2}{C - c} + x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2,$$

c'est-à-dire par rapport à la forme quadratique qui exprime la puissance du point $(x, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *de l'hyperplan normal par rapport à l'hypersphère de centre* A *et de rayon réduit* $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

Cet énoncé nous permet immédiatement de voir ce que devient la condition quand on choisit un système de référence quelconque.

Remarquons avant d'aller plus loin que le réseau linéaire

$$\lambda\Phi + \lambda_{p+1}\Phi_{p+1} + \ldots + \lambda_n\Phi_n = 0$$

qui s'introduit maintenant comprend, outre les cônes du réseau asymptotique, le *cône isotrope;* on peut lui donner le nom de *réseau asymptotico-isotrope.*

63. Nous sommes conduit à considérer les systèmes de référence introduits au n° **14** et caractérisés :

1° Par la forme linéaire K qui indique la masse relative d'un point quelconque M par rapport au point-unité A ;

2° Par la forme quadratique H qui représente la puissance d'un point quelconque M par rapport à l'hypersphère de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

Nous supposerons les points $A_1, \ldots, A_p$ dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue, et par suite de masse relative nulle; la forme H sera également la somme d'une forme quadratique en $x_1, \ldots, x_p$ et d'une forme quadratique en $x_{p+1}, \ldots, x_{n+1}$:

$$(49)\qquad \begin{cases} K(x) = c_{p+1}x_{p+1} + \ldots + c_{n+1}x_{n+1}, \\ H(x) = \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} a_{ij}x_i x_j + \sum_{\alpha,\beta}^{p+1,\ldots,n+1} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta. \end{cases}$$

Les coordonnées $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ du point A sont données par

$$(50)\qquad \begin{cases} a_{p+1,p+1}\xi_{p+1} + \ldots + a_{p+1,n+1}\xi_{n+1} = \dfrac{1}{C-c}c_{p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n+1,p+1}\xi_{p+1} + \ldots + a_{n+1,n+1}\xi_{n+1} = \dfrac{1}{C-c}c_{n+1}, \\ c_{p+1}\xi_{p+1} \qquad + \ldots + c_{n+1}\xi_{n+1} \qquad = 1. \end{cases}$$

64. Nous avons introduit, au n° **15**, $(n+1)(n+2)$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij} liées par les relations (12), (13), (14). Les covariants bilinéaires de ces expressions s'obtiennent facilement par le procédé appliqué au n° **33**; on trouve

$$(51)\qquad \begin{cases} \omega_i' = \sum_{k=1}^{k=n+1} [\omega_k \omega_{ki}], \\ \omega_{ij}' = \sum_{k=1}^{k=n+1} [\omega_{ik}\omega_{kj}]. \end{cases}$$

Posons encore

$$\chi_i = \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik}\omega_k;$$

on a

$$\chi_i = A_i \mid dA$$

et, par suite,

$$(52)\qquad \chi_i' = [dA_i \mid dA] = \sum_{k=1}^{k=n+1} [\omega_{ik}A_k \mid dA] = \sum_{k=1}^{k=n+1} [\omega_{ik}\chi_k].$$

65. Les identités (12), (13), (14) et (15) se réduisent ici à

(53) $$c_{p+1}\omega_{p+1}+\ldots+c_{n+1}\omega_{n+1}=0;$$

(54) $$\left\{\begin{array}{ll} \omega_i = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} \xi_\lambda \omega_{\lambda i} & (i=1,2,\ldots,p), \\ d\xi_\alpha = -\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} \xi_\lambda \omega_{\lambda\alpha} & (\alpha=p+1,\ldots,n+1); \end{array}\right.$$

(55) $$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} c_\lambda \omega_{i\lambda} + \mathrm{C}\chi_i = 0 & (i=1,\ldots,p), \\ dc_\alpha = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} c_\lambda \omega_{\alpha\lambda} + \mathrm{C}\chi_\alpha & (\alpha=p+1,\ldots,n+1); \end{array}\right.$$

(56) $$\left\{\begin{array}{l} da_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} (a_{ik}\omega_{jk} + a_{jk}\omega_{ik}) \qquad (i,j=1,\ldots,p), \\ 0 = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\omega_{\alpha k} + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} a_{\alpha\lambda}\omega_{i\lambda} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{C}-\mathrm{c}} c_\alpha \chi_i \\ \qquad (i=1,\ldots,p;\ \alpha=p+1,\ldots,n+1), \\ da_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} (a_{\alpha\lambda}\omega_{\beta\lambda} + a_{\beta\lambda}\omega_{\alpha\lambda}) + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{C}-\mathrm{c}}(c_\alpha\chi_\beta + c_\beta\chi_\alpha) \\ \qquad (\alpha,\beta=p+1,\ldots,n+1). \end{array}\right.$$

Rappelons que les relations (54) sont des conséquences des relations (53), (55), (56) et que les relations (55) sont des conséquences des relations (53), (54), (56).

66. Prenons maintenant une variété à p dimensions lieu d'un point A et choisissons $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ dans l'hyperplan tangent; $\mathrm{A}_{p+1}, \ldots, \mathrm{A}_{n+1}$ seront dans l'hyperplan normal. On aura les équations

$$\omega_{p+1}=0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{n+1}=0$$

qui, d'après (53), se réduisent à $n-p$. Les équations quadratiques extérieures qui en dérivent sont

$$\sum_{k=1}^{k=p}[\omega_k\omega_{k\alpha}]=0 \qquad (\alpha=p+1,\ldots,n+1);$$

elles expriment que $\omega_{i\alpha}$ est la demi-dérivée par rapport à ω_i d'une certaine forme quadratique. Posons, d'autre part,

$$d^2 A + \mathbf{c}\, ds^2 A = \Phi_{p+1} A_{p+1} + \ldots + \Phi_{n+1} A_{n+1} + \ldots,$$

les termes non écrits dépendant de $A_1, \ldots, A_p$; on voit qu'on a

$$\Phi_\alpha = \sum_{k=1}^{k=p} \omega_k \omega_{k\alpha} + \mathbf{c}\, \xi_\alpha \Phi,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} = \omega_{i\alpha} + \mathbf{c}\, \xi_\alpha \gamma_i.$$

