Bulletin de la S. M. F.

J. Pérès

Sur les transformations qui conservent la composition

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 16-37
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__16_1>

SUR LES TRANSFORMATIONS QUI CONSERVENT LA COMPOSITION;

PAR M. JOSEPH PÉRÈS.

I. — INTRODUCTION.

1. J'ai déjà indiqué quelques-uns des résultats que je me propose de développer ici dans trois Notes des *Comptes rendus* (¹). Je désigne ici ces Notes par les abréviations [A], [B], [C].

Soit une fonction du premier ordre, $F(x, y)$, que l'on peut toujours supposer mise sous forme canonique

$$F(x, x) = 1, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=x} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=x} = 0;$$

on sait que toutes les fonctions permutables avec elle sont données par la formule

$$\lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi;\, x, y)\, d\xi, \tag{1}$$

où $\lambda(y - x)$ est arbitraire. L'ensemble des fonctions permutables avec F résulte donc de l'ensemble des fonctions d'une variable $y - x$ par la transformation (1) que nous noterons $\Omega(\lambda)$.

J'ai déjà indiqué [C] que Φ n'est pas entièrement déterminé par la donnée de F, mais contient une fonction arbitraire de deux variables. Il est alors possible de lui imposer la condition suivante, très importante pour l'étude ultérieure des fonctions permutables :

La transformation (1) *conserve la composition*, en d'autres

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 166, p. 723, 806 et 939. Pour les quelques notations et propriétés de la théorie des fonctions permutables, que j'utiliserai ici, je renvoie aussi à ma Thèse (*Journal de Mathématiques*, 1916).

termes, *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu) = \overset{*}{\Omega}(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}). \tag{2}$$

Pour achever de déterminer Φ, on peut ajouter à la condition (2) la suivante :

$$F(x, y) = \Omega(1). \tag{3}$$

On verra dans la Note [C] comment les conditions (2) et (3) permettent de déterminer Φ. Le développement des résultats de cette Note et diverses applications de ces résultats doivent être publiés dans les *Annales de l'École Normale* (¹).

Dans ce qui suit, on trouvera d'autres applications des transformations Ω qui conservent la composition. Mais, auparavant, je reviendrai sur la recherche de ces transformations dans le cas, particulièrement simple, où la fonction F dépend de la seule variable $y - x$, c'est-à-dire est permutable avec l'unité : la méthode de la Note [C] se simplifie alors notablement, comme on le verra ; je traiterai aussi ce cas par d'autres méthodes, toutes différentes.

Revenant ensuite au cas général, je montrerai comment l'emploi des transformations Ω conduit immédiatement à deux résultats récents de M. Volterra sur l'allure asymptotique du noyau résolvant d'une équation intégrale à limites variables. On en déduit une relation fort simple entre les solutions des équations de Volterra de première et deuxième espèce.

Enfin, dans la dernière partie de ce travail, j'appliquerai les transformations Ω à l'étude des familles de fonctions déduites des fonctions

$$1,\quad t,\quad \frac{t^2}{2!},\quad \ldots,\quad \frac{t^n}{n!},\quad \ldots$$

et

$$1,\quad \cos t,\quad \sin t,\quad \ldots,\quad \cos nt,\quad \sin nt,\quad \ldots$$

par une transformation de Volterra.

II. — Les transformations Ω dans le cas où F est permutable avec l'unité.

2. On sait ([C], [M]) que la condition (2) entraîne pour Φ

(¹) Quand j'aurai, par la suite, à renvoyer à ce travail, je le désignerai par [M].

l'équation fonctionnelle

$$(4)\qquad \Phi(\tau+\eta\,;\,x,y)=\Phi(\tau\,;\,\eta+x,y)+\Phi(\eta\,;\,x,y-\tau)+\int_{x+\eta}^{y-\tau}\Phi(\eta\,;\,x,\zeta)\,\Phi(\tau\,;\,\zeta,y)\,d\zeta.$$

Dans le cas où F est permutable avec l'unité, toutes les fonctions permutables avec elle sont les fonctions d'une seule variable $y-x$. On peut alors, dans la formule (1), prendre pour Φ une fonction quelconque des deux variables ξ, $y-x$. L'équation (4) donne, dans ces conditions,

$$(4')\qquad \Phi(\tau+\eta\,;\,y-x)=\Phi(\tau\,;\,y-x-\eta)+\Phi(\eta\,;\,y-\tau-x)+\int_{x+\eta}^{y-\tau}\Phi(\eta\,;\,\zeta-x)\,\Phi(\tau\,;\,y-\zeta)\,d\zeta$$

ou, en posant

$$\Phi(\tau\,;\,y-x)=\Psi(\tau\,;\,y-x-\tau),$$

$$\Psi(\tau+\eta\,;\,y-x-\tau-\eta)=\Psi(\tau\,;\,y-x-\tau-\eta)+\Psi(\eta\,;\,y-x-\tau-\eta)+\int_{x+\eta}^{y-\tau}\Psi(\eta\,;\,\zeta-x-\eta)\,\Psi(\tau\,;\,y-\zeta-\tau)\,d\zeta$$

ou, en remplaçant $y-\tau$ par y, $x+\eta$ par x,

$$(5)\qquad \Psi(\tau+\eta\,;\,y-x)=\Psi(\tau\,;\,y-x)+\Psi(\eta\,;\,y-x)+\int_{x}^{y}\Psi(\eta\,;\,\zeta-x)\,\Psi(\tau\,;\,y-\zeta)\,d\zeta,$$

M. Volterra a déjà considéré, dans la résolution du problème de la sphère élastique avec hérédité [1], une équation qui contient celle-ci comme cas particulier. Il a formé sa solution générale, qui est ici :

$$\Psi(\tau\,;\,y-x)=\sum_{1}^{\infty}{}_n\,\frac{\tau^n}{n!}\overset{*}{g}{}^n(y-x)\ [2],$$

$g(y-x)$ étant une fonction arbitraire.

L'équation (4′) étant ainsi résolue, il est aisé de déterminer g de façon que

$$F(y-x)=\Omega(1).$$

---

[1] *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 127, th. II.

