BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MONTEL

Sur les polynômes d'approximation

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 151-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__151_1>

SUR LES POLYNOMES D'APPROXIMATION;

PAR M. P. MONTEL.

INTRODUCTION.

Les recherches de MM. Lebesgue, de la Vallée Poussin, S. Bernstein, D. Jackson ont mis en évidence le lien étroit qui rattache les propriétés différentielles d'une fonction d'une variable x à l'ordre de la meilleure approximation de cette fonction par un polynome de degré donné.

Soient $f(x)$ une fonction bornée de la variable x dans l'intervalle $(-1, +1)$ et $P_n(x)$ un polynome de degré inférieur ou égal à n; le maximum M_n de $|f(x) - P_n(x)|$ dans l'intervalle s'appelle l'*approximation* de $f(x)$ par le polynome. Lorsqu'on prend tous les polynomes possibles de degré inférieur ou égal à n, les nombres M_n ont un minimum $\mu(n)$ qu'on appelle la *meilleure approximation* de $f(x)$ par un polynome de degré non supérieur à n. Ce minimum $\mu(n)$ est atteint par un polynome unique $\Pi_n(x)$ qu'on appelle le *polynome d'approximation* ou *polynome de Tchebi-*

chef de degré n. On a alors, quel que soit x dans l'intervalle,

$$|f(x) - \Pi_n(x)| \leqq \mu(n).$$

La suite des nombres $\mu(n)$ n'est jamais croissante et le théorème de Weierstrass exprime que cette suite a pour limite zéro pour une fonction $f(x)$ continue. Réciproquement, si $\mu(n)$ a pour limite zéro quand n croît indéfiniment, la fonction $f(x)$ est continue.

Le théorème de Weierstrass nous fournit ainsi une relation entre la continuité de la fonction et la décroissance de $\mu(n)$. Les recherches récentes que j'ai rappelées au début établissent un lien entre la rapidité de cette décroissance et l'existence pour $f(x)$ de dérivées de divers ordres. M. S. Bernstein a démontré surtout des conditions nécessaires : il a déduit, de la rapidité de la décroissance de $\mu(n)$, l'existence de dérivées pour $f(x)$. M. D. Jackson s'est surtout occupé de conditions suffisantes : de l'existence des dérivées de $f(x)$, il a déduit la rapidité de la décroissance de $\mu(n)$.

Les recherches de M. S. Bernstein reposent sur la possibilité de limiter les dérivées successives d'un polynome de degré n, dans un intervalle donné, en fonction du nombre n et de la borne supérieure du polynome dans le même intervalle. Ce résultat a été obtenu, par M. S. Bernstein, au moyen d'une analyse délicate des polynomes de Tchebichef qui s'approchent le plus de zéro dans un intervalle donné et satisfont à une autre condition : par exemple, le coefficient du terme de degré le plus élevé est donné. Dans le Chapitre I du présent travail, j'obtiens très simplement des résultats analogues à ceux de M. S. Bernstein par une méthode de représentation conforme applicable à des polynomes réels ou complexes. J'introduis la dérivée généralisée de Riemann-Liouville et je montre comment cette notion permet d'apporter plus de précision et de régularité dans l'étude des rapports entre l'existence pour la fonction $f(x)$ d'une dérivée d'ordre quelconque inférieur à α et le fait que l'ordre infinitésimal de $\mu(n)$ par rapport à $\frac{1}{n}$ est égal ou supérieur à α.

J'introduis, dans le Chapitre II, les différences successives de la fonction $f(x)$ pour des accroissements de x égaux à h. *Si le* *rapport* $\frac{\Delta^{(r)} f(x)}{h^r}$ *a un module borné*, $\Delta^{(r)} f(x)$ désignant la différence d'ordre r de $f(x)$ pour des accroissements égaux à h donnés à x, on en déduit que $\mu(n)$ est d'un ordre infinitésimal supérieur ou égal à r, et que, par conséquent, *toutes les dérivées d'ordre inférieur à r existent pour* $f(x)$. Plus généralement, *si* $\frac{\Delta^{(r)} f(x)}{h^\alpha}$, *avec* $\alpha \leqq r$, *est borné, toutes les dérivées d'ordre inférieur à* α *existent.* On sait, par exemple, que si le rapport $\frac{\Delta f(x)}{h}$ a un module borné, la dérivée $f'(x)$ existe presque partout comme l'a établi M. Lebesgue; si $\frac{\Delta^2 f(x)}{h^{1+\alpha}}$ est borné, pour une valeur α comprise entre 0 et 1, la dérivée existe partout.

Dans le Chapitre III, je m'occupe de l'approximation des fonctions de plusieurs variables. Il y a lieu de faire intervenir ici les degrés du polynome par rapport à chacune des variables. S'il s'agit, par exemple, d'une fonction de deux variables $f(x, y)$, nous considérerons les polynomes $P_{m,n}(x, y)$ de degré m en x et de degré n en y et nous étudierons la décroissance de $\mu(m, n)$ lorsque m et n augmentent indéfiniment d'une manière indépendante (¹).

Nous serons amenés à trouver pour $\mu(m, n)$ des expressions de la forme $\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$; A, B, α, β étant des constantes positives, et nous montrerons que : *si* $\mu(m, n)$ *est de la forme* $\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$, *la fonction correspondante* $f(x, y)$ *admet toutes les dérivées* $f^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'} y^{\beta'}}$ *pour lesquelles* $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$.

Il en sera, en particulier, ainsi lorsque les rapports $\frac{\Delta_h^{(r)} f(x, y)}{h^r}$ et $\frac{\Delta_k^{(s)} f(x, y)}{k^s}$ sont bornés, $\Delta_h^{(r)}$ désignant la différence d'ordre r de $f(x, y)$ pour des accroissements égaux à h donnés à x, et $\Delta_k^{(s)}$, la différence d'ordre s de $f(x, y)$, pour des accroissements égaux à k donnés à y. On peut d'ailleurs remplacer r et s par des nombres quelconques α et β respectivement inférieurs à r et à s.

(¹) Le nombre $\mu(m, n)$ est défini avec les polynomes $P_{m,n}(x, y)$ comme $\mu(n)$ a été défini avec $P_n(x)$. Il faut remarquer que, lorsque m et n sont donnés, il n'existe pas nécessairement un seul polynome $\Pi_{m,n}(x, y)$ fournissant l'approximation $\mu(m, n)$. *Cf.* L. TONELLI, *I polinomi d'approssimazione di Tchebychev* (*Annali di Matematica*, série 3, t. XV, 1908, p. 73).

Il résulte de là que : *si les rapports* $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^\alpha}$ $(\alpha \leqq r)$ *et* $\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^\beta}$ $(\beta \leqq s)$ *ont des modules bornés, la fonction* $f(x, y)$ *admet toutes les dérivées partielles* $f_{x^{\alpha'} y^{\beta'}}^{(\alpha'+\beta')}$ *pour lesquelles* $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$. Par exemple, si les rapports $\frac{\Delta_h^{(2)}}{h^\alpha}$ $(1 < \sigma \leqq 2)$ et $\frac{\Delta_k^{(2)}}{k\beta}$ $(1 < \beta \leqq 2)$ sont bornés, les dérivées f'_x et f'_y existent et sont continues; si les rapports $\frac{\Delta_h^{(3)}}{h^3}$ et $\frac{\Delta_k^{(2)}}{h\beta}$ $(1 < \beta \leqq 2)$ sont bornés, les dérivées f'_x, f'_y, f''_{x^2} existent et sont continues; il en est de même pour f''_{xy} si $\beta > \frac{3}{2}$. Si les rapports $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}$ et $\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^s}$ sont bornés pour chaque valeur de r et de s, la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles de tous les ordres.

CHAPITRE I.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES.

1. Soit $P(x)$ un polynome entier de degré n, à coefficients réels ou imaginaires dont le module ne dépasse pas M pour tous les points x du segment $(-1, +1)$ de l'axe réel. Les dérivées de ce polynome ont, en chaque point du plan et en particulier sur ce segment, des modules dont les limites supérieures peuvent être exprimées en fonction de n et de M. C'est ce calcul que nous allons faire.