Nous poserons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} = \varpi_{i\alpha} = \omega_{i\alpha} + \mathbf{c}\, \xi_\alpha \gamma_i ;$$

un calcul facile donne

$$(57) \qquad \begin{cases} \varpi'_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_{ik} \varpi_{k\alpha}] + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} [\varpi_{i\lambda} \omega_{\lambda\alpha}] \\ (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n+1). \end{cases}$$

L'introduction de ces expressions $\varpi_{i\alpha}$ simplifie les secondes relations (56) qui deviennent

$$(56') \quad 0 = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_{\alpha k} + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} a_{\alpha\lambda} \varpi_{i\lambda} \quad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n+1).$$

La masse relative par rapport à A du point $d^2 A + \mathbf{c}\, ds^2 A$ est, d'après la valeur trouvée au n° **62**, égale à $(\mathbf{c} - \mathbf{C})\Phi$; on a donc l'identité

$$(58) \qquad (\mathbf{c} - \mathbf{C})\Phi = c_{p+1}\Phi_{p+1} + \ldots + c_{n+1}\Phi_{n+1} ;$$

cette identité résulte du reste des premières identités (54) multipliées par ω_i et sommées par rapport à i.

67. On peut interpréter géométriquement les formes quadratiques Φ_α. Considérons une courbe tracée sur la variété ; on a

$$\frac{d^2 A}{ds^2} = -\mathbf{C}\, A + \frac{1}{\rho} I,$$

en désignant par $\frac{1}{\rho}$ la courbure de la courbe et par I un point tel que $\mathrm{I}|\mathrm{I} = 1$ et situé dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue ; par suite,

$$d^2 \mathrm{A} + \mathbf{c}\, ds^2 \mathrm{A} = (\mathbf{c} - \mathbf{C})\, ds^2 \mathrm{A} + \frac{ds^2}{\rho} \mathrm{I} = (\mathbf{c} - \mathbf{C})\, ds^2 \left(\mathrm{A} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{C}} \mathrm{I} \right).$$

Il résulte de là que *les formes Φ_α sont les coordonnées du point, de masse relative $(\mathbf{c} - \mathbf{C})\, ds^2$, obtenu en portant à partir de* A, *sur la projection normale de la normale principale à la courbe, une longueur réduite égale à la courbure normale multipliée par* $\frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{C}}$.

On peut également interpréter le nombre des formes Φ_α linéairement indépendantes. Supposons, ce qui est permis, que les formes

$$\Phi_{p+1}, \quad \ldots, \quad \Phi_{p+r}$$

soient linéairement indépendantes, les formes $\Phi_{p+r+1}, \ldots, \Phi_{n+1}$ étant identiquement nulles. Cherchons la caractéristique de l'hyperplan normal quand le point A se déplace d'une manière quelconque sur la variété. Le point

$$x_{p+1} \mathrm{A}_{p+1} + \ldots + x_{n+1} \mathrm{A}_{n+1}$$

appartiendra à cette caractéristique si l'on a identiquement, quel que soit $k = 1, \ldots, p$,

$$\sum_{\lambda = p+1}^{\lambda = n+1} x_\lambda \omega_{\lambda k} = 0 ;$$

multiplions toutes ces équations par a_{ik} et sommons par rapport à k ; nous aurons, en tenant compte de (56'),

$$\sum_{\lambda = p+1}^{\lambda = n+1} \sum_{\mu = p+1}^{\mu = n+1} a_{\lambda\mu} x_\lambda \varpi_{i\mu} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Désignons par $u_{p+1}, \ldots, u_{n+1}$ les coordonnées tangentielles de l'hyperplan polaire du point $(x_{p+1}, \ldots, x_{n+1})$ par rapport à l'hypersphère de centre A et de rayon $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{c} - \mathbf{C}}}$; les équations précédentes se réduiront à

$$\sum_{\mu = p+1}^{\mu = n+1} u_\mu \varpi_{i\mu} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

et elles expriment que la forme quadratique $\Sigma u_\mu \Phi_\mu$ est identiquement nulle ; par suite, elles se réduisent à

$$u_{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad u_{p+r} = 0.$$

Il résulte de là que *la variété plane caractéristique de l'hyperplan normal est la variété plane polaire de* $[A_{p+1} \ldots A_{p+r}]$ *par rapport à l'hypersphère de centre* A *et de rayon* $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{c} - \mathbf{C}}}$.
En particulier, *cette caractéristique est à* $n - p - r$ *dimensions*.

On a naturellement $n + 1 \geqq p + r$. Si $n + 1 = p + r$, le nombre $n - p - r$ est égal à 1 et l'hyperplan normal n'a pas d'enveloppe ; si $n \geqq p + r$, il a une enveloppe.

68. Supposons maintenant que le point A, au lieu de se déplacer d'une manière quelconque sur la variété, se déplace tangentiellement à une variété plane tangente à $p - 1$ dimensions, $\omega_1 = 0$ par exemple. Cherchons dans quel cas l'hyperplan normal peut avoir en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin un point qui n'appartienne pas à la caractéristique qui vient d'être déterminée. Si l'on considère l'hyperplan polaire $(u_{p+1}, \ldots, u_{n+1})$ de ce point par rapport à l'hypersphère (Σ), l'une au moins de ses coordonnées $u_{p+1}, \ldots, u_{p+r}$ ne sera pas nulle et la forme quadratique $\Sigma u_\mu \Phi_\mu$ aura ses dérivées partielles nulles quand on y fera $\omega_1 = 0$; par suite, cette forme quadratique sera, à un facteur constant près, égale à ω_1^2, c'est-à-dire un carré parfait. La variété $\omega_1 = 0$ sera dite alors une variété plane *tangente principale* et l'on pourra donner le nom de *centre de courbure principal* correspondant à l'un des points que l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin quand le point A se déplace le long de la variété plane tangente principale.