[2] Cette formule résulte aussi, comme cas particulier, de celle que j'ai indiquée ([C], [M]), pour résoudre l'équation plus générale (4).

En effet,

$$\Omega(1) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \int_0^t \frac{\tau^n}{n!} \overset{*}{g}{}^n(t-\tau)\,d\tau = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \overset{*}{1}{}^{n+1} \overset{*}{g}{}^n(t) \quad (^1).$$

Mais si F″ est la dérivée seconde de F par rapport à t, on a [2]

$$F = 1 + \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{F}{}'' = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \overset{*}{1}{}^{n+1} \overset{*}{g}{}^n(t),$$

d'où

$$F'' = g + \overset{*}{1} \overset{*}{g}{}^2 + \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{g}{}^3 + \ldots,$$

d'où

$$g = \overset{*}{F}{}'' - \overset{*}{1} \overset{*}{F}{}''^2 + \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{F}{}''^3 - \ldots.$$

3. On peut employer, dans le même cas particulier, bien d'autres méthodes. En voici une, qui nous conduira à une autre forme du noyau $\Phi(\xi; y - x)$ [3].

Remarquons d'abord que si la transformation Ω vérifie les deux conditions (2) et (3), on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = \Omega(1), \\ \overset{*}{F}{}^2(x, y) = \Omega(\overset{*}{1}{}^2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overset{*}{F}{}^n(x, y) = \Omega(\overset{*}{1}{}^n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Inversement, si Φ vérifie les conditions (6), elle satisfait aussi à la formule (2) quand λ et μ sont des polynomes en t [4], donc aussi, puisque l'on peut approcher de toute fonction continue par des polynomes, dans le cas général. Le problème précédent est donc équivalent à celui de la résolution des équations (6).

4. Dans le cas des fonctions permutables avec l'unité, ces

(1) Nous posons $t = y - x$.
(2) F étant sous forme canonique.
(3) *Cf* [A], [B].
(4) C'est-à-dire de forme $a_0 \overset{*}{I} + a_1 \overset{*}{I}{}^2 + \ldots + a_n \overset{*}{I}{}^n$.

équations s'écrivent

$$(7)\quad \begin{cases} F(t) = 1 + \int_0^t \Phi(\tau, t)\, d\tau, \\ \overset{*}{F}{}^2(t) = t + \int_0^t \tau\, \Phi(\tau, t)\, d\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \overset{*}{F}{}^{n+1}(t) = \frac{t^n}{n!} + \int_0^t \frac{\tau^n}{n!}\, \Phi(\tau, t)\, d\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et voici comment on peut déterminer $\Phi(\tau, t)$ directement.

Puisque F est mis sous forme canonique, on peut écrire

$$(8)\qquad F(t) = 1 + \int_0^t \Phi(\tau, t)\, d\tau$$

avec

$$\Phi(\tau, t) = \overset{*}{1}\, \overset{*}{F}{}''(t - \tau);$$

mais on peut, sans que la formule (8) cesse d'avoir lieu, ajouter à Φ la fonction

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}[\tau\, \psi(t - \tau)]$$

avec $\psi(0) = 0$. Choisissons ψ de façon à vérifier la deuxième des équations (7)

$$(9)\qquad \overset{*}{F}{}^2 = \overset{*}{1}{}^2 + \int_0^t \tau\, \Phi(\tau, t)\, d\tau$$

qui s'écrit

$$(\overset{*}{1} + \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{F}{}'')^2 = \overset{*}{1}{}^2 + \int_0^t \tau . \overset{*}{1}\, \overset{*}{F}{}''(t - \tau)\, d\tau - \int_0^t \tau \frac{\partial}{\partial\tau} \tau\, \psi(t - \tau)\, d\tau,$$

d'où, après intégration par parties du dernier terme,

$$\overset{*}{1}{}^3 \overset{*}{F}{}'' + \overset{*}{1}{}^4 \overset{*}{F}{}''^2 = \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{\psi}$$

ou

$$\psi = \overset{*}{1}\, \overset{*}{F}{}'' + \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{F}{}''^2.$$

On peut maintenant, sans modifier (8) et (9), ajouter à la fonction Φ précédente l'expression

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\frac{\tau^2}{2!}\psi_1(t - \tau)\right],$$

ψ_1 admettant $(t-\tau)^2$ en facteur, et choisir ψ_1 de manière à vérifier l'équation

$$(10) \qquad \overset{*}{\mathrm{F}}{}^3 = \overset{*}{1}{}^3 + \int_0^t \frac{\tau^2}{2!}\Phi(\tau, t)\, d\tau;$$

un calcul simple donne

$$\psi_1 = \overset{*}{1}{}^2 \overset{*}{\mathrm{F}}{}''^2 + \overset{*}{1}{}^3 \overset{*}{\mathrm{F}}{}''^3.$$

On arrivera ainsi, par corrections successives de $\Phi(\tau, t)$, à satisfaire à toutes les équations (7). La loi de formation des divers termes correctifs est évidente et l'on obtient

$$(11) \qquad \begin{aligned} \Phi(\tau, t) = {} & \overset{*}{1}\overset{*}{\mathrm{F}}{}''(t-\tau) - \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\tau}{1!}[\overset{*}{1}\ \overset{*}{\mathrm{F}}{}''\ (t-\tau) + \overset{*}{1}{}^2\ \overset{*}{\mathrm{F}}{}''^2\ (t-\tau)]\right\} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left\{\frac{\tau^2}{2!}[\overset{*}{1}{}^2\ \overset{*}{\mathrm{F}}{}''^2(t-\tau) + \overset{*}{1}{}^3\ \overset{*}{\mathrm{F}}{}''^3\ (t-\tau)]\right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\left\{\frac{\tau^n}{n!}[\overset{*}{1}{}^n\ \overset{*}{\mathrm{F}}{}''^n(t-\tau) + \overset{*}{1}{}^{n+1}\overset{*}{\mathrm{F}}{}''^{n+1}(t-\tau)]\right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

la série précédente converge et un calcul analogue aux précédents permet de vérifier qu'elle répond bien à la question [1].