M. Dulac a montré le premier que si un polynome entier à coefficients réels ou complexes a un module inférieur à M en tous les points d'un segment rectiligne ou curviligne, les coefficients de ce polynome sont tous inférieurs à $M\lambda^n$, n étant le degré du polynome et λ un nombre qui dépend seulement de l'arc de courbe ou de la longueur du segment ([1]). Il en résulte, en particulier, que le module d'un polynome de degré n, supposé inférieur à M sur le segment $(-1, +1)$, est inférieur à $M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n$ dans un domaine quelconque du plan, $\frac{1}{\rho}$ étant ici un nombre qui ne dépend que de la forme du domaine. C'est ce théorème que M. Serge Bernstein a

---

([1]) H. Dulac, *Sur les séries de Mac-Laurin à plusieurs variables* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908, p. 96).

démontré en 1912 pour les polynomes à coefficients réels dans le cas où le domaine est un segment de l'axe réel ([1]); il a étendu ce résultat au cas où, le polynome étant toujours à coefficients réels, le domaine est une portion quelconque du plan ([2]). L'énoncé précis du théorème de M. Serge Bernstein est le suivant : Si M est la plus grande valeur absolue d'un polynome de degré n à coefficients réels sur le segment $(-1, +1)$, le module de ce polynome en un point extérieur à ce segment est inférieur à $M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n$, $\frac{1}{\rho}$ étant la demi-somme des axes de l'ellipse passant par ce point et ayant les points -1 et $+1$ pour foyers.

Les démonstrations de M. Serge Bernstein reposent sur une étude approfondie de certains polynomes de Tchebichef. Je me propose d'établir que la proposition précédente est applicable *aux polynomes à coefficients complexes* et qu'elle est une conséquence fort simple des principes de la représentation conforme ([3]).

Soit, en effet,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polynome de degré n à coefficients réels ou complexes et tel que

$$|P(x)| \leqq M$$

sur le segment $(-1, +1)$ de l'axe réel.

La transformation conforme

$$2x = z + \frac{1}{z},$$

$$z = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

où la détermination du radical est choisie de manière que les points $z = 0$ et $x = \infty$ soient homologues, fait correspondre aux

---

([1]) *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné* (*Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. IV, 1912, p. 14).

([2]) *Sur une propriété des polynomes* (*Mémoires de la Société mathématique de Charkow*, t. XIV). Dans ce cas, M. S. Bernstein démontre seulement que le module ne dépasse pas $2M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n$.

([3]) J'ai communiqué cette démonstration à M. Dulac en juillet 1908. Depuis, cette méthode a été signalée et utilisée par M. Marcel Riesz (*Acta mathematica*, 1916, p. 341).

points du plan des x, où l'on a effectué la coupure $(-1, +1)$, les points intérieurs au cercle $C(|z|=1)$. Les points de la circonférence correspondent aux deux bords de la coupure; à tout cercle C_ρ concentrique au cercle C et de rayon $\rho < 1$, correspond une ellipse E_ρ ayant pour foyers -1 et $+1$ dont le grand axe est $2a = \frac{1}{\rho} + \rho$ et le petit axe $2b = \frac{1}{\rho} - \rho$: la demi-somme $a + b$ des axes est $\frac{1}{\rho}$.

Soit $R(z)$ la fraction rationnelle correspondant à $P(x)$

$$R(z) = P(x) = P\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right];$$

on a

$$R(z) = \frac{Q(z)}{z^n},$$

$Q(z)$ étant un polynome réciproque de degré $2n$. Sur la circonférence C, on a

$$|R(z)| = \left|\frac{Q(z)}{z^n}\right| = |Q(z)| = |P(x)| \leqq M;$$

donc, pour tout point du cercle $|z| \leqq 1$, on aura

$$|Q(z)| \leqq M.$$

Dans l'anneau compris entre les cercles C et C_ρ, on aura

$$|R(z)| \leqq \frac{|Q(z)|}{\rho^n} \leqq M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n,$$

donc

$$|P(x)| \leqq M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n,$$

dans la région correspondante du plan des x, c'est-à-dire dans l'ellipse E_ρ de foyers $(-1, +1)$ dont $\frac{1}{\rho}$ est la demi-somme des axes.

Cette limite supérieure n'est d'ailleurs jamais atteinte, car si l'on avait en un point de E_ρ

$$|P(x)| = \frac{M}{\rho^n},$$

on aurait $|Q(z)| = M$ en un point du cercle C_ρ intérieur à C, $Q(z)$ serait alors une constante, ce qui est impossible, puisque

$Q(z)$ est un polynome réciproque. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si le polynome $P(x)$ de degré n à coefficients réels ou complexes a un module inférieur à M sur le segment $(-1, +1)$, on a

$$|P(x)| < \frac{M}{\rho^n}$$

en tous les points du domaine fermé limité extérieurement par une ellipse de foyers $(-1, +1)$ dont $\frac{1}{\rho}$ est la demi-somme des axes.

2. Nous allons déduire du théorème précédent des limites supérieures pour les coefficients du polynome $P(x)$.

Désignons par Γ le cercle de centre $x = 0$ et de rayon b, il est à l'intérieur de l'ellipse E_ρ et l'on a

$$a_p = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{P(x)\,dx}{x^{p+1}},$$

et, comme $|P(x)| < \frac{M}{\rho^n}$ sur Γ, on peut écrire

$$|a_p| < \frac{M}{\rho^n b^p},$$

où

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right),$$

donc

$$(1) \qquad |a_p| < M\frac{2^p}{\rho^{n-p}(1-\rho^2)^p}.$$

Nous pouvons donner à ρ une valeur arbitraire inférieure à l'unité ; prenons par exemple

$$1 - \rho^2 = \rho,$$

c'est-à-dire

$$\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1},$$

il viendra

$$(2) \qquad |a_p| < (\sqrt{5}+1)^n M < M\left(\frac{10}{3}\right)^n.$$

On peut obtenir une meilleure approximation pour $|a_p|$ en déterminant ρ de manière que le second membre de l'inégalité (1) ait la plus petite valeur possible : en annulant la dérivée logarithmique du dénominateur, on obtient

$$\frac{n-p}{\rho} = \frac{2p\rho}{1-\rho^2},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{n-p}{n+p}}$$

et

$$(3) \qquad |a_p| < \frac{M}{p^p} \frac{(n+p)^{\frac{n+p}{2}}}{(n-p)^{\frac{n-p}{2}}},$$

formule encore valable pour $p=0$ et $p=n$, à condition de remplacer, dans le premier cas, p^p par l'unité et, dans le second cas, $(n-p)^{n-p}$ par l'unité.

Il est facile d'obtenir le maximum du second membre de l'inégalité lorsque p varie d'une manière continue de 0 à n. On peut espérer ainsi arriver à une limite supérieure applicable au module de tous les coefficients et meilleure que celle fournie par l'inégalité (2).

Un calcul facile, que j'omets, montre que le second membre de (3) est maximum pour

$$p = \frac{n}{\sqrt{2}},$$

et que la valeur de ce second membre est alors

$$M(\sqrt{2}+1)^n < M\left(\frac{5}{2}\right)^n;$$

on peut donc écrire

$$(4) \qquad |a_p| < M\left(\frac{5}{2}\right)^n,$$

inégalité à peine différente de l'inégalité (2).

3. Arrêtons-nous un instant sur l'inégalité relative à a_1; on a, en faisant $p=1$ dans la formule (3),

$$|a_1| < M \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}};$$

or

$$\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} = n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} < ne$$

et

$$|a_1| < n\mathrm{M}e < 3\mathrm{M}n.$$

Si l'on remplace le segment $(-1, +1)$ par le segment $(-h, +h)$, la transformation $x = hx'$ donne

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 hx' + \ldots$$

et

$$|a_1| < \frac{e\mathrm{M}n}{h};$$

donc, si le polynome $\mathrm{P}(x)$ a un module inférieur à M sur un segment de longueur $2h$ porté par l'axe réel, la dérivée $\mathrm{P}'(x)$ a un module inférieur à $\frac{e\mathrm{M}n}{h}$, au milieu de ce segment.

Considérons, en particulier, les points intérieurs au segment $(-x, +x)$ avec $|x| < 1$, chacun de ces points est le milieu d'un segment $(-h, +h)$ contenu dans $(-1, +1)$ si l'on prend $h = 1 - |x|$; si donc $|\mathrm{P}(x)| < \mathrm{M}$ sur le segment $(-1, +1)$, on aura

$$|\mathrm{P}'(x)| < \frac{e\mathrm{M}n}{1-|x|}$$

pour tout point x intérieur à ce segment.