On choisira par exemple le point situé dans la variété plane

$$[A_{p+1} \ldots A_{p+r}] ;$$

ce point est bien déterminé si l'hypersphère (Σ) est de rayon purement imaginaire ($\mathbf{c} < \mathbf{C}$) parce qu'alors deux variétés planes polaires réelles n'ont aucun point réel commun.

69. *Les variétés réelles de courbure* $\mathbf{c} < \mathbf{C}$ *dont le réseau*

asymptotico-isotrope est d'ordre minimum. — Prenons maintenant une variété à p dimensions de courbure constante $\mathbf{c}$ inférieure à la courbure $\mathbf{C}$ de l'espace. La forme quadratique H par rapport à laquelle les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées est définie positive; d'autre part, la forme $\Phi = ds^2$, qui en est une combinaison linéaire, ne peut s'exprimer en fonction de moins de p variables. Il résulte alors du théorème général du n° **20** que parmi les $n+1-p$ formes Φ_α il y en a au moins p linéairement indépendantes et, s'il y en a exactement p, on peut les supposer carrés parfaits.

Par conséquent, *si une variété réelle à p dimensions a une courbure constante* $\mathbf{c}$ *inférieure à la courbure* $\mathbf{C}$ *de l'espace, le nombre n des dimensions de cet espace est au moins égal à* $2p-1$. *Si* $n \geqq 2p$, *la caractéristique de son hyperplan normal est au plus à* $n-2p$ *dimensions et, si elle est exactement à* $n-2p$ *dimensions, la variété admet en chaque point p variétés planes tangentes principales n'ayant d'autre point commun que le point* A.

Supposons que la caractéristique de l'hyperplan normal ait exactement $n-2p$ dimensions. On pourra alors supposer

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2, \quad \ldots, \quad \Phi_{2p} = \omega_p^2, \quad \Phi_{2p+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_{n+1} = 0.$$

Le centre de courbure principal correspondant à la variété plane tangente principale $\omega_1 = 0$ est l'intersection de l'hyperplan $[A_{p+1} \ldots A_{2p}]$ et de la variété plane polaire de $[A_{p+2} \ldots A_{2p}]$, puisqu'on a pour ce point

$$u_{p+2} = 0, \quad \ldots, \quad u_{2p} = 0.$$

Or si l'on exprime que les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme H, on trouve que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ de cette forme satisfont aux relations

$$a_{p+i,\,p+j} = 0 \qquad (i \neq j; \quad i, j \leqq 1, 2, \ldots, p);$$

par suite, le centre de courbure principal cherché est le point A_{p+1} qui est en effet conjugué par rapport à chacun des points A_{p+2}, ..., A_{2p}.

Il résulte de là que *les p centres de courbure principaux correspondant aux p variétés planes tangentes principales* *sont conjugués deux à deux par rapport à l'hypersphère* (Σ) *de centre* A *et de rayon réduit* $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

Réciproquement, supposons que la caractéristique de l'hyperplan normal d'une variété donnée à p dimensions soit à $n - 2p$ dimensions, que la variété admette p variétés planes tangentes principales et que les p centres de courbure correspondants soient conjugués par rapport à l'hypersphère (Σ) de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

On sait que si p points réels distincts sont conjugués par rapport à une quadrique sans points réels, ils ne sont pas dans une même variété plane à $p - 1$ dimensions. On peut donc prendre les p centres de courbure principaux pour sommets $A_{p+1}, \ldots, A_{2p}$. Or A_{p+1} est l'intersection de l'hyperplan $[A_{p+1} \ldots A_{2p}]$ et de la variété plane polaire de $[A_{p+2} \ldots A_{2p}]$; donc la forme quadratique carré parfait qui correspond au centre de courbure principal A_{p+1} est la forme Φ_{p+1}; donc les p formes linéairement indépendantes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{2p}$ sont des carrés parfaits de formes linéaires nécessairement indépendantes :

$$\Phi_{p+i} = \omega_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On voit immédiatement que les points $A_{p+1}, \ldots, A_{2p}$ étant conjugués par rapport à (Σ), on a, pour la forme H,

$$a_{p+i, p+j} = 0 \qquad (i \neq j; \quad i, j = 1, \ldots, p);$$

et que par suite *les formes* Φ_α *sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme* H. La variété est donc de courbure constante c.

On peut ajouter la remarque importante que si, pour une variété à p dimensions, la caractéristique de l'hyperplan normal est à $n - 2p$ dimensions et si la variété admet p variétés planes tangentes principales n'ayant d'autre point commun que A, *ces variétés sont rectangulaires entre elles.* Cela résulte de ce que la forme ds^2 est une combinaison linéaire des carrés de p formes linéaires qui, égalées à zéro, définissent les p variétés planes tangentes principales.