5. Les équations (7) conduisent à envisager les familles de fonctions données par les formules

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f_0(t) = 1 + \int_0^t \Phi(\tau, t)\, d\tau, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & f_n(t) = \frac{t^n}{n!} + \int_0^t \frac{\tau^n}{n!}\Phi(\tau, t)\, d\tau, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Dans certains cas, leur étude est très simple. Si, par exemple, le noyau $\Phi(\tau, t)$ admet un développement convergent $\sum \mathrm{A}_{rs}\tau^r t^s$,

---

[1] Si l'on veut, à partir des équations (6), retrouver Φ sous la forme du n° 2, il suffit d'y exprimer $\overset{*}{\mathrm{F}}{}''$ en fonction de g et de transformer convenablement les premiers membres. Si F n'est pas permutable avec l'unité, les calculs sont notablement plus compliqués, mais on peut retrouver ainsi les formules du n° 8.

on constate [1] que

$$(13) \qquad f_n(t) = \frac{t^n}{n!}\left(1 + \sum_{q}^{\infty}{}_{0} B_{q+1}(n)\, t^{q+1}\right)$$

avec

$$B_{q+1}(n) = \frac{P_{q+1}(n)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+q+1)},$$

$P_{q+1}(n)$ étant un polynome de degré q au plus en n. Il existe d'ailleurs une constante R telle que

$$(14) \qquad |B_{q+1}(n)| < \frac{1}{R^q},$$

et inversement, si les $f_n(t)$ ont la forme (13) avec les inégalités (14), on pourra obtenir $\Phi(\tau, t)$ sous forme d'une série convergente de puissances.

6. Nous allons déduire de la méthode du n° 4 une forme caractéristique, parfois avantageuse, des $f_n(t)$.

La formule (11) conduit à envisager les noyaux $\Phi(\tau, t)$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$(15) \qquad \Phi(\tau, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}\left[\frac{\tau^n}{n!} \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F}_n(t-\tau)\right],$$

les F_n étant des fonctions données auxquelles nous imposerons, pour assurer la convergence de (15) au voisinage de $t = \tau = 0$, la condition

$$(15') \qquad |F_n(t)| < M \frac{n!}{R^n}.$$

Les fonctions $f_n(t)$ déduites du noyau (15) par les formules (12) existent alors au voisinage de $t = 0$ et prennent, après quelques intégrations par parties, la forme

$$(16) \qquad f_p(t) = \overset{*}{1}{}^{p+1}(t) + \sum_{n=0}^{p} C_p^n \overset{*}{1}{}^{n+p+1} \overset{*}{F}_n(t).$$

Ces formules peuvent être remplacées par les formules équiva-

---

[1] *Cf.* ma Note *Sur certaines familles de fonctions* (*Rend. R. Acc. Lincei*, 1918).

lentes

$$(17)\quad \begin{cases} f_0 = \overset{*}{1} + \overset{*}{1}\,\overset{*}{F}_0(t), \\ \displaystyle\sum_{0}^{p}{}_q (-1)^q C_p^q \overset{*}{1}{}^q \overset{*}{f}_{p-q}(t) = \overset{*}{1}{}^{2p+1}\,\overset{*}{F}_p(t). \end{cases}$$

Le noyau (15) peut d'ailleurs s'écrire

$$(18)\quad \begin{aligned} \Phi(\tau, t) &= \sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \sum_{0}^{n}{}_p C_n^p (-1)^{n-p} \frac{\tau^{n-p}}{(n-p)!} \overset{*}{1}{}^p \overset{*}{F}_n(t-\tau) \\ &= \sum_{0}^{\infty}{}_q (-1)^q \frac{\tau^q}{q!} \psi_q(t-\tau) \end{aligned}$$

avec

$$(19)\quad \psi_q(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_r C_{r+q}^q \overset{*}{1}{}^r \overset{*}{F}_{q+r}(t)(-1)^{q+r},$$

et des inégalités (15) on déduit

$$|\psi_q(t)| < \sum_{0}^{\infty}{}_r C_{r+q}^q \frac{M(q+r)!}{r!\,R^{q+r}} |t|^r = \frac{q!\,M}{R^q} \sum_{0}^{\infty}{}_r (C_{r+q}^q)^2 \left(\frac{|t|}{R}\right)^r,$$

mais tous les termes de la somme précédente figurent dans le carré de

$$\left(1 - \sqrt{\frac{|t|}{R}}\right)^{-q-1},$$

de sorte que l'on peut toujours, en supposant t assez voisin de zéro, trouver des constantes M' et R' telles que

$$(18')\quad |\psi_q(t)| < \frac{M'q!}{R'^q}.$$

Le noyau (15) est donc considéré comme fonction des deux variables τ et $t-\tau$, analytique en τ; ses coefficients vérifiant les inégalités (18'). Il est tout naturel de se demander si, inversement, tout noyau analytique en τ peut prendre la forme (15).

Nous emploierons une méthode indirecte. Soit un noyau

$$(18)\quad \Phi(\tau, t) = \sum_{0}^{\infty}{}_q (-1)^q \frac{\tau^q}{q!} \psi_q(t-\tau)$$

avec

(18′) $$|\psi_q(t)| < \frac{M'q!}{R'^q},$$

les $f_p(t)$ correspondants sont

(20) $$f_p(t) = \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{p+1}(t) + \sum_{0}^{\infty}{}_r (-1)^r C^r_{p+r}\, \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{p+r+1}\, \overset{*}{\psi}_r(t)$$

et il suffit de constater qu'ils se mettent sous la forme (16) ou (17). En effet, formons le premier membre de (17), il vient

$$\sum_{0}^{p}{}_q (-1)^q C^q_p \overset{*}{\mathrm{I}}{}^q \left(\overset{*}{\mathrm{I}}{}^{p-q+1} + \sum_{0}^{\infty}{}_r (-1)^r C^r_{p-q+r}\, \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{p-q+r+1}\, \overset{*}{\psi}_r \right),$$