On peut obtenir une inégalité plus précise en introduisant de nouveau le cercle C; chaque point de ce cercle C est le centre d'un cercle γ de rayon $1-\rho$, contenu dans l'anneau limité par les cercles C_ρ et $\mathrm{C}_{\frac{1}{\rho}}$, concentriques à C, ayant respectivement pour rayons ρ et $\frac{1}{\rho}$. On a, en un point z de ce cercle γ,

$$\mathrm{R}'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{R}(z')\,dz'}{(z-z')^2}$$

et par suite, comme $\mathrm{R}(z') = \mathrm{R}\left(\frac{1}{z'}\right)$ a un module inférieur à $\frac{\mathrm{M}}{\rho^n}$ dans l'anneau $\mathrm{C}_\rho\,\mathrm{C}_{\frac{1}{\rho}}$,

$$|\mathrm{R}'(z)| < \frac{\mathrm{M}}{\rho^n(1-\rho)};$$

le minimum du second membre a lieu pour $\rho = \frac{n}{n+1}$ et l'on a

$$|R'(z)| < M\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = Mn\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4Mn,$$

car le nombre $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ décroît lorsque n croît et sa valeur pour $n = 1$ est 4.

De l'égalité

$$P(x) = R(z),$$

on déduit

$$P'(x) = R'(z)\frac{dz}{dx};$$

on a facilement, en tenant compte de

$$z = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

et, sur le cercle C,

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$|P'(x)| = \frac{|R'(z)|}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où

(1) $$|P'(x)| < \frac{4Mn}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (^1)$$

Si l'on cherche le maximum du module de $P'(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ tout entier, on obtiendra une limite supérieure proportionnelle à n^2. On a en effet

$$P'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{E_\rho}\frac{P(x')\,dx'}{(x' - x)^2},$$

d'où

$$|P'(x)| < \frac{M}{\rho^n(a - 1)},$$

car $a - 1$ est le minimum de la distance d'un point du segment $(-1, +1)$ à l'ellipse E_ρ.

Or

$$a - 1 = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 1 = \frac{(1 - \rho)^2}{2\rho},$$

---

(1) M. S. Bernstein a montré que l'on peut remplacer 4 par 1, pour un polynome à coefficients réels (*loc. cit.*, p. 11).

donc

$$|P'(x)| < \frac{2M}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2};$$

lorsque ρ varie, entre 0 et 1, le minimum du second membre a lieu pour

$$\rho = \frac{n-1}{n+1};$$

la valeur de ce second membre est alors

$$\frac{1}{2}M\frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}};$$

or, nous avons vu au début de ce paragraphe que le dernier facteur est inférieur à n^2e^2, donc la valeur minimum est inférieure à

$$\frac{e^2}{2}Mn^2 < 4Mn^2;$$

on a donc sur le segment $(-1, +1)$

$$|P'(x)| < 4Mn^2 \quad (^1).$$

4. On déduit aisément de ce qui précède des limites supérieures pour le module maximum du rapport

$$\frac{P(x') - P(x'')}{(x'-x'')^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

dans lequel x' et x'' appartiennent au segment $(-1, +1)$. On peut écrire en effet

$$\frac{P(x') - P(x'')}{(x'-x'')^\alpha} = \left[\frac{P(x') - P(x'')}{x'-x''}\right]^\alpha [P(x)' - P(x'')]^{1-\alpha}.$$

Le second facteur est, en module, inférieur à $(2M)^{1-\alpha}$. Occupons-nous du premier : si x' et x'' appartiennent au segment $(-1, +1)$ tout entier, la dérivée $P'(x)$ est inférieure en module à $4Mn^2$; si $P(x)$ est à coefficients réels, le maximum de $\left|\frac{P(x')-P(x'')}{x'-x''}\right|$

---

(1) M. S. Bernstein a montré que l'on peut remplacer 4 par 1, dans le cas des polynomes à coefficients réels (*loc. cit.*, p. 13).

est le même que celui de $|P'(x)|$; on a donc

$$\left|\frac{P(x')-P(x'')}{(x'-x'')^\alpha}\right| < (4Mn^2)^\alpha \times (2M)^{1-\alpha} = 2^{1+\alpha}Mn^{2\alpha}.$$

Si $P(x)$ est à coefficients complexes, il suffit de le décomposer en sa partie réelle et sa partie imaginaire; comme, pour chacune d'elles, le rapport admet comme limite supérieure la valeur précédente, il suffira de multiplier par $\sqrt{2}$ cette valeur pour obtenir une limite supérieure du rapport $\frac{P(x')-P(x'')}{(x'-x'')^\alpha}$. On aura donc, dans ce cas, le coefficient $2^{\frac{3}{2}+\alpha}$.

Si x' et x'' restent à l'intérieur d'un segment $(-x, +x)$ intérieur au segment $(-1, +1)$, on aura

$$|P'(x)| < \frac{eMn}{1-|x|},$$

d'où

$$\left|\frac{P(x')-P(x'')}{(x'-x'')^\alpha}\right| < \frac{kMn^\alpha}{[1-|x|]^\alpha},$$

k étant égal à e ou $e\sqrt{2}$ suivant que $P(x)$ a ses coefficients réels ou complexes; on peut prendre aussi

$$|P'(x)| < \frac{4Mn}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où

$$\left|\frac{P(x')-P(x'')}{(x'-x'')^\alpha}\right| < \frac{k'Mn^\alpha}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

avec $k' = 2^{1+\alpha}$ ou $2^{\frac{3}{2}+\alpha}$

5. Nous obtiendrons des résultats plus complets en introduisant la dérivée généralisée de Riemann-Liouville. Nous poserons

$$D_x^0 f(x) = f(x),$$

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_k^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz \qquad (\alpha < 0),$$

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{d^p}{dx^p} D_x^{\alpha-p} f(x) \qquad (0 \leqq p-1 \leqq \alpha < p),$$

formules dans lesquelles $f(x)$ est une fonction uniforme quelconque, Γ la fonction eulérienne de seconde espèce et k une constante que nous prendrons dans la suite fréquemment égale à -1, parce que nous étudierons des fonctions de x définies dans l'intervalle $(-1, +1)$. Nous prendrons toujours, dans ce cas, pour $(x-z)^{-\alpha-1}$, la détermination réelle pour $x=-1$.

On peut d'ailleurs faire varier k : si la dérivée existe pour une valeur particulière k_0, elle existe pour toute valeur de k.

L'égalité

$$\int_{k+a}^{x+a} (x+a-z)^{-\alpha-1} f(z-a)\, dz = \int_{k}^{x} (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\, dz$$

montre que nous pouvons faire subir à la courbe $y=f(x)$ une translation parallèle à Ox et mesurée par a sans changer la valeur de la dérivée.

J'établirai la proposition suivante :

Si une fonction $f(x)$ admet une dérivée bornée d'ordre α, elle admet aussi une dérivée d'ordre α' quelconque inférieur à α.

Nous prendrons $k=0$ et nous supposerons d'abord

$$0<\alpha'<\alpha<1.$$

On a

$$D_x^{\alpha} f(x) = F'(x)$$

avec

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-z)^{-\alpha} f(z)\, dz;$$

supposons $F'(x)$ bornée dans l'intervalle considéré, on peut alors former

$$D_x^{\alpha'-\alpha} F'(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F'(z')\, dz'.$$

Cette expression est la dérivée de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x dx \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F'(z')\, dz'$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x F'(z')\, dz' \int_{z'}^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\, dx$$

ou

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha')\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'} F'(z')\, dz'$$

et, en intégrant par parties et remarquant que $F(0)=0$, cette intégrale devient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}F(z')\,dz'=\mathrm{I}.$$

I peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\,dz'\int_0^{z'}(z'-z)^{-\alpha}f(z)\,dz\\ &=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x f(z)\,dz\int_z^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}(z'-z)^{-\alpha}\,dz';\end{aligned}$$

la dernière intégrale devient, en posant

$$z'-z=t(x-z),$$

$$(x-z)^{-\alpha'}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-\alpha'-1}t^{-\alpha}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha')}(x-z)^{-\alpha'}$$

et

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha')}\int_0^x (x-z)^{-\alpha'}f(z)\,dz.$$

La fonction I admet donc une dérivée et l'on peut écrire

$$\mathrm{I}'=\mathrm{D}_x^{\alpha'}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z)^{\alpha-\alpha'-1}F'(z)\,dz.$$

Si l'on examine le cas particulier de $\alpha'=0$, on retrouve la solution du problème d'inversion classique d'Abel.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où

$$p-1<\alpha\leqq p.$$

Il nous suffira de supposer $\alpha'<\alpha$ placé lui aussi entre $p-1$ et p, car, de proche en proche, on démontrera aussi l'existence d'une dérivée d'ordre quelconque inférieur à α. Supposons donc

$$p-1\leqq\alpha'<\alpha<p$$

en laissant de côté le cas de $\alpha=p$.