70. Nous avons vu (n° 67) que les formes Φ_α sont les coordonnées du point de masse relative $(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2$, obtenu en portant à partir de A une longueur réduite égale (en direction, grandeur et sens) à la courbure normale $\frac{1}{\rho_n}$ multipliée par $\frac{1}{\mathbf{c}-\mathbf{C}}$. Par conséquent $\frac{1}{\mathbf{c}-\mathbf{C}}\,\frac{1}{\rho_n}$ est la distance réduite au point A du point H de l'hyperplan normal dont les coordonnées sont $\frac{\Phi_\alpha}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2}$. Dans les variétés étudiées dans le numéro précédent, on a

$$\Phi_{p+i}=\omega_i^2,\qquad \frac{\Phi_{p+i}}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2}=\frac{\omega_i^2}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2};$$

ces coordonnées sont donc proportionnelles aux carrés des cosinus directeurs de la tangente par rapport aux p tangentes principales; les coefficients de proportionnalité sont faciles à obtenir, puisqu'on a [formule (58)]

$$1=\frac{c_{p+1}\,\omega_1^2}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2}+\ldots+\frac{c_{2p}\,\omega_p^2}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2};$$

les p termes du second membre sont évidemment les carrés des cosinus directeurs; ce sont les masses relatives des p points $\frac{\omega_i^2}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})\,ds^2}A_{p+i}$ dont le point H est le barycentre.

Par conséquent, *la courbure normale d'une courbe quelconque tracée sur la variété s'obtient en multipliant par* $\mathbf{c}-\mathbf{C}$ *la distance réduite au point* A *du barycentre des p centres de courbure principaux, chacun d'eux étant affecté d'une masse relative égale au carré du cosinus directeur correspondant de la tangente à la courbe.*

Dans le cas de l'espace euclidien, la masse relative devient la masse ordinaire.

71. ***Le système différentiel qui définit les variétés de courbure constante*** $\mathbf{c}$ ***dont le réseau asymptotico-isotrope appartient à un type projectif donné.*** — **Considérons un réseau linéaire de cônes du second ordre appartenant à un type projectif donné; nous supposerons naturellement que l'un au moins des cônes du réseau est sans points réels (autres que son sommet). Donnons-nous les cônes de base de ce réseau, c'est-à-dire les formes linéairement indépendantes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+r}$,** en simplifiant autant que possible leurs coefficients soit par un choix convenable des variables, soit par un choix convenable des cônes de base. Les formes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+r}$ pourront alors dépendre d'un certain nombre m de paramètres arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Nous ferons usage d'un système de référence de la nature de ceux envisagés au n° 63, les coefficients c_α, a_{ij}, $a_{\alpha\beta}$ des formes K et H qui le caractérisent étant uniquement assujettis :

1° A la condition qu'on ait l'identité

$$(\mathbf{c} - \mathbf{C}) \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} a_{ij}\omega_i\omega_j = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+r} c_\lambda \Phi_\lambda;$$

2° A la condition que les formes $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_{p+r}, \Phi_{p+r+1} = 0, \ldots, \Phi_{n+1} = 0$ soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme

$$\sum_{\alpha,\beta}^{p+1,\ldots,n+1} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta.$$

Cela posé, les équations de Pfaff qui définissent les variétés cherchées sont

$$(59)\quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{p+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{n+1} = 0, \\ \varpi_{i\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n+1). \end{array} \right.$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées, si l'on pose

$$\Phi_\alpha = \sum_{i,j}^{1,\ldots,p} u_{ij\alpha}\omega_i\omega_j \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n+1),$$

sont

$$(60)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{i\alpha} \equiv \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p} \left[\omega_j \left(du_{ij\alpha} - \sum_{k=1}^{k=p} (u_{ik\alpha}\omega_{jk} + u_{jk\alpha}\omega_{ik}) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} u_{ij\lambda}\omega_{\lambda\alpha} \right) \right] = 0 \\ \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n+1). \end{array} \right.$$

Les expressions de Pfaff principales sont ici $\omega_1, \ldots, \omega_p$; les expressions de Pfaff secondaires sont

$$\chi_{ij\alpha} = \chi_{ji\alpha} = du_{ij\alpha} - \sum_{k=1}^{k=p} (u_{ik\alpha}\omega_{jk} + u_{jk\alpha}\omega_{ik}) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} u_{ij\lambda}\omega_{\lambda\alpha};$$

ce sont des combinaisons linéaires de $du_1, \ldots, du_m$ et des expressions

$$\omega_{ij}, \quad \omega_{\alpha\beta}$$
$$(i, j = 1, \ldots, p; \ \alpha = p+1, \ldots, p+r; \ \beta = p+1, \ldots, n+1).$$

Pour savoir quelles relations identiques existent entre ces expressions du_i, ω_{ij}, $\omega_{\alpha\beta}$, revenons aux identités (53), (54), (55) entre lesquelles nous devons éliminer les différentielles des paramètres (autres que $u_1, \ldots, u_m$) qui entrent dans les expressions des c_α, a_{ij}, $a_{\alpha\beta}$. Or, les premières identités (55) sont déjà vérifiées d'elles-mêmes d'après la condition 1° énoncée tout à l'heure. Les secondes relations (56) s'écrivent [formules (56')]

$$(56')\qquad \left\{\begin{array}{l} 0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}\omega_{\alpha k} + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+r} a_{\alpha\lambda}\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial\omega_i} = 0 \\ (i = 1, \ldots, p; \ \alpha = p+1, \ldots, n+1). \end{array}\right.$$

Il faudra ajouter à ces identités :

1° Celles qu'on obtient en différentiant les relations

$$(\mathbf{c} - \mathbf{C})a_{ij} = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} c_\lambda u_{ij\lambda} \qquad (i, j = 1, \ldots, p)$$

et tenant compte des valeurs des différentielles da_{ij}, dc_λ, données par les formules (55) et (56);

2° Celles qu'on obtient d'une manière analogue en différentiant les relations linéaires entre les $a_{\alpha\beta}$ qui expriment que les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme $\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$.

Ces dernières identités dépendent essentiellement du type projectif donné pour le réseau asymptotico-isotrope. Calculons donc celles qui correspondent aux conditions 1°. Elles donnent, comme on le vérifie sans peine,

$$(61)\qquad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n+1} c_\alpha\chi_{ij\alpha} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, p),$$

où les $\chi_{ij\alpha}$ sont les expressions de Pfaff secondaires.