et le terme en ψ_r est

$$(-1)^r \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{p+r+1}\, \overset{*}{\psi}_r \sum_{0}^{p}{}_q (-1)^q C^q_p C^r_{p+r-q},$$

c'est-à-dire zéro si $r < p$, et

$$(-1)^r \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{p+r+1}\, \overset{*}{\psi}_r C^p_r$$

si $r \geqq p$. On obtient donc finalement

$$\sum_{0}^{\infty}{}_s (-1)^{p+s} C^s_{p+s}\, \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{2p+1+s}\, \overset{*}{\psi}_{p+s}(t)$$

qui est bien de forme

$$\overset{*}{\mathrm{I}}{}^{2p+1}\, \overset{*}{F}_p(t)$$

avec

(21) $$F_p = \sum_{0}^{\infty}{}_s (-1)^{p+s} C^s_{p+s}\, \overset{*}{\mathrm{I}}{}^{s}\, \overset{*}{\psi}_{p+s}(t).$$

Comme les équations (21) sont exactement symétriques des équations (19), on en déduira, par un calcul déjà fait, l'existence de M et R tel que

(15′) $$|F_n(t)| < M\frac{n!}{R^n}.$$

Résumant les résultats précédents, nous pouvons dire : *toute famille de fonctions* (12) *déduite d'un noyau analytique en* τ

$$\Phi(\tau, t) = \sum (-1)^q \frac{\tau^q}{q!} \psi_q(t-\tau)$$

avec

$$|\psi_q(t)| < \frac{M'q!}{R'^q}$$

peut se mettre sous la forme (20) *ou encore sous la forme* (16) [et (17)] *avec les inégalités correspondantes* (15′) *et inversement. Le noyau* Φ *est donc susceptible de prendre la forme* (15). *Les* F_q *sont liés aux* ψ_q *par les formules* (19) *résolues, d'une façon unique, par les formules* (21) (¹).

Le cas particulier du n° 5, où $\Phi(\tau, t)$ est analytique par rapport aux deux variables qui y figurent, est contenu en particulier dans le précédent. Comme je l'ai indiqué (²), il suffit alors que les $f_n(t)$ soient toutes holomorphes, de forme

$$\frac{t^n}{n!}\left[1 + \frac{\alpha_n(t)}{n+1}\right],$$

les $\alpha_n(t)$ étant bornés dans leur ensemble, et que l'on ait (16) ou (17) pour pouvoir affirmer les inégalités (15′), donc l'existence de

$$\Phi(\tau, t) = \sum A_{rs}\tau^r t^s,$$

et inversement.

7. Nous avons ainsi obtenu plusieurs expressions caractéristiques (13), (20), (16), des fonctions d'une famille (12). J'ai signalé d'abord l'expression (16) parce qu'elle n'est pas, comme les deux autres, une conséquence immédiate de la définition de la famille (12), parce qu'elle conduit à une nouvelle forme (15) du noyau, et enfin parce qu'elle permet, dans certains cas, d'affirmer presque sans calcul l'existence du noyau et d'en donner l'expression.

Soit par exemple les fonctions (*cf* Note [A], n° 7) :

$$(22)\qquad f_0(t) = \varphi(t), \qquad f_1(t) = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}(t), \qquad \ldots, \qquad f_n(t) = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}{}^n(t), \qquad \ldots,$$

φ étant dérivable et telle que $\varphi(0) = 1$, ψ étant mise sous forme

(¹) On aurait pu aussi résoudre directement les formules (19). Mais il faudrait faire un raisonnement spécial pour prouver l'unicité de la solution, qui est ici une conséquence de la marche suivie.

(²) Note [B].

canonique. L'expression (17) peut s'écrire

$$\sum_0^p {}_q(-1)^q C_p^q \overset{*}{1}{}^q \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\psi}{}^{p-q} = \overset{*}{\varphi}(\overset{*}{\psi} - \overset{*}{1})^p = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{1}{}^{2p} \overset{*}{\psi}{}''^p = \overset{*}{1}{}^{2p+1} \overset{*}{\psi}{}''^p + \overset{*}{1}{}^{2p+1} \overset{*}{\varphi}{}' \overset{*}{\psi}{}''^p,$$

la famille (22) est donc de la forme (12) et l'on a

$$F_p = \overset{*}{\psi}{}''^p + \overset{*}{\varphi}{}' \overset{*}{\psi}{}''^p,$$

ce qui permet d'écrire immédiatement le noyau $\Phi(\tau, t)$. Pour $\varphi = \psi$, on retrouve le résultat du n° 4.

III. — Expression asymptotique d'un noyau résolvant.

8. La transformation Ω du paragraphe 1, jouissant des propriétés (2) et (3), est telle, nous l'avons déjà vu, que

$$\overset{*}{F}{}^n(x, y) = \Omega(\overset{*}{1}{}^n) = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^{y-x} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \Phi(\xi; x, y)\, d\xi.$$

Je rappelle ([C], [M]) que dans le cas général on a

$$\Phi(\tau; x, y) = \Psi(\tau; x, y-\tau),$$

$$\Psi(\tau; x, y) = \sum_1^\infty {}_p \int_0^\tau d\eta_p \int_0^{\eta_p} d\eta_{p-1} \ldots \int_0^{\eta_2} d\eta_1\, \overset{*}{G}_{\eta_1} \overset{*}{G}_{\eta_2} \ldots \overset{*}{G}_{\eta_p}(x, y)$$

avec

$$G_\eta(x, y) = g(x+\eta, y+\eta)$$

et

$$g = -H - \overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H} - \overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H} - \ldots,$$

H étant la dérivée seconde de F par rapport à x et à y.