Par définition, on a

$$\mathrm{D}_x^{\alpha}f(x)=F^{(p)}(x)$$

avec

$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\int_0^x (x-z)^{p-\alpha-1}f(z)\,dz.$$

Formons encore l'expression

$$D_x^{\alpha'-\alpha} F^{(p)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p)}(z')\,dz' = \Phi(x);$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^x \Phi(x)\,dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x dx\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p)}(z')\,dz' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x F^{(p)}(z')\,dz'\int_{z'}^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\,dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-\alpha')\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'} F^{(p)}(z')\,dz',\end{aligned}$$

et, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^x \Phi(x)\,dx = &-\frac{x^{\alpha-\alpha'} F^{(p-1)}(0)}{\Gamma(\alpha-\alpha'+1)} \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p-1)}(z')\,dz',\end{aligned}$$

on aura de même

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^x \Phi(x)\,dx\,dx = &-\frac{x^{\alpha-\alpha'+1} F^{(p-1)}(0)}{\Gamma(\alpha-\alpha'+2)} \\ &-\frac{x^{\alpha-\alpha'} F^{(p-2)}(0)}{\Gamma(\alpha-\alpha'+1)} \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p-2)}(z')\,dz'\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}_{p} \Phi(x)\,dx\ldots dx = &\ x^{\alpha-\alpha'} Q_{p-1}(x) \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F(z')\,dz',\end{aligned}$$

$Q_{p-1}(x)$ étant un polynome en x de degré $p-1$. Désignons par I cette dernière intégrale, on aura

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(p-\alpha)}\int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\,dz'\int_0^{z'} (z'-z)^{p-\alpha-1} f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(p-\alpha)}\int_0^x f(z)\,dz\int_z^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}(z'-z)^{p-\alpha-1}\,dz;\end{aligned}$$

faisons le changement de variable

$$z' - z = t(x - z)$$

dans la dernière intégrale : elle devient

$$(x-z)^{p-\alpha'-1}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-\alpha'-1}t^{p-\alpha-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha')}(x-z)^{p-\alpha'-1},$$

et, par suite,

$$I = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha')}\int_0^x (x-z)^{p-\alpha'-1}f(z)\,dz.$$

On déduit de là

$$\frac{d^p I}{dx^p} = \Phi(x) + \frac{d^p}{dx^p}[x^{\alpha-\alpha'}Q_{p-1}(x)] = D_x^{\alpha'}f(x).$$

Le cas de $\alpha = p$ se traite de la même manière en remplaçant dans les calculs précédents $F(x)$ par $f(x)$. En posant

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha')}\int_0^x (x-z')^{p-\alpha'-1}f^{(p)}(z)\,dz$$

et

$$I = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha')}\int_0^x (x-z)^{p-\alpha'-1}f(z)\,dz$$

avec $p - 1 \leqq \alpha' < p$, on obtient

$$\frac{d^p I}{dx^p} = \Phi(x) + \frac{d^p}{dx^p}[x^{p-\alpha'}Q_{p-1}(x)] = D_x^{\alpha'}f(x).$$

La proposition est ainsi démontrée dans tous les cas.

6. Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction holomorphe et uniforme dans un domaine contenant le segment $(-1, +1)$; nous désignerons toujours par x l'abscisse d'un point de ce segment. Je me propose de représenter la dérivée $D_x^\alpha f(x)$ par une intégrale de contour.

On a, si $p - 1 \leqq \alpha < p$,

$$D_x^\alpha f(x) = F^{(p)}(x)$$

avec

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\int_{-1}^x (x-z)^{p-\alpha-1}f(z)\,dz.$$

Partons de -1 avec la détermination réelle de $(x-z)^{-\alpha}$ et décrivons dans le sens inverse le lacet $(-1, x)$. L'intégrale étendue au petit cercle est infiniment petite d'ordre $p-\alpha$; on a donc, en traçant un contour quelconque C passant par -1 et contenant le segment $(-1, +1)$,

$$\int_C + \int_{-1}^{x} + \int_{x}^{-1} = 0,$$

le contour C étant parcouru dans le sens direct en partant du point -1 ; lorsqu'on revient au point -1 l'expression $(x-z)^{p-\alpha-1}$ est multipliée par $e^{2i\pi(p-\alpha-1)}$ et la seconde intégrale est égale à $e^{2i\pi(p-\alpha-1)}F(x)$; pour obtenir la dernière, il faut tourner de 2π autour de x et dans le sens inverse, on revient donc à la détermination initiale de $(x-z)^{p-\alpha-1}$ et la troisième intégrale est égale à $-F(x)$. Donc

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)\left[1 - e^{2i\pi(p-\alpha-1)}\right]} \int_C (x-z)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz.$$

Or

$$1 - e^{2i\pi(p-\alpha-1)} = e^{-i\pi(\alpha+1-p)}\, 2i \sin(\alpha+1-p)\pi,$$

et comme

$$\Gamma(p-\alpha)\Gamma(1+\alpha-p) = \frac{\pi}{\sin(1+\alpha-p)\pi},$$

il vient

$$F(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-p)}{2i\pi} \int_C e^{-i\pi(p-\alpha-1)} (x-z)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz$$

ou

$$F(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-p)}{2i\pi} \int_C (z-x)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz.$$

On déduit de là

$$F'(x) = \frac{\Gamma(2+\alpha-p)}{2i\pi} \int_C (z-x)^{p-\alpha-2} f(z)\, dz$$

et

$$F^{(p)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi} \int_C (z-x)^{-\alpha-1} f(z)\, dz$$

ou encore

$$D_x^{(\alpha)} f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha+1}},$$

formule qui généralise l'expression bien connue pour les dérivées d'ordre entier.

7. Nous allons appliquer les résultats précédents à l'étude de la dérivée d'ordre α d'un polynome entier $P(x)$ de degré n dont le module sur le segment $(-1, +1)$ reste inférieur à M. On a, pour un point x de ce segment,

$$D_x^\alpha P(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi} \int_C \frac{P(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha+1}},$$

C désignant un contour simple quelconque passant par le point -1 et entourant le segment $(-1, +1)$. Nous nous limiterons aux valeurs de x comprises dans le segment $(-x_0, +x_0)$ intérieur au précédent. Traçons une ellipse E quelconque de foyers $(-1, +1)$; nous supposerons l'ellipse assez aplatie pour que l'abscisse du centre de courbure au sommet $x = a$ de l'axe focal soit supérieure à x_0.

Soit P un point d'abscisse x sur le segment $(-1, +1)$, calculons la distance de ce point à l'ellipse E; c'est la longueur PM de la normale menée de P distincte du grand axe; appelons P′ le point de rencontre avec Ox de la tangente à l'ellipse E au pied M de cette normale et Q la projection de M sur Ox : on a

$$OP' = \frac{1}{|x|} \qquad OQ = \frac{a^2}{OP'} = a^2|x|,$$

d'où

$$PP' = \frac{1}{|x|} - |x| = \frac{1-x^2}{|x|},$$
$$PQ = a^2|x| - |x| = b^2|x|,$$
$$\overline{PM}^2 = PQ.PP' = b^2(1-x^2).$$

La distance r de P à l'ellipse est donc $b\sqrt{1-x^2}$ et l'on a

$$b\sqrt{1-x_0^2} \leqq r \leqq b.$$

Si l'ellipse E a une excentricité telle que, pour certaines valeurs de x, le point M soit imaginaire, nous conserverons la même valeur de r, ce sera le rayon d'un cercle de centre P, intérieur à l'ellipse et ayant avec elle un double contact imaginaire.