Remarquons du reste que les identités (56') ne fournissent aucune relation entre les expressions secondaires. Comme celles qui résultent des conditions 2° ne font manifestement pas intervenir les expressions $\omega_{\alpha i}$, *on peut donc, tant qu'il ne s'agit que de décider si le système* (59) *est en involution et, dans l'affirmative, quel est le degré de généralité de ses solutions, faire abstraction de ces identités* (56').

72. Appliquons ce qui précède aux variétés considérées aux nos 69 et 70, autrement dit aux variétés dont le réseau asymptotico-isotrope appartient au type projectif

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \ldots + \lambda_p \omega_p^2 = 0.$$

Les équations (59) se réduisent ici à

$$(59)\qquad \begin{cases} \omega_\alpha = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n+1), \\ \varpi_{i,p+i} = \omega_i, \qquad \varphi_{i,p+j} = 0, \qquad \varpi_{i,2p+k} = 0 \\ (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, n+1-2p). \end{cases}$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées sont

$$(60)\qquad \begin{cases} \theta_{i,p+i} \equiv [\omega_i(\omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{ii})] - \sum\limits_{j \neq i}^{j=1,\ldots,p} [\omega_j \omega_{ji}] = 0, \\ \theta_{i,p+j} \equiv [\omega_i \omega_{p+i,p+j}] - [\omega_j \omega_{ij}] = 0, \\ \theta_{i,2p+k} \equiv [\omega_i \omega_{p+i,2p+k}] = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{gathered} \chi_{i,i,p+i} = \omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{ii}, \qquad \chi_{i,i,p+k} = \omega_{p+i,p+k}, \\ \chi_{i,j,p+i} = -\omega_{ji}, \qquad \chi_{i,j,p+k} = 0 \\ (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, n+1-p). \end{gathered}$$

Les identités (61) sont ici

$$(61)\qquad \begin{cases} c_{p+i}(\omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{ii}) + \sum\limits_{k \neq i}^{k=1,\ldots,n+1-p} c_{p+k}\,\omega_{p+i,p+k} = 0, \\ c_{p+i}\,\omega_{ji} + c_{p+j}\,\omega_{ij} = 0. \end{cases}$$

Quant aux identités résultant des conditions 2°, elles s'obtiennent en exprimant que les coefficients $a_{p+i,p+j}$ sont nuls, ce qui donne

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} & a_{p+i,p+i}\,\omega_{p+j,p+i} + a_{p+j,p+j}\,\omega_{p+i,p+j} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{k=n+1-2p} (a_{p+i,2p+k}\,\omega_{p+j,2p+k} + a_{p+j,2p+k}\,\omega_{p+i,2p+k}) = 0 \\ & \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Cela posé, les relations (61) montrent qu'on peut, pour chaque valeur de i, faire abstraction de l'une des $n+1-p$ équations

$$\Theta_{i,p+1} = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_{i,n+1} = 0;$$

nous choisirons l'équation $\Theta_{i,p+i} = 0$. Les seules expressions secondaires qui restent sont

$$\omega_{ij}, \quad \omega_{p+i,\lambda} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, n+1-p$$

Posons

$$\chi_{p+i,p+j} = a_{p+j,p+j}\,\omega_{p+i,p+j} + \sum_{k=1}^{k=n+1-2p} a_{p+j,2p+k}\,\omega_{p+i,2p+k}.$$

On peut mettre celles des équations (60) qui subsistent sous la forme

$$(60')\quad \left\{ \begin{aligned} & \overline{\Theta}_{i,p+j} \equiv [\omega_i \chi_{p+i,p+j}] - a_{p+j,p+j}[\omega_j \omega_{ij}] = 0, \\ & \overline{\Theta}_{i,2p+k} \equiv [\omega_i \omega_{p+i,2p+k}] = 0, \end{aligned} \right.$$

avec les identités

$$(61')\qquad c_{p+i}\,\omega_{ji} + c_{p+j}\,\omega_{ij} = 0,$$

$$(62')\qquad \chi_{p+i,p+j} + \chi_{p+j,p+i} = 0.$$

L'expression $\omega_{p+i,2p+k}$ n'entre que dans l'équation $\Theta_{i,2p+k} = 0$ qui est involutive avec $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_p = 0$. Les expressions ω_{ij}, ω_{ji}, $\chi_{p+i,p+j}$, $\chi_{p+j,p+i}$ n'entrent que dans les deux équations $\overline{\Theta}_{i,p+j} = 0$, $\overline{\Theta}_{j,p+i} = 0$, et ces quatre expressions sont liées par deux relations (61'), (62'); il en résulte facilement que les deux équations sont involutives avec $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_p = 0$. Par suite le système (59) est en involution avec

$$s_1 = p(n+1-2p) + p(p-1) = p(n-p), \qquad s_2 = \ldots = s_p = 0.$$

Les variétés cherchées dépendent de $p(n-p)$ fonctions *arbitraires d'un argument.* Si $n = 2p - 1$, ce nombre est égal à $p(p-1)$. Donc *dans l'espace à $2p-1$ dimensions de courbure constante* $\mathbf{C}$, *les variétés à p dimensions de courbure constante* $\mathbf{c} < \mathbf{C}$ *dépendent de $p(p-1)$ fonctions arbitraires d'un argument.*

Les *caractéristiques* sont les variétés à $p-1$ dimensions obtenues en exprimant que les s_1 équations

$$\omega_i \chi_{p+i,p+j} - a_{p+j,p+j}\,\omega_j\,\omega_{ij} = 0,$$
$$\omega_i\,\omega_{p+i,2p+k} = 0$$

aux inconnues $\chi_{p+i,p+j}$, ω_{ij}, $\omega_{p+i,2p+k}$ se réduisent à un moindre nombre. On trouve ainsi s_1 familles de caractéristiques, à savoir les p familles $(n+1-2p)$-uples

$$\omega_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et les $p(p-1)$ familles simples

$$\frac{a_{p+i,p+i}}{c_{p+i}}\,\omega_i^2 = \frac{a_{p+j,p+j}}{c_{p+j}}\,\omega_j^2 \qquad (i \neq j\,;\ i, j = 1, \ldots, p).$$