9. Considérons alors une équation de Volterra de deuxième espèce par rapport à l'inconnue $\varphi(x, y)$

$$\varphi(x, y) - \lambda \overset{*}{F} \overset{*}{\varphi}(x, y) = \psi(x, y);$$

on sait que l'on en tire

$$\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\psi} + \lambda \overset{*}{K} \overset{*}{\psi}$$

avec, pour le noyau résolvant K, l'expression

$$K(x, y; \lambda) = F + \lambda \overset{*}{F}{}^2 + \lambda^2 \overset{*}{F}{}^3 + \ldots, \tag{23}$$

c'est-à-dire

$$(24)\quad \begin{aligned} K(x, y; \lambda) &= \Omega(1 + \lambda \overset{*}{1}^2 + \lambda^2 \overset{*}{1}^3 + \ldots) \\ &= \Omega(e^{\lambda(y-x)}) = e^{\lambda(y-x)} + \int_0^{y-x} e^{\lambda\xi} \Phi(\xi; x, y)\, d\xi. \end{aligned}$$

La formule (24) met en évidence, d'une façon nouvelle, deux résultats de M. Volterra sur l'allure asymptotique de K [1].

I. *On a*

$$K(x, y; \lambda) = e^{\lambda(y-x)} + \frac{U(x, y; \lambda)}{\lambda^2} \qquad (\textit{pour } y > x),$$

U *restant borné quand* λ *tend vers* $-\infty$.

En effet, la fonction Φ est nulle pour $\xi = 0$ et l'on peut évidemment déterminer une constante M telle que

$$|\Phi(\xi; x, y)| < M\xi.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |U(x, y; \lambda)| &= \left| \lambda^2 \int_0^{y-x} e^{\lambda\xi} \Phi(\xi; x, y)\, d\xi \right| < M\lambda^2 \int_0^{y-x} e^{\lambda\xi} \xi\, d\xi \\ &= M \left\{ 1 + [\lambda(y-x) - 1]\, e^{\lambda(y-x)} \right\}, \end{aligned}$$

qui reste bien borné pour $\lambda = -\infty$.

En admettant maintenant l'existence et la continuité de $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}$ (il suffit de faire la même hypothèse sur l'une des dérivées troisièmes de F), démontrons que :

II. *On a*

$$\lim_{\lambda = -\infty} U(x, y; \lambda) = \Phi'_\xi(0; x, y) \qquad (\textit{pour } y > x).$$

Remarquons incidemment que

$$\begin{aligned} \Phi'_\xi(0; x, y) = g(x, y) &= -F''_{xy} - \overset{*}{F''} \overset{*}{1} \overset{*}{F''} - \overset{*}{F''} \overset{*}{1} \overset{*}{F''} \overset{*}{1} \overset{*}{F''} - \ldots \quad (^2) \\ &= -\overset{*}{F''} + \overset{*}{F''} \overset{*}{L} \quad (^3), \end{aligned}$$

---

[1] *Atti R. Acc. Lincei*, S. V., vol. XI, p. 79, th. I; p. 81, th. II. M. Volterra étudie la fonction $\lambda F - \lambda^2 \overset{*}{F^2} + \lambda^3 \overset{*}{F^3} - \ldots$.

[2] F'' représente ici F''_{xy}.

[3] C'est la forme qu'utilise M. Volterra.

avec

$$L = \overset{*}{F}'_y - \overset{*}{F}'^2_y + \overset{*}{F}'^3_y - \ldots.$$

Pour démontrer II, observons que

$$\begin{aligned} U(x, y; \lambda) &= \lambda^2 \int_0^{y-x} e^{\lambda\xi}\, \Phi(\xi;\, x,\, y)\, d\xi \\ &= [\lambda\, e^{\lambda\xi}\, \Phi(\xi;\, x,\, y)]_0^{y-x} - \int_0^{y-x} \lambda\, e^{\lambda\xi}\, \Phi'_\xi(\xi;\, x,\, y)\, d\xi \\ &= \lambda\, e^{\lambda(y-x)}\, \Phi(y-x;\, x,\, y) + \Phi'_\xi(0;\, x,\, y)\,[1 - e^{\lambda(y-x)}] \\ &\quad - \lambda \int_0^{y-x} e^{\lambda\xi}[\Phi'_\xi(\xi) - \Phi'_\xi(0)]\, d\xi, \end{aligned}$$

et tout revient à prouver que le troisième terme du second membre tend vers zéro pour $\lambda = -\infty$. Or, l'intégrale qui le constitue peut se diviser en deux : la première, prise entre les limites 0 et ε, est, à cause de la continuité de Φ'_ξ, arbitrairement petite avec ε; la seconde $\int_\varepsilon^{y-x}$ est, ε étant fixé, inférieure à $M[-e^{\lambda\xi}]_\varepsilon^{y-x}$, c'est-à-dire arbitrairement petite pour $\lambda = -\infty$. L'intégrale tend même vers zéro uniformément par rapport à x et y. La formule II en résulte et l'on peut écrire

$$(\alpha) \qquad |U(x, y;\, \lambda) - \Phi'_\xi(0;\, x,\, y)| < N\, e^{\lambda(y-x)}[\lambda(y-x) + 1] + \eta,$$

N étant une constante et η tendant uniformément vers zéro pour $\lambda = -\infty$.

10. Voici une conséquence nouvelle des remarques précédentes. Soit l'équation de deuxième espèce

$$(25) \qquad \varphi - \lambda \overset{*}{F} \overset{*}{\varphi} = \lambda\psi \qquad (y > x).$$