Traçons le cercle γ de centre P et de rayon r qui coupe en A le segment $(-1, x)$ si b est assez petit, l'intégrale prise le long de C peut être remplacée par

$$e^{-2i\pi\alpha}\int_{-1}^{A} + e^{2i\pi\alpha}\int_{\gamma} + \int_{A}^{-1}$$

et son module est inférieur à

$$2\left|\int_{-1}^{A}\right|+\left|\int_{\gamma}\right|.$$

Nous allons évaluer une limite supérieure de chacune de ces intégrales. Pour la seconde

$$I'=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{P(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha+1}},$$

on a

$$|I'|<\frac{\Gamma(\alpha+1)\,M}{\rho^n r^\alpha},$$

puisque à l'intérieur de l'ellipse E, le module de P(z) est inférieur à $\frac{M}{\rho^n}$ et comme

$$r=b\sqrt{1-x^2}\qquad\text{et}\qquad b=\frac{1-\rho^2}{2\rho},$$

$$|I'|<\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\,M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\;\frac{1}{\rho^{n-\alpha}(1-\rho^2)^\alpha}.$$

Déterminons ρ, entre 0 et 1, de manière que le second membre soit minimum, il suffit de prendre

$$\rho_0=\sqrt{\frac{n-\alpha}{n+\alpha}}\qquad(n>\alpha),$$

d'où

$$|I'|<\frac{M\Gamma(\alpha+1)}{\alpha^\alpha(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{(n+\alpha)^{\frac{n+\alpha}{2}}}{(n-\alpha)^{\frac{n-\alpha}{2}}};$$

or, en posant $n=n'\alpha$,

$$\frac{1}{\alpha^\alpha}\cdot\frac{(n+\alpha)^{\frac{n+\alpha}{2}}}{(n-\alpha)^{\frac{n-\alpha}{2}}}=\left[\frac{(n'+1)^{\frac{n'+1}{2}}}{(n'-1)^{\frac{n'-1}{2}}}\right]^\alpha<e^\alpha n^\alpha,$$

car nous avons vu, au paragraphe 3, que le nombre entre crochets est inférieur à en.

Il résulte de là que

$$(1)\qquad |I'|<\frac{k'n^\alpha M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

k' désignant la constante $\Gamma(\alpha+1)e^\alpha$.

Passons à la première intégrale

$$\int_{-1}^{A} = I'' = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_{-1}^{x-r}(x-z)^{-\alpha-1}P(z)\,dz:$$

on a

$$|I''| \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)M}{2\pi}\int_{-1}^{x-r}(x-z)^{-\alpha-1}\,dz,$$

$$\leq \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\pi}\left[\frac{1}{r^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}\right] < \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\pi r^\alpha},$$

et comme $r = b\sqrt{1-x^2}$,

$$|I''| < \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\pi(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,\frac{1}{b^\alpha};$$

or nous avons

$$b = \frac{1-\rho_0^2}{2\rho_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{n^2-\alpha^2}},$$

$$\frac{1}{b} < \frac{n}{\alpha},$$

d'où

$$2|I''| < \frac{M\Gamma(\alpha)n^\alpha}{\alpha^\alpha\times\pi(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{k''n^\alpha M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

et, si $k_1 = k' + k''$,

$$|D_x^\alpha P(x)| < \frac{k_1 n^\alpha M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Le calcul que nous venons de faire est encore applicable au cas où α est un entier; dans ce dernier cas, les intégrales prises le long du segment $(-1, A)$ ont une somme nulle et il suffit d'évaluer une limite supérieure du module de l'intégrale prise le long du cercle γ.

Pour un point quelconque intérieur au segment $(-x_0, +x_0)$, nous aurons, dans tous les cas,

$$(2)\qquad |D_x^\alpha P(x)| < \frac{k_1}{(1-x_0^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,n^\alpha M = kn^\alpha M.$$

La validité du raisonnement précédent suppose le point A à l'intérieur du segment $(-1, x)$; il faut pour cela que

$$r < 1 + x$$

ou

$$b < \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $(-x_0, +x_0)$, x_0 étant positif, il suffit que

$$b < \sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}},$$

et, en remplaçant b par sa valeur $\frac{\alpha}{\sqrt{n^2-\alpha^2}}$, il vient

$$n > \alpha\sqrt{\frac{2}{1-x_0}}.$$

L'inégalité (2) n'est donc vérifiée qu'à partir d'une certaine valeur de n dépendant de x_0, mais il suffit de modifier la valeur de k pour supposer qu'elle est satisfaite quel que soit n. La nouvelle valeur de k dépendra alors de x_0.

8. Considérons maintenant des fonctions de plusieurs variables, par exemple de deux variables réelles x et y : nous nous placerons en général dans le domaine carré (Γ) défini par les inégalités

$$-1 \leqq x \leqq +1, \qquad -1 \leqq y \leqq +1.$$

Soit $P(x, y)$ un polynome de degré m en x et de degré n en y; supposons que le module de ce polynome reste inférieur à M lorsque le point (x, y) est dans le carré (Γ); soit (Γ') un rectangle concentrique à (Γ) dont les côtés sont parallèles aux axes Ox, Oy et situé tout entier à l'intérieur de (Γ). Proposons-nous d'évaluer une limite supérieure du module des dérivées de $P(x, y)$ pour les points du domaine (Γ').

Donnons à y une valeur fixe y_0 de manière que la droite $y = y_0$ coupe le rectangle (Γ') suivant le segment AB. Pour les points de AB, on a

$$\left|\frac{\partial^p P(x, y_0)}{\partial x^p}\right| \leqq k' m^p \mathrm{M},$$

p étant un entier et k' une constante indépendante de y_0. Il en résulte que, pour tout point de (Γ'),

$$\left|\frac{\partial^p P(x, y)}{\partial x^p}\right| \leqq k' m^p M.$$

Cette dérivée $p^{\text{ième}}$ est encore un polynome $P_1(x, y)$, en particulier un polynome en y de degré n auquel on peut appliquer le résultat précédent; on aura

$$\left|\frac{\partial^q P_1(x, y)}{\partial y^q}\right| \leqq k'' n^q (k' M m^p),$$

q étant un entier et k'' une constante. Par suite, en posant $k = k' k''$,

$$\left|\frac{\partial^{p+q} P(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}\right| \leqq k m^p n^q M.$$

9. Pour étendre ce résultat aux dérivées d'ordre non entier, nous adopterons la définition suivante : si $p - 1 \leqq \alpha < p$ et $q - 1 \leqq \beta < q$, la dérivée d'ordre α en x et β en y de la fonction $f(x, y)$ est

$$D^{\alpha+\beta}_{x^\alpha y^\beta} f(x, y) = \frac{\partial^{p+q} F(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}$$

en posant

$$F(x, y) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)\Gamma(q-\beta)} \times \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{y} (x-z)^{p-\alpha-1} (y-u)^{q-\beta-1} f(z, u)\, dz\, du.$$

Supposons que toutes les dérivées de F jusqu'à l'ordre $p+q$ soient continues et montrons qu'on peut obtenir la dérivée d'ordre $\alpha+\beta$ en prenant d'abord la dérivée d'ordre α en x de la fonction $f(x, y)$, puis la dérivée d'ordre β en y de cette première dérivée ou en faisant l'inverse. Posons pour cela

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} f(z, y)\, dz.$$

On aura

$$(1) \qquad F(x, y) = \frac{1}{\Gamma(q-\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{q-\beta-1} \Phi(x, u)\, du.$$

La dérivée d'ordre q en y de $F(x, y)$ existe, c'est-à-dire que $\Phi(x, y)$ admet une dérivée d'ordre β; on en déduit, par les formules du n° 5, en remarquant que $F(-1, y)$ est nul quel que soit y

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{\beta-1} F_{y^q}^{(q)}(x, u)\, du.$$

Or, la fonction $F_{y^q}^{(q)}(x, y)$ admet une dérivée continue d'ordre p en x, il en est de même pour $\Phi(x, y)$ et

$$\Phi_{x^p}^{(p)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{\beta-1} F_{x^p y^q}^{(p+q)}(x, u)\, du.$$

Cette expression, en tenant compte de la valeur de $\Phi(x, y)$, n'est autre que $D_{x\alpha}^{(\alpha)} f(x, y)$ dont on montre ainsi l'existence. Dérivons maintenant p fois par rapport à x les deux membres de l'égalité (1), on aura

$$F_{x^p}^{(p)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(q-\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{q-\beta-1} D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, u)\, du;$$

cette nouvelle fonction admet par hypothèse une dérivée d'ordre q en y qui est par définition la dérivée d'ordre β en y de $D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, y)$. On obtient ainsi

$$D_{x^\alpha y^\beta}^{\alpha+\beta} f(x, y) = F_{x^p y^q}^{(p+q)}(x, y) = D_{y\beta}^{\beta} D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, y).$$

On démontrerait de même l'égalité

$$D_{x^\alpha y^\beta}^{\alpha+\beta} f(x, y) = D_{x\alpha}^{\alpha} D_{y\beta}^{\beta} f(x, y).$$

10. Il est maintenant facile d'étendre aux dérivées partielles d'ordre quelconque les résultats du n° **8**. Soit $P(x, y)$ un polynome de degré m en x, de degré n en y et dont le module ne dépasse pas M, dans le carré Γ. On a, dans Γ',

$$|D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, y)| < k' m^\alpha \mathrm{M};$$

Pour obtenir cette dérivée, il faut d'abord calculer l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} P(z, y)\, dz$$

qui est un polynome en y, de degré n, $Q(y)$; ensuite, prendre la dérivée d'ordre p en x de ce polynome. Le résultat est encore un polynome en y de degré n, $R(y)$, car les coefficients du polynome $Q(y)$ sont de la forme $x^{-\alpha}S(x)$, S étant un polynome en x et peuvent être dérivés p fois. Appliquons au polynome $R(y)$ le théorème relatif au maximum du module d'une dérivée d'ordre β d'un polynome,

$$|D^{\beta}_{y^\beta} R(y)| < k'' n^\beta N,$$

N étant une limite supérieure de $R(y)$; on peut prendre

$$N = k' m^\alpha M,$$

d'où, en posant $k = k'k''$,

$$|D^{\alpha+\beta}_{x^\alpha y^\beta} f(x, y)| < k m^\alpha n^\beta M.$$

CHAPITRE II.