Ces dernières sont *réelles*, puisque les coefficients $a_{p+i,p+i}$, $-c_{p+i}$ sont manifestement positifs. Les premières n'existent pas si $n = 2p-1$; ce sont les *variétés principales* à $n-1$ dimensions. *Quant aux autres, elles sont liées aux courbes de courbure normale minimum;* en effet, si l'on pose $\omega_i = \alpha_i\,ds$, la courbure normale est, à un facteur constant près, la distance réduite au point A du point de coordonnées

$$\frac{1}{\mathbf{c}-\mathbf{C}}\,\frac{\Phi_{p+i}}{ds^2} = \frac{\alpha_i^2}{\mathbf{c}-\mathbf{C}}$$

Or, si l est cette distance réduite, on a

$$l^2 - \frac{1}{\mathbf{c}-\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^{i=p} a_{p+i,p+i}\,\frac{\alpha_i^4}{(\mathbf{c}-\mathbf{C})^2}$$

avec

$$\mathbf{c} - \mathbf{C} = c_{p+1}\alpha_1^2 + \ldots + c_{2p}\alpha_p^2;$$

le minimum de l est donné par les équations

$$\frac{a_{p+1,p+1}}{c_{p+1}}\,\alpha_1^2 = \frac{a_{p+2,p+2}}{c_{p+2}}\,\alpha_2^2 = \ldots = \frac{a_{2p}}{c_{2p}}\,\alpha_p^2.$$

Supposons par exemple $p = 3$, $n = 5$; les centres de courbure A_4, A_5, A_6 forment dans le plan normal un triangle conjugué par rapport à la circonférence de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$. Si l'on représente une courbe par le point H barycentre des trois sommets A_4, A_5, A_6 affectés de masses relatives égales aux carrés des cosinus directeurs de la tangente à la courbe, *les surfaces caractéristiques sont représentées par les hauteurs du triangle* $A_4A_5A_6$, hauteurs qui passent par A; le point A lui-même représente quatre lignes asymptotiques dont les tangentes sont symétriques deux à deux par rapport aux trois tangentes principales. Les six familles de surfaces caractéristiques se partagent en trois couples de deux, deux surfaces du même couple se coupant suivant une ligne de courbure, deux surfaces de couples différents suivant une ligne asymptotique.

73. En général, si n est quelconque, le point A n'appartient pas à l'hyperplan $[A_{p+1} \ldots A_{2p}]$ qui contient les p centres de courbure principaux, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas en général de lignes asymptotiques, puisque la courbure normale ne peut être nulle que si le barycentre des points $A_{p+1}, \ldots, A_{2p}$ affectés de masses convenables est en A. Cherchons toutes les variétés pour lesquelles le point A est dans l'hyperplan $[A_{p+1} \ldots A_{2p}]$. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait

$$\xi_{2p+1} = \ldots = \xi_{n+1} = 0.$$

Nous choisirons donc un système de référence qui, outre les conditions énoncées plus haut, satisfasse aux conditions précédentes. D'après les formules (53), ces conditions nouvelles introduisent entre les $\omega_{\alpha\beta}$ les relations identiques nouvelles

$$(63) \qquad \sum_{k=1}^{i=p} \xi_{p+i}\, \omega_{p+i,\, 2p+k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n + 1 - 2p).$$

Comme, d'après (60), $\omega_{p+i, 2p+k}$ ne dépend que de ω_i et qu'aucune des coordonnées ξ_{p+i} n'est nulle, il en résulte qu'il faut ajouter aux équations (59) les équations

$$\omega_{p+i,\, 2p+k} = 0.$$

Par conséquent, la variété plane $|A_1 A_2 \ldots A_{2p}|$ est fixe et *les variétés cherchées n'existent en somme que dans l'espace à* $2p-1$ *dimensions; elles dépendent de* $p(p-1)$ *fonctions arbitraires d'un argument.*

74. ***Le système différentiel qui définit dans l'espace de courbure constante* C *à* n *dimensions les variétés à* p *dimensions de courbure constante* c *dont le réseau asymptotico-isotrope est d'ordre maximum.*** — Prenons maintenant le cas extrême où le réseau asymptotico-isotrope est d'ordre maximum $\frac{p(p+1)}{2}$, avec naturellement

$$n+1 \geqq \frac{p(p+3)}{2}.$$

Le système de Pfaff qui définit les variétés cherchées peut être supposé formé des équations

$$(64)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \omega_{p+1}=0, & \ldots, & \omega_n=0; \\ \varpi_{i(ii)}=\omega_i, & \varpi_{j(ii)}=0; & \\ \varpi_{i(ij)}=\omega_j, & \varpi_{j(ij)}=\omega_i, & \varpi_{k(ij)}=0; \\ \varpi_{i\lambda}=0, & & \end{array}\right.$$

où l'on a employé des notations analogues à celles des nos 55 et suivants. Les équations quadratiques extérieures dérivées sont identiques aux équations (43). Les expressions secondaires $\overline{\omega}_{(ij)\alpha}$ sont liées :

1° Par les relations

$$(65)\qquad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n+1} c_\alpha \overline{\omega}_{(ij)\alpha}=0 \qquad (i, j=1, 2, \ldots, p);$$

2° Par les relations déjà établies (45). Si l'on pose, comme au n° 56,

$$\chi_{(ij)\alpha}=\sum_{\beta=p+1}^{\beta=n+1} a_{\alpha\beta}\,\omega_{(ij)\beta},$$

les relations qui lient les expressions secondaires $\chi_{(ij)\alpha}$ deviennent :