Si nous faisons tendre λ vers l'infini, nous obtenons l'équation de première espèce

$$(26) \qquad \overset{*}{F} \overset{*}{\varphi}(x, y) = -\psi(x, y).$$

Soit $\varphi(x, y;\, \lambda)$ la solution de (25); nous allons voir qu'*il est possible de faire tendre λ vers l'infini de telle façon que $\varphi(x, y;\, \lambda)$ ait une limite solution de* (26). Il suffit pour cela de démontrer que l'on a

$$\varphi(x, y; \lambda) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y; \lambda)$$

avec

$$\lim_{\lambda=\infty} \varphi_1(x, y; \lambda) = 0,$$

$$\lim_{\lambda=\infty} \int_x^y |\varphi_1(\xi, y; \lambda)| \, d\xi = 0.$$

Or, faisons tendre λ vers $-\infty$ par valeurs réelles. On a

$$\begin{aligned}\varphi(x, y; \lambda) &= \lambda\psi + \lambda^2 \overset{*}{\mathrm{K}}\overset{*}{\psi} \\ &= \lambda\psi + \lambda^2 \int_x^y e^{\lambda(\xi-x)} \psi(\xi, y)\, d\xi + \int_x^y \mathrm{U}(x, \xi; \lambda)\, \psi(\xi, y)\, d\xi\end{aligned}$$

ou, en admettant que $\psi(x, x) = 0$ et que ψ' existe et soit continu,

$$\begin{aligned}\varphi(x, y; \lambda) = &-\lambda \int_x^y e^{\lambda(\xi-x)}\, \psi'_\xi(\xi, y)\, d\xi + \overset{*}{g}\,\overset{*}{\psi}(x, y) \\ &+ \int_x^y [\mathrm{U}(x, \xi, \lambda) - g(x, \xi)]\, \psi(\xi, y)\, d\xi;\end{aligned}$$

nous poserons donc

$$\varphi_0(x, y) = \psi'_x(x, y) + \overset{*}{g}\overset{*}{\psi}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y; \lambda) = &-\lambda \int_x^y e^{\lambda(\xi-x)} [\psi'_\xi(\xi, y) - \psi'_x(x, y)]\, d\xi \\ &- e^{\lambda(y-x)}\, \psi'_x(x, y) + \int_x^y [\mathrm{U}(x, \xi, \lambda) - g(x, \xi)]\, \psi(\xi, y)\, d\xi.\end{aligned}$$

La fonction φ_1 est donc la somme de trois termes; en transformant le premier comme, à la fin du n° 9, le dernier terme de U; en appliquant, pour transformer le troisième, l'inégalité (α), on démontrera sans peine que

$$|\varphi_1(x, y; \lambda)| < \mathrm{N}' e^{(y-x)\lambda} + \eta'$$

(N' constant, η' tendant uniformément vers zéro pour $\lambda = -\infty$). Il en résulte bien que

$$\lim_{\lambda=-\infty} \varphi_1 = 0,$$

$$\lim_{\lambda=-\infty} \int_x^y |\varphi_1(\xi, y; \lambda)| \, d\xi = 0.$$

11. On obtient ainsi la solution de l'équation de première espèce sous la forme

$$\psi'_x(x, y) + \overset{**}{g}\psi(x, y) \quad [1].$$

Il m'a paru intéressant de prouver qu'on pouvait la retrouver comme limite, pour $\lambda = -\infty$, de la solution de l'équation de deuxième espèce.

Nous avons supposé que le noyau $F(x, y)$ était mis sous forme canonique ; il suffira naturellement qu'il soit du premier ordre

$$F(x, x) \neq 0;$$

on pourrait généraliser le résultat obtenu pour des noyaux d'ordre supérieur au premier.

IV. — Sur certaines familles de fonctions.

12. Nous avons déjà introduit (II, n° 5) les familles de fonctions données par les formules

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_0(t) = 1 + \int_0^t K(\tau, t)\, d\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_n(t) = \dfrac{t^n}{n!} + \int_0^t \dfrac{\tau^n}{n!} K(\tau, t)\, d\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

et nous avons mis sous diverses formes caractéristiques les fonctions d'une telle famille. Mais c'était toujours en faisant sur le noyau K diverses hypothèses très restrictives (analyticité par rapport à t et τ ou seulement par rapport à τ). Pour établir le résultat général que nous avons maintenant en vue, nous supposerons seulement que

$$(a) \qquad K(0, t) = 0$$

[1] Remarquons incidemment que ceci nous fournit une interprétation simple de la fonction g qui sert à construire le noyau $\Phi(\xi, x, y)$. On a

$$\overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{I}{}^{-1} - g(x, y).$$

et que

$$(b) \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}[K(\tau, t+\tau)]$$

existe et est continue.

13. D'après ce qui précède, on peut obtenir une famille (12) en prenant les valeurs, pour $x = 0$, d'une fonction $F(x, y)$ [1] et de ses diverses puissances de composition : les fonctions

$$\begin{aligned} f_0(t) &= F(0, t), \\ f_1(t) &= \overset{*}{F}{}^2(0, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(t) &= \overset{*}{F}{}^{n+1}(0, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

forment une famille (12). Nous montrerons qu'on obtient ainsi toutes les familles (12).

Théorème. — *Sous les conditions* (a) *et* (b) *les fonctions* (12) *sont les valeurs, pour* $x = 0$, $y = t$, *d'une fonction* F *et de ses diverses puissances de composition.*

D'après le début du n° 8, on a

$$\overset{*}{F}{}^{n+1}(x, y) = \frac{(y-x)^n}{n!} + \int_0^{y-x} \frac{\xi^n}{n!} \Phi(\xi; x, y)\, d\xi,$$

il suffit donc de choisir l'arbitraire $g(x, y)$ dont dépend Φ de façon que

$$K(\tau, t) = \Phi(\tau; 0, t)$$

ou

$$K(\tau, t+\tau) = \Psi(\tau; 0, t),$$

mais (C, M), Ψ est solution de l'équation

$$\begin{aligned} \Psi(\eta; x, y) = &\int_0^{\eta} g(x+\eta', y+\eta')\, d\eta' \\ &+ \int_0^{\eta} d\eta_1 \int_x^{y} d\zeta\, \Psi(\eta_1, x, \zeta)\, g(\eta_1+\zeta, y+\eta_1), \end{aligned}$$

---

[1] $F(x, y)$ sous forme canonique.

il vient donc, pour déterminer g, l'équation

$$(27)\quad K(\tau, t+\tau) = \int_0^\tau g(\eta;\, t+\eta)\, d\eta + \int_0^\tau d\eta \int_0^t d\zeta\, K(\eta, \zeta+\eta)\, g(\eta+\zeta, t+\eta).$$