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

11. Je vais rappeler un théorème de M. S. Bernstein ([1]) liant l'existence des dérivées d'une fonction $f(x)$ à la rapidité de la décroissance de la meilleure approximation de cette fonction par un polynome $P_n(x)$ de degré n, lorsque l'entier n croît indéfiniment. Comme je me propose d'étendre le théorème de M. S. Bernstein au cas des dérivées d'ordre quelconque, entier ou non, je demontrerai d'abord la proposition suivante :

Soit $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions convergeant uniformément vers $f(x)$; si la suite $f_1^{(\alpha)}(x)$, $f_2^{(\alpha)}(x), \ldots, f_n^{(\alpha)}(x), \ldots$ converge uniformément, elle a pour limite $f^{(\alpha)}(x)$.

Je supposerai, comme toujours dans la suite, que les fonctions sont définies et bornées dans l'intervalle $(-1, +1)$ et je dirai qu'une suite u_n converge uniformément lorsque la série dont le terme général est $(u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément.

Soit p le plus petit entier dépassant α, posons

$$F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} f_n(z)\, dz \qquad (p - 1 \leqq \alpha < p),$$

([1]) *Sur l'ordre de la meilleure approximation*, etc., p. 22.

on a

$$f_n^{(\alpha)}(x) = F_n^{(p)}(x).$$

Soit, de même,

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz,$$

on aura

$$F(x) - F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} [f(z) - f_n(z)]\, dz$$

et

$$|F(x) - F_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1}\, dz \leqq \frac{2^{p-\alpha}\varepsilon}{\Gamma(p-\alpha+1)},$$

si n est assez grand pour que $f(x) - f_n(x)$ ait, dans l'intervalle $(-1, +1)$, un module inférieur à ε.

La suite $F_n(x)$ converge donc uniformément vers $F(x)$; mais la suite $F_n^{(p)}(x)$ converge uniformément, par hypothèse; elle a donc pour limite $F^{(p)}(x)$, c'est-à-dire $f^{(\alpha)}(x)$. Comme la suite $F_n^{(p)}(x)$ n'est autre que la suite $f_n^{(\alpha)}(x)$, le théorème est démontré.

12. Voici maintenant la proposition de M. S. Bernstein dont je modifie l'énoncé pour l'étendre au cas d'une dérivée quelconque.

Si, quel que soit l'entier n, il existe un polynome $P_n(x)$ de degré n, tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{n^\alpha},$$

A et α étant des constantes positives, $f(x)$ possède des dérivées d'ordre α' inférieur à α.

Supposons d'abord $\alpha' < \alpha - 1$ $(\alpha > 1)$, on a

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| < \frac{2A}{n^\alpha};$$

cette différence est un polynome entier de degré $n+1$ auquel nous pouvons appliquer les théorèmes du Chapitre précédent, donc

$$|P_{n+1}^{(\alpha')}(x) - P_n^{(\alpha')}(x)| < \frac{2kA(n+1)^{\alpha'}}{n^\alpha} < \frac{B}{n^{\alpha-\alpha'}};$$

comme $\alpha - \alpha' > 1$, la série $[P_{n+1}^{(\alpha')} - P_n^{(\alpha')}]$ est uniformément convergente et sa somme représente $f^{(\alpha')}(x)$.

Supposons maintenant que $\alpha - 1 \leqq \alpha' < \alpha$ et calculons une limite supérieure du reste de la série $P_n^{(\alpha')}(x)$ lorsqu'on s'arrête au terme de rang n; soit $2^{m-1} \leq n < 2^m$; le reste est représenté par la série

$$[P_{2^m}^{(\alpha')} - P_n^{(\alpha')}] + [P_{2^{m+1}}^{(\alpha')} - P_{2^m}^{(\alpha')}] + \ldots.$$

Le premier terme de cette série est, en valeur absolue, inférieur à

$$\frac{2kA2^{m\alpha'}}{n^\alpha} < \frac{2kA2^{m\alpha'}}{2^{(m-1)\alpha}} = 2^{1+\alpha}kA\frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')m}},$$

le second terme est inférieur à

$$\frac{2kA2^{(m+1)\alpha'}}{2^{m\alpha}} = 2^{1+\alpha}kA\frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')(m+1)}},$$

et ainsi de suite, le reste est donc inférieur à

$$\frac{B}{2^{(\alpha-\alpha')m}}\left[1 + \frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')}} + \ldots + \frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')p}} + \ldots\right] = \frac{C}{2^{(\alpha-\alpha')m}} < \frac{C}{n^{\alpha-\alpha'}},$$

B et C désignant des constantes; comme $\alpha - \alpha' > 0$, la suite $P_n^{(\alpha')}(x)$ est uniformément convergente et a pour limite $f^{(\alpha')}(x)$; bien entendu, cette seconde partie de la démonstration s'applique aussi au cas où $\alpha' < \alpha - 1$. Les raisonnements supposent que x varie dans un intervalle quelconque *intérieur* à $(-1, +1)$. Ils montrent que, dans un tel intervalle, la dérivée d'ordre α' *entier* de $f(x)$ peut être approchée par un polynome de degré n au plus avec une erreur moindre que $\frac{A'}{n^{\alpha-\alpha'}}$.

13. Donnons à la variable x des accroissements égaux à h, nous pourrons former les différences

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta_h^{(2)} f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$
$$\Delta_h^{(3)} f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous désignerons plus brièvement ces différences par Δ, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, ... Nous allons montrer comment l'hypothèse que l'un des rapports $\left|\frac{\Delta^{(r)}}{h^r}\right|$ est borné entraîne pour $f(x)$ l'existence de dérivées d'ordre inférieur à r. Pour faire cette démonstration, nous établirons que si $\left|\frac{\Delta^{(r)}}{h^r}\right|$ est borné, on peut représenter $f(x)$ par un polynome $P_n(x)$ avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^r}$; la proposition du paragraphe précédent nous conduira au résultat.

Nous prouverons l'existence des polynomes $P_n(x)$ en adoptant la marche suivie par M. Dunham Jackson ([1]) pour le cas où $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à un certain ordre; je modifierai sa démonstration sur quelques points et, en particulier j'introduirai des fonctions de Bessel à la place des puissances de la fonction $\frac{\sin x}{x}$. Je désignerai par $J_h(x)$ la fonction de Bessel d'ordre entier h, c'est-à-dire la série entière

$$(1)\qquad J_h(x) = \frac{x^h}{2^h}\left[\frac{1}{h!} - \frac{x^2}{2^2 . 2!(h+2)!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{2^{2p}p!(h+p)!} + \ldots\right];$$

on a aussi

$$(2)\qquad J_h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - h\varphi)\,d\varphi$$

et

$$J_h(x) = \frac{x^h}{1.3.5\ldots(2h-1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2h}\varphi\,d\varphi.$$

Appelons I_h la dernière intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2h}\varphi\,d\varphi,$$

on démontre que

$$\int_0^\infty I_h(x)\,dx = 1 \ ([2]);$$

donc, si l'on pose

$$K_h(x) = \frac{1}{8e} I_h\left(\frac{x}{4e}\right),$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_h(x)\,dx = 1.$$

([1]) *Ueber die genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebener Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung* (Göttingen, Mémoire couronné et dissertation inaugurale, 1911).

([2]) Pour cette formule et les précédentes, *voir*, par exemple, GRAY and MATHEWS, *Treatise on Bessel functions* (Londres, Macmillan and Co, 1895).