1° Les relations

(65′) $$B_{ij} \equiv \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n+1} \xi_\alpha \chi_{(ij)\alpha} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, p);$$

2° Les relations déjà établies

(45′) $$A_{il\,|\,jk} \equiv \chi_{(ij)(kl)} + \chi_{(kl)(ij)} - \chi_{(ik)(jl)} - \chi_{(jl)(ik)} = 0.$$

Les équations quadratiques extérieures à considérer sont

(43′) $$\overline{\theta}_{i\alpha} \equiv \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \chi_{(ik)\alpha}] = 0.$$

Cela posé, remarquons d'abord que si toutes les coordonnées ξ_λ sont nulles, on peut toujours effectuer une substitution linéaire sur $\omega_1, \ldots, \omega_p$ de manière à ne pas avoir

$$\xi_{(pp)} = 0;$$

en effet, si l'on pose

$$\overline{\omega}_i = l_{i1}\omega_1 + \ldots + l_{ip}\omega_p \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

on aura

$$\sum \overline{\omega}_i \overline{\omega}_j \overline{A}_{(ij)} = \sum \omega_i \omega_j A_{(ij)},$$

d'où

$$A_{(ij)} = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{h=1}^{h=p} l_{ik} l_{jh} \overline{A}_{(kh)};$$

par suite,

$$\sum \xi_{(ij)} l_{ik} l_{jh} \overline{A}_{kh} = \sum \overline{\xi}_{(kh)} \overline{A}_{(kh)},$$

d'où

$$\overline{\xi}_{(kh)} = \sum_{i,j} \xi_{(ij)} l_{ik} l_{jh}.$$

La nouvelle coordonnée $\overline{\xi}_{(pp)}$ ne pourrait être nulle quels que soient les coefficients de la substitution que si toutes les coordonnées $\xi_{(ij)}$ étaient nulles, ce qui est impossible, le point A ne pouvant avoir toutes ses coordonnées nulles.

Ce point étant admis, nous définirons comme au n° 57 le poids des expressions secondaires $\xi_{(ij)\alpha}$ et le poids des expressions $A_{ij\,|\,kl}$; quant au premier membre B_{ij} de l'équation (65′), son poids sera par définition le plus petit des deux indices i et j. Il existe alors entre les expressions secondaires de poids 1 les p relations

$$B_{1i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

qui sont manifestement indépendantes. Quant aux relations

$$B_{2i} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, p),$$

elles introduisent entre les expressions secondaires de poids 1 et 2 des relations nouvelles en nombre $p - 1$, indépendantes des relations $A_{ij|kl} = 0$ de poids 2, car ces dernières ne contenaient pas les expressions $\chi_{(2i)(pp)}$, tandis que les relations $B_{2i} = 0$ sont résolubles par rapport à ces expressions. On peut continuer ainsi de proche en proche. Des valeurs trouvées au n° 57 pour $s_1, s_2, \ldots, s_p$ on déduit les nouvelles valeurs relatives au nouveau système de Pfaff en changeant n en $n+1$ et en retranchant $p - i + 1$ de s_i; on constate alors tout de suite que *les valeurs des s_i ne sont pas changées.*

Quant au nombre des paramètres rentrant dans la solution générale du nouveau système (43′), un raisonnement identique à celui qui est fait plus haut montre qu'il n'est pas altéré non plus. Par suite, *le système de Pfaff* (64) *est en involution et les variétés cherchées dépendent de $n - \frac{p(p+1)}{2}$ fonctions arbitraires de p arguments.*

75. *Les variétés réelles à p dimensions de courbure constante $\mathbf{c} > \mathbf{C}$ et pour lesquelles la caractéristique de l'hyperplan normal est à $n - p - 1$ dimensions.* — Si la courbure $\mathbf{c}$ est supérieure à $\mathbf{C}$, le théorème du n° 69 tombe en défaut et le réseau asymptotico-isotrope peut être d'un ordre quelconque. Étudions le cas extrême où il est d'ordre 1, c'est-à-dire où l'hyperplan normal admet une variété plane caractéristique à $n - p - 1$ dimensions. On aura ici

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_p^2, \qquad \Phi_{p+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{n+1} = 0.$$

Les variétés seront définies par le système de Pfaff :

$$(65) \qquad \begin{cases} \omega_{p+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_{n+1} = 0, \\ \overline{\varpi}_{i,p+1} = \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \\ \overline{\varpi}_{i,p+k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, n+1-p). \end{cases}$$

Le système quadratique extérieur dérivé est

$$(66)\quad \begin{cases} \Theta_{i,p+1} \equiv [\omega_i(\omega_{p+1,p+1} - 2\omega_{ii})] - \sum\limits_{j\neq i}^{j=1,\ldots,p} [\omega_j(\omega_{ij}+\omega_{ji})] = 0, \\ \Theta_{i,p+k} \equiv [\omega_i \omega_{p+1,p+k}] = 0. \end{cases}$$

Les identités (61) deviennent ici

$$(67)\quad \begin{cases} c_{p+1}(\omega_{p+1,p+1} - 2\omega_{ii}) + \sum\limits_{k=1}^{k=n+1-p} c_{p+k}\omega_{p+1,p+k} = 0, \\ c_{p+1}(\omega_{ij}+\omega_{ji}) = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p). \end{cases}$$

Quant aux autres identités, elles résultent des relations qui expriment que les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$; ces relations se réduisent à

$$a_{p+1,p+1} = 0,$$

qui donne lieu à l'identité

$$(68)\quad \sum_{k=1}^{k=n+1-p} a_{p+1,p+k}\,\omega_{p+1,p+k} = 0.$$

Les identités (67) montrent que l'on peut faire abstraction des équations $\Theta_{i,p+1} = 0$; il ne reste alors comme expressions secondaires que les expressions $\omega_{p+1,p+k}$; mais ces expressions, d'après les équations $\Theta_{i,p+k} = 0$, doivent manifestement être nulles. Si nous ajoutons aux équations (65) les équations

$$(69)\quad \omega_{p+1,p+k} \doteq 0,$$

qui, d'après (68), se réduisent à $n-p$ indépendantes, on constate sans difficulté que le *nouveau système de Pfaff obtenu est complètement intégrable.*