Il en résulte bien les conditions (a) et (b). L'équation (27) est alors équivalente à

$$\frac{d}{d\tau}[K(\tau, t+\tau)] = L(\tau, t+\tau)$$
$$= g(\tau, t+\tau) + \int_0^t d\zeta\, K(\tau, \zeta+\tau)\, g(\tau+\zeta, t+\tau)\, d\tau$$

ou, en posant $\tau = x$, $t+\tau = y$,

$$(28)\qquad L(x, y) = g(x, y) + \int_x^y K(x, \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi.$$

C'est une équation de Volterra qui détermine g sans difficultés. Étant donnée la marche suivie, il faut encore vérifier que, $\Psi_1(\tau;\, x, y)$ étant la fonction ψ construite à partir de g, on a

$$\Psi_1(\tau;\, 0, t) = K(\tau, t+\tau);$$

or, on a

$$\Psi_1(\tau; 0, t) = \int_0^\tau g(\eta;\, t+\eta)\, d\eta + \int_0^\tau d\eta \int_0^t d\zeta\, \Psi_1(\eta; 0, \zeta)\, g(\eta+\zeta, t+\eta)$$

et $K(\tau, t+\tau)$ vérifie l'équation tout à fait identique (27); comme la solution de (27) en K est unique, on a bien

$$\Psi_1(\tau;\, 0, t) = K(\tau;\, t+\tau).$$

Le résultat est ainsi démontré.

Des deux restrictions faites, l'une (b) est essentielle, l'autre (a) peut toujours être réalisée en retranchant des fonctions f_n

$$\int_0^t \frac{\tau^n}{n!} K(0, t)\, d\tau = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} K(0, t).$$

14. Les formules du paragraphe III nous permettront encore d'introduire d'autres familles de fonctions, obtenues, comme les fonctions (12), par une transformation de Volterra.

Soient le noyau résolvant de $F(x,y)$

$$K(x,y;\lambda) = F + \lambda \overset{*}{F}{}^2 + \lambda^2 \overset{*}{F}{}^3 + \ldots$$

et les fonctions

$$C_F(x,y;n), \qquad S_F(x,y;n)$$

définies par les formules

$$K(x,y;in) = C_F(x,y;n) + i\,S_F(x,y;n).$$

On a

$$\begin{aligned} C_F(x,y;n) &= F\,(x,y) - n^2\overset{*}{F}{}^3(x,y) + n^4\overset{*}{F}{}^5(x,y) - \ldots,\\ S_F(x,y;n) &= n\,\overset{*}{F}{}^2(x,y) - n^3\overset{*}{F}{}^4(x,y) + n^5\overset{*}{F}{}^6(x,y) - \ldots; \end{aligned}$$

ces fonctions qui, pour $F = 1$, se réduisent aux fonctions $\cos nx$ et $\sin nx$, jouissent, dans le corps des fonctions permutables avec F, de propriétés analogues. De la formule (24) on tire

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} C_F(x,y;n) &= \Omega(\cos nt) = \cos n(y-x) + \int_0^{y-x} \cos n\tau\,\Phi(\tau;x,y)\,d\tau,\\ S_F(x,y;n) &= \Omega(\sin nt) = \sin n(y-x) + \int_0^{y-x} \sin n\tau\,\Phi(\tau;x,y)\,d\tau. \end{aligned} \right.$$

Toute fonction du corps étant donnée par

$$\Omega[\lambda(y-x)],$$

toutes les fois que λ sera développable en série uniformément convergente de $\cos nt$ et $\sin nt$, on pourra développer la fonction considérée en série de forme

$$\begin{aligned} a_0\,C_F(x,y;0) + a_1\,C_F(x,y;1) + \ldots + a_n\,C_F(x,y;n) + \ldots\\ + b_1\,S_F(x,y;1) + \ldots + b_n\,S_F(x,y;n) + \ldots. \end{aligned}$$

15. Le résultat du n° **13** s'étendra à toute famille de fonctions données par les formules

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1 + \int_0^t K(\tau,t)\,d\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_n(t) &= \cos nt + \int_0^t \cos n\tau\,K(\tau,t)\,d\tau,\\ \psi_n(t) &= \sin nt + \int_0^t \sin n\tau\,K(\tau,t)\,d\tau, \end{aligned} \right.$$

le noyau $K(\tau,t)$ étant quelconque.

Comme nous avons démontré (n° **13**) que, sous les seules conditions (a), (b), il existe un noyau générateur d'un corps de fonctions permutables $\Phi(\xi; x, y)$, tel que

$$\Phi(\xi; 0, t) = K(\xi, t),$$

à toute famille (30) (¹) *on peut associer une* $F(x, y)$ *telle que*

$$\varphi_n(t) = C_F(0, t; n),$$
$$\psi_n(t) = S_F(0, t; n).$$

L'étude du développement d'une fonction arbitraire $f(t)$ en série des fonctions φ_n et ψ_n sera très simple (²). La transformation

$$f(t) = u(t) + \int_0^t u(\tau) K(\tau, t)\, d\tau$$

fait correspondre à $f(t)$ une fonction $u(t)$. Si elle admet un développement uniformément convergent en série trigonométrique, on en déduira pour $f(t)$ le développement

$$\begin{aligned} a_0 \varphi_0(t) + a_1 \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(t) + \ldots + a_n \varphi_n(t) + \ldots \\ + b_1 \psi_1(t) + b_2 \psi_2(t) + \ldots + b_n \psi_n(t) + \ldots . \end{aligned}$$

16. Pour terminer ces applications de la recherche des transformations Ω qui conservent la composition, nous indiquerons comment les fonctions

$$C_F(x, y; n), \qquad S_F(x, y; n)$$

s'introduisent dans la résolution d'équations intégro-différentielles.