D'ailleurs $I_h(x) = C\,\frac{J_h(x)}{x^h}$ et comme $|J_h(x)| \leqq 1$ d'après la formule (2), on voit que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r I_h(x)|\,dx$ a un sens pour $h > r+1$; il en est de même des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r K_h(x)|\,dx$. C'est la fonction $K_h(x)$ que nous utiliserons dans la suite. Nous désignerons par $K(x)$, sans indice, une fonction $K_h(x)$ pour laquelle h est supérieur ou égal à 2.

14. Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\left|\frac{\Delta_h}{h}\right|$ est borné. Nous pouvons toujours supposer que $f(-1) = f(+1) = 0$, en retranchant au besoin de $f(x)$ une fonction linéaire; nous prendrons $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$; ainsi la fonction $f(x)$ est définie quel que soit x et l'on a, pour toute valeur de x, $|\Delta h| < A|h|$, A étant une constante. Évaluons l'intégrale

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\frac{\alpha}{n}} K(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right) - f(x)\right] K(\alpha)\,d\alpha.$$

Nous avons ici

$$\left|f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right) - f(x)\right| < A\,\frac{|\alpha|}{n},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha K(\alpha)|\,d\alpha = B \qquad (h \geqq 3),$$

donc

$$|S| < \frac{A}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha K(\alpha)|\,d\alpha = \frac{AB}{n}.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,K(\alpha)\,d\alpha = f(x)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right) K(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} nf(\alpha)\,K[n(\alpha - x)]\,d\alpha$$
$$= \int_{-1}^{+1} nf(\alpha)\,K[n(\alpha - x)] = U_n(x),$$

donc

$$|f(x) - U_n(x)| < \frac{AB}{n}.$$

D'autre part, si l'on développe $K(x)$ en série entière, le terme général est, à un facteur constant près,

$$(-1)^p\left(\frac{x}{8e}\right)^{2p}\frac{1}{p!(h+p)!};$$

pour $K[n(\alpha-x)]$, le terme général, de rang $p+1$, est

$$(-1)^p\frac{n^{2p}(\alpha-x)^{2p}}{(8e)^{2p}p!(h+p)!}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est, en valeur absolue,

$$\frac{n^2(\alpha-x)^2}{(8e)^2p(h+p)}<\frac{n^2}{4e^2(2p)^2}$$

si, comme nous le supposerons désormais, $|x|$ est inférieur à 1. Lorsque $2p \geqq n$, le rapport est inférieur à 1, la série alternée a des termes dont la valeur absolue, à partir d'un rang supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$, va en décroissant; le reste de cette série ne dépasse donc pas, en module, la valeur de son premier terme.

Supposons n pair et égal à 2ν, nous prendrons $p=\nu$, on a alors, en prenant la somme des p premiers termes de la série, un polynome $Q_n(\alpha-x)$ de degré $n-2$ et le reste R_n vérifie l'inégalité

$$R_n \leqq C\frac{\nu^{2\nu}}{(2e)^{2\nu}(\nu!)^2}.$$

Si n est impair et égal à $2\nu-1$, nous prendrons encore $p=\nu$; $Q_n(\alpha-x)$ sera un polynome de degré $n-1$ et le reste R_n vérifiera l'inégalité

$$R_n \leqq C\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^{2\nu}}{(2e)^{2\nu}(\nu!)^2}<C\frac{\nu^{2\nu}}{(2e)^{2\nu}(\nu!)^2}.$$

Or l'expression $u_\nu=\frac{\nu^{2\nu}}{e^{2\nu}(\nu!)^2}$ décroît avec ν, car le rapport

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}=\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\frac{1}{e}\right]^2$$

est inférieur à 1, donc

$$u_\nu<u_1=\frac{1}{e^2}<1,$$

$$R_n<\frac{C}{2^{2\nu}}\leqq\frac{C}{2^n}.$$

On a, par suite,

$$|nK[n(\alpha-x)]-nQ_n(\alpha-x)|<\frac{nC}{2^n}<\frac{D}{n}$$

et

$$\left| U_n(x) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha) n Q_n(\alpha - x)\, d\alpha \right| < \frac{D}{n} \int_{-1}^{+1} |f(\alpha)|\, d\alpha = \frac{DE}{n};$$

$Q_n(\alpha - x)$ étant un polynome entier de degré inférieur à n, il en est de même de l'intégrale

$$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(\alpha) n Q_n(\alpha - x)\, d\alpha,$$

donc,

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{AB + DE}{n} = \frac{F}{n}.$$

Si nous avions seulement supposé que

$$|\Delta f(x)| < k|h|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1),$$

le même raisonnement nous eût conduits à un polynome $P_n(x)$ tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{G}{n^\alpha}.$$

Il en résulte que $f(x)$ possède des dérivées d'ordre $\alpha' < \alpha$. Donc :

Si une fonction $f(x)$ satisfait, dans l'intervalle $(-1, +1)$, à une condition de Lipschitz d'exposant α, cette fonction admet des dérivées d'un ordre quelconque α' inférieur à α (1).

15. Supposons maintenant que l'un des rapports $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right|$ soit borné et prenons, par exemple, $r = 2$. Nous formerons l'intégrale

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\frac{\alpha}{n}}^{(2)} K(\alpha)\, d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{2\alpha}{n}\right) - 2f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) + f(x) \right] K(\alpha)\, d\alpha, \end{aligned}$$

la fonction $K(x)$ correspondant, cette fois, à un indice h supérieur ou égal à 4. Nous ferons varier x dans un intervalle intérieur à $(-1, +1)$; nous prendrons l'intervalle $(-1 + \delta, 1 - \delta)$; pour

(1) Pendant la correction des épreuves, j'ai connaissance d'un travail de M. Hermann Weyl où cette proposition est établie par une étude des coefficients de Fourier de la fonction : *Bemeskungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordunung* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden gesellschaft in Züroch*, 19.7 p. 296).

l'intégration, nous supposerons que $f(x)=0$ pour $|x|>1$. Si

$$\frac{|\alpha|}{n} \leqq \frac{\delta}{2} \qquad \text{ou} \qquad |\alpha| \leqq \frac{n\delta}{2},$$

les points x, $x+\frac{\alpha}{n}$, $x+\frac{2\alpha}{n}$ sont intérieurs au segment $(-1, +1)$ et l'on a

$$\left|f\left(x+\frac{2\alpha}{n}\right)-2f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)+f(x)\right|<\mathrm{A}'\frac{\alpha^2}{n^2}.$$

Si $|\alpha|>\frac{n\delta}{2}$, on a l'inégalité

$$\frac{\left|f\left(x+\frac{2\alpha}{n}\right)-2f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)+f(x)\right|}{\frac{\alpha^2}{n^2}}<\frac{4\mathrm{M}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}=\mathrm{A}'',$$

M désignant le module maximum de $f(x)$; on a donc, quel que soit α,

$$\left|\Delta^{(2)}_{\frac{\alpha}{n}}\right|<\mathrm{A}\,\frac{\alpha^2}{n^2}$$

et

$$|\mathrm{S}|<\frac{\mathrm{A}}{n^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\alpha^2\mathrm{K}(\alpha)|\,d\alpha=\frac{\mathrm{AB}}{n^2}.$$

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{K}(\alpha)\,d\alpha \qquad = f(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)\mathrm{K}(\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty} nf(\alpha)\mathrm{K}[n(\alpha-x)]\,d\alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{2\alpha}{n}\right)\mathrm{K}(\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty} nf(\alpha)\,\frac{\mathrm{K}\left[n\frac{\alpha-x}{2}\right]}{2}\,d\alpha,$$

et, comme $f(\alpha)$ est nul pour $|\alpha|>1$, il suffira de prendre ces dernières intégrales entre les limites -1 et $+1$. Soit

$$\mathrm{U}_n(x)=\int_{-1}^{+1} nf(\alpha)\left\{2\mathrm{K}[n(\alpha-x)]-\frac{1}{2}\mathrm{K}\left[n\frac{\alpha-x}{2}\right]\right\}d\alpha;$$

on aura

$$|f(x)-\mathrm{U}_n(x)|<\frac{\mathrm{AB}}{n^2}.$$

Nous pouvons maintenant remplacer

$$K[n(\alpha - x)] \quad \text{et} \quad K\left[n\frac{\alpha - x}{2}\right]$$

par des polynomes de degrés inférieurs à n et avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{2^n}\cdot$ On peut donc remplacer la différence L_n placée entre accolades par un polynome $Q_n(\alpha - x)$ avec une erreur inférieure à $\frac{C}{2^n}\cdot$ Nous aurons alors

$$|nL_n(\alpha - x) - nQ_n(\alpha - x)| < \frac{nC}{2^n} < \frac{D}{n^2},$$

et

$$\left|U_n(x) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha) n Q_n(\alpha - x)\, d\alpha\right| < \frac{D}{n^2}\int_{-1}^{+1} |f(\alpha)|\, d\alpha = \frac{DE}{n^2};$$

par conséquent, en désignant par $P_n(x)$ l'intégrale du premier membre

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{AB + DE}{n^2} = \frac{F}{n^2}.$$