On voit du reste, en se servant des identités (56'), que le point A_{p+1} est fixe, et comme il est sur l'hypersphère de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - \mathbf{C}}}$, il est à une distance constante du point A. D'autre part, l'hyperplan $[AA_1 \ldots A_p A_{p+1}]$ est fixe; donc la *variété cherchée est, dans un espace à $p+1$ dimensions de courbure* $\mathbf{C}$, *une hypersphère de rayon réduit* $\frac{1}{\sqrt{c - \mathbf{C}}}$.

76. Les variétés, réelles ou imaginaires, de courbure **C** dans l'espace à $p+1 \geqq 4$ dimensions rentrent dans le cas précédent. On peut, en effet, toujours ramener la forme $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ à $2 x_{p+1} x_{p+2}$. L'une au moins des deux formes Φ_{p+1} et Φ_{p+2}, dont le ds^2 est une combinaison linéaire, est réductible à une somme de $q \geqq 2$ carrés indépendants, soit

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_q^2 ;$$

en exprimant alors que Φ_{p+1} et Φ_{p+2} sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme $2 x_{p+1} x_{p+2}$, on trouve que Φ_{p+2} est identiquement nulle si $q = p$, et qu'elle ne dépend que de $\omega_1, \ldots, \omega_q$ si $q < p$; mais ce dernier cas est impossible, car le ds^2 ne pourrait être une combinaison linéaire de Φ_{p+1}, Φ_{p+2}. On est donc nécessairement ramené au cas du n° 75, où il y a une seule forme Φ indépendante.

77. *Les points de Beltrami. Les variétés dont tous les points sont des points de Beltrami.* — Nous avons vu au n° 62 que si une variété à p dimensions située dans un espace à n dimensions de courbure constante **C** est elle-même à courbure constante, les formes quadratiques $\Phi_{p+1}, \ldots, \Phi_n$, calculées par rapport à un système de référence normal, jouissent de la propriété que l'on a en chaque point de la variété

$$\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_j} \right] = \lambda [\omega_i \omega_j] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

où λ désigne un coefficient convenablement choisi. Nous dirons qu'un point d'une variété est un *point de Beltrami* si les formes quadratiques asymptotiques relatives à ce point satisfont à la condition précédente.

Il est facile de voir que *si tous les points d'une variété à $p \geqq 3$ dimensions sont des points de Beltrami, la variété est de courbure constante*, c'est-à-dire que le coefficient λ est le même en tous les points de la variété.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons la notion de *covariant trilinéaire*. Étant donnée une expression quadratique extérieure de la forme

$$\Omega = \sum_{(ij)} a_{ij}[dx_i\, dx_j],$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions des n variables $x_1, \ldots, x_n$, on appelle « covariant trilinéaire de Ω » l'expression cubique extérieure

$$\Omega' = \sum_{(ij)} [da_{ij}\, dx_i\, dx_j],$$

où le produit extérieur de trois facteurs change de signe quand on échange deux des facteurs entre eux.

Si l'on effectue un changement de variables tel qu'on ait l'identité

$$\sum a_{ij}[dx_i\, dx_j] = \sum b_{ij}[dy_i\, dy_j],$$

on aura également l'identité

$$\sum [da_{ij}\, dx_i\, dx_j] = \sum [db_{ij}\, dy_i\, dy_j].$$

Si ω et ϖ sont deux expressions de Pfaff quelconques, m un coefficient fonction de $x_1, \ldots, x_n$, le covariant trilinéaire de l'expression $m\,[\omega\varpi]$ est

$$[dm\, \omega\varpi] + m[\omega'\varpi] - m[\omega\varpi'].$$

Cela posé, partons de la relation

$$\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha}\omega_{j\alpha}] = \lambda[\omega_i\omega_j]$$

et prenons les covariants trilinéaires des deux membres en utilisant les formules (39) et en se servant du fait que $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ sont nulles. On aura

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{k=p}\ \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{ik}\,\omega_{k\alpha}\,\omega_{j\alpha}] - \sum_{k=1}^{k=p}\ \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha}\,\omega_{jk}\,\omega_{k\alpha}] \\
&\quad + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n}\ \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} [\omega_{i\beta}\,\omega_{\beta\alpha}\,\omega_{j\alpha}] - \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n}\ \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} [\omega_{i\alpha}\,\omega_{j\beta}\,\omega_{\beta\alpha}] \\
&= [d\lambda\, \omega_i\omega_j] + \lambda \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k\,\omega_{ki}\,\omega_j] - \lambda \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_i\,\omega_k\,\omega_{kj}].
\end{aligned}$$

Remplaçons dans la première somme du premier membre $\sum_\alpha [\omega_{k\alpha}\omega_{j\alpha}]$ par $\lambda\,[\omega_k\omega_j]$, dans la seconde somme $\sum_\alpha [\omega_{i\alpha}\omega_{k\alpha}]$ par $\lambda[\omega_i\omega_k]$, et remarquons enfin que la troisième et la quatrième somme se détruisent en échangeant dans l'une d'elles les deux indices de sommation α et β; nous en déduisons immédiatement

$$[d\lambda\,\omega_i\,\omega_j] = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, p).$$

Cette relation montre que $d\lambda$ est une combinaison linéaire de ω_i et de ω_j; comme on suppose $p \geqq 3$, cela n'est possible que si $d\lambda$ est identiquement nul. La variété est donc de courbure constante.