Dans le cas de l'hérédité linéaire, l'équation du mouvement d'une corde élastique est (³)

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u(z, \tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t)\, d\tau. \tag{31}$$

Je rappelle comment M. Volterra en forme la solution. En supposant la corde fixée à ses extrémités, on est conduit à chercher

(¹) Sous les conditions (a) et (b).
(²) *Cf.* Note [A].
(³) *Cf.* VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 97 et suivantes.

les solutions de forme

$$\sin mz\, f(t),$$

et l'on trouve, pour déterminer $f(t)$, l'équation intégrale

$$f(t) + m^2 \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{H}(\tau, t)\, d\tau = at + b$$

avec

$$\mathrm{H}(\tau, t) = \overset{*}{1}{}^2(t - \tau) + \overset{*}{\psi}\, \overset{*}{1}{}^2(\tau, t),$$

d'où

$$f(t) = a\, \mathrm{S}_1(t;\, m^2) + b\, \mathrm{S}_2(t;\, m^2)$$

avec

$$\mathrm{S}_1 = \overset{*}{1}{}^2(t) - m^2\, \overset{*}{1}{}^2\, \overset{*}{\mathrm{H}}(0, t) + m^4\, \overset{*}{1}{}^2\, \overset{*}{\mathrm{H}}{}^2(0, t) - m^6\, \overset{*}{1}{}^2\, \overset{*}{\mathrm{H}}{}^3(0, t) + \ldots,$$

$$\mathrm{S}_2 = 1 \qquad - m^2\, \overset{*}{1}\, \overset{*}{\mathrm{H}}(0, t) + m^4\, \overset{*}{1}\, \overset{*}{\mathrm{H}}{}^2(0, t) - m^6\, \overset{*}{1}\, \overset{*}{\mathrm{H}}{}^3(0, t) + \ldots.$$

La solution générale de l'équation (31) est

$$(32) \qquad u(z, t) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \sin \frac{n\pi}{l} z \left[a_n\, \mathrm{S}_1\left(t;\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) + b_n\, \mathrm{S}_2\left(t;\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) \right],$$

les constantes a_n et b_n étant déterminées par les conditions initiales.

17. Déterminons F par l'équation (1)

$$\mathrm{H}(\tau, t) = \overset{*}{\mathrm{F}}{}^2(\tau, t),$$

et K et L par les équations

$$1 = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mathrm{K}})\overset{*}{\mathrm{F}}, \qquad \overset{*}{1}{}^2 = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mathrm{L}})\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2,$$

il viendra

$$m\mathrm{S}_1(t;\, m^2) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mathrm{L}})(m\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 - m^3 \overset{*}{\mathrm{F}}{}^4 + m^5 \overset{*}{\mathrm{F}}{}^6 - \ldots) \quad (2)$$
$$= (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mathrm{L}})\, \overset{*}{\mathrm{S}}_{\mathrm{F}}(\tau, t;\, m),$$

et de même

$$\mathrm{S}_2(t;\, m^2) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mathrm{K}})\, \overset{*}{\mathrm{C}}_{\mathrm{F}}(\tau, t;\, m) \quad (3).$$

---

(1) *Cf.* VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 170-171.

(2) Dans cette formule, comme dans la suivante, les compositions sont calculées pour $\tau = 0$.

(3) Dans cette formule, comme dans (33) et (34), les compositions sont calculées pour $\tau = 0$.

En introduisant la transformation Ω qui fait passer de $\overset{*}{\mathrm{I}}{}^n$ à $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^n$ (¹), il vient, comme solution générale de (31),

$$(33)\qquad u(z,\,t) = (\overset{*}{1}{}^{\circ} + \overset{*}{\mathrm{L}})\overset{*}{\Omega}\left(\sum_0^\infty{}_n a_n \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}z\sin\frac{n\pi}{l}t\right) + (\overset{*}{1}{}^{\circ} + \overset{*}{\mathrm{K}})\overset{*}{\Omega}\left(\sum_0^\infty{}_n b_n \sin\frac{n\pi}{l}z\cos\frac{n\pi}{l}t\right).$$

Si les conditions aux limites sont

$$u(z,\,0) = g(z), \qquad u'_t(z,\,0) = h(z),$$

g et h étant données, on déterminera les a_n, b_n par les conditions

$$\sum b_n \sin\frac{n\pi}{l}z = g(z), \qquad \sum a_n \sin\frac{n\pi}{l}z = h(z).$$

La solution ainsi obtenue, dans le cas héréditaire, s'exprime aisément au moyen des deux solutions $\mathrm{U}(z,\,t)$ $\mathrm{V}(z,\,t)$ du cas non héréditaire, définies par les conditions aux limites

$$\mathrm{U}(z,\,0) = 0, \qquad \mathrm{U}'_t(z,\,0) = h(z),$$
$$\mathrm{V}(z,\,0) = g(z), \qquad \mathrm{V}'_t(z,\,0) = 0.$$

La formule (33) s'écrit en effet

$$(34)\qquad u(z,\,t) = (\overset{*}{1}{}^{\circ} + \overset{*}{\mathrm{L}})\overset{*}{\Omega}(\mathrm{U}) + (\overset{*}{1}{}^{\circ} + \overset{*}{\mathrm{K}})\overset{*}{\Omega}(\mathrm{V}).$$

On voit que l'on passe, *sans changer les conditions aux*

(¹) La fonction F, introduite ici, est telle que $\mathrm{F}(x,x) = 1$, mais elle n'est pas, en général, sous forme canonique. On sait que, dans ce cas, on peut toujours trouver une fonction $m(x)$, telle que

$$\mathrm{F}(x,y) = \frac{m(x)}{m(y)}\mathrm{F}_1(x,y),$$

F_1 étant sous forme canonique, et l'on passe des diverses puissances de F_1 à celles de F par la même formule

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^n = \frac{m(x)}{m(y)}\overset{*}{\mathrm{F}}{}_1^n.$$

La transformation Ω, dont il est question ici et qui fait passer de $\overset{*}{\mathrm{I}}{}^n$ à $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^n$, diffère donc de celles que nous avons considérées jusqu'à présent par le facteur $\dfrac{m(x)}{m(y)}$.

limites, par des transformations du type de Volterra, du cas non héréditaire au cas héréditaire. Il résulte aussi de ce qui précède que l'étude de la convergence de la série (32), qui fournit la solution dans le cas de l'hérédité, se ramène à celle des séries U et V relatives au cas non héréditaire.