Si l'on avait seulement supposé que $\left|\frac{\Delta_h^{(2)}}{h^\alpha}\right|$ $(1 \leqq \alpha \leqq 2)$ est borné, les mêmes raisonnements auraient conduit à un polynome $P_n(x)$ tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{G}{n^\alpha}.$$

Le cas général se traite de la même manière; il suffit d'introduire l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\frac{\alpha}{n}}^{(r)} K(\alpha)\, d\alpha,$$

dans laquelle $K(\alpha)$ correspond à un indice $h \geqq r + 2$. On représente alors $f(x)$, avec une erreur moindre que $\frac{AB}{n^r}$ par une intégrale $V_n(x)$ portant sur une somme de fonctions de la forme $nK\left[n\,\frac{\alpha - x}{s}\right]$, s étant un des nombres $1, 2, \ldots, r$. A son tour, chaque fonction nK est remplacée par un polynome, en limitant son développement en série au terme de degré $n - 1$ ou $n - 2$; la nouvelle erreur est de l'ordre de $\frac{n}{2^n}$ et par conséquent d'un ordre inférieur à $\frac{1}{n^r}$. On en déduit, comme plus haut, qu'on peut trouver un polynome $P_n(x)$ tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{F}{n^r}.$$

Si c'est le rapport $\left|\frac{\Delta^{(r)}}{h^\alpha}\right|$ qui est borné, avec $r - 1 \leqq \alpha \leqq r$, on aura un polynome $P_n(x)$ pour lequel

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{G}{n^\alpha}.$$

Appliquons maintenant à la fonction $f(x)$ le théorème du n° **11**, nous voyons qu'elle admet des dérivées d'un ordre quelconque inférieur à r dans le premier cas ou inférieur à α dans le second. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Soit $f(x)$, une fonction bornée dans l'intervalle $(-1, +1)$ et telle que le rapport $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}$ ait un module borné dans cet intervalle; pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle, la fonction admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à r. Si le rapport $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^\alpha}$, dans lequel α est compris entre $r - 1$ et r, a un module borné, la fonction admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à α.

Par exemple, si $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est borné, $f(x)$ admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à 1; pour la dérivée d'ordre 1, on sait que M. Lebesgue a démontré qu'elle existe presque partout. Si $\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$ est borné, $f(x)$ admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à 2; en particulier, la dérivée première existe partout (¹). Pour le cas général où $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right|$ est borné, les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(r-1)}(x)$ existent en tout point intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$.

(¹) Il en est de même si le rapport $\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^\alpha}$ dans lequel $1 < \alpha \leqq 2$, est borné.

16. Les démonstrations précédentes s'appliquent au cas où la fonction $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$, la dérivée d'ordre $r-1$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'exposant β. On a, en effet,

$$\frac{\Delta_h^{(r)} f(x)}{h^{r-1}} = \frac{\Delta_h^{(r-1)} f(x+h) - \Delta_h^{(r-1)} f(x)}{h^{r-1}} = \frac{\Delta_h^{(r-1)} f'(x_1)}{h^{r-2}};$$

de même,

$$\frac{\Delta_h^{(r-1)} f'(x_1)}{h^{r-2}} = \frac{\Delta_h^{(r-2)} f''(x_2)}{h^{r-3}} = \ldots = \Delta f^{(r-1)}(x_{r-1}).$$

Par hypothèse, cette dernière différence a un module inférieur à $|h|^\beta$, donc $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^{r+\beta-1}}\right|$ est borné. Si la dérivée d'ordre r existe, la dernière différence est égale à $hf^{(r)}(x_r)$ et $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right|$ est borné en même temps que $|f^{(r)}(x)|$.

On peut observer que, dans le cas précédent, il est possible de prolonger $f(x)$ dans un intervalle $(-1-\delta, 1+\delta)$ contenant $(-1, +1)$ de manière à conserver les hypothèses faites sur $f(x)$. On en déduit que l'approximation par les polynomes $P_n(x)$ est valable uniformément pour tout le segment $(-1, +1)$; mais je renverrai pour ce point au travail de M. Dunham Jackson.

Enfin, on peut encore remarquer que l'existence, pour la fonction $f(x)$, des dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$, la dérivée d'ordre $r-1$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'exposant β, entraîne l'existence des dérivées de tous les ordres, entiers ou non, inférieurs à $r+\beta-1$.

CHAPITRE III.

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

17. L'ordre de grandeur de la meilleure approximation d'une fonction $f(x)$ par un polynome de degré n dépend des propriétés différentielles de cette fonction. Si nous passons à une fonction de deux variables $f(x, y)$, la meilleure approximation sera liée aux propriétés différentielles par rapport à x et par rapport à y. Il y aura donc lieu de faire intervenir séparément le degré du polynome par rapport à x et son degré par rapport à y. Si l'on se bornait à considérer le degré d'un polynome $P(x, y)$ par rapport à l'ensemble des variables, on n'arriverait pas à modeler exactement l'ordre de grandeur de la meilleure approximation sur les propriétés différentielles.

Nous introduirons donc des polynomes $P_{m,n}(x, y)$ de degré m en x et de degré n en y et nous serons conduits à représenter la meilleure approximation, pour un polynome de degrés m et n, par des expressions de la forme $\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$; A et α, B et β étant des nombres positifs dépendant des propriétés différentielles de $f(x, y)$ respectivement par rapport à x et par rapport à y.

18. Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans le carré $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$; nous supposons que, quels que soient les entiers m et n, il existe un polynome $P_{m,n}(x, y)$, de degrés m et n, vérifiant l'inégalité

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$$

et nous nous proposons d'en déduire des conséquences relatives à l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$.

Soient $\alpha \geqq \beta$ et α', β' deux nombres positifs, entiers ou non, respectivement inférieurs à α et β; nous désignerons par $P_{m,n}^{(\alpha',\beta')}$ la dérivée partielle $\frac{\partial^{\alpha'+\beta'} P_{m,n}(x, y)}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'}}$. On a

$$|P_{m+\mu,n+\nu}(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{2A}{m^\alpha} + \frac{2B}{n^\beta},$$

$$\left|P_{m+\mu,n+\nu}^{(\alpha',\beta')} - P_{m,n}^{(\alpha',\beta')}\right| < k\left(\frac{2A}{m^\alpha} + \frac{2B}{n^\beta}\right)(m+\mu)^{\alpha'}(m+\nu)^{\beta'}.$$

Il suffit, en effet, d'appliquer au polynome du premier membre de la première inégalité, dont les degrés sont $m + \mu$ et $n + \nu$ le résultat du n° 10, en supposant le point (x, y) dans un carré intérieur au carré initial.

Prenons

$$n = E\left[m^{\frac{\alpha}{\beta}}\right], \qquad n + \nu = E\left[(2m)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right],$$

en désignant par $E[x]$ la partie entière du nombre x; on pourra écrire

$$n > m^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1,$$

$$n^\beta > m^\alpha \left[1 - m^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]^\beta \geqq 2^{-\beta} m^\alpha \qquad (\text{si } m \geqq 2),$$

et, en prenant $\mu = m$,

$$\left(\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}\right)(m+\mu)^{\alpha'}(n+\nu)^{\beta'}$$

$$< \frac{1}{m^\alpha}(A + 2^\beta B)(2m)^{\alpha'}(2m)^{\frac{\alpha\beta'}{\beta}} = C\frac{m^{\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{\beta}}}{m^\alpha}.$$

Soit $\alpha\beta - \beta\alpha' - \alpha\beta' = \gamma$, la limite supérieure précédente est égale à $\dfrac{C}{m^{\frac{\gamma}{\beta}}}$ et, par suite,

$$\left| P^{(\alpha',\beta')}_{m+\mu,n+\nu} - P^{(\alpha',\beta')}_{m,n} \right| < \frac{2kC}{m^{\frac{\gamma}{\beta}}} = \frac{2kC}{\left(2^{\frac{\gamma}{\beta}}\right)^s},$$

si nous choisissons pour m la suite des valeurs 2^s. Nous obtenons ainsi une suite infinie de polynones $P_s(x, y)$ dont les degrés sont respectivement 2^s et $E\left[2^{\frac{s\alpha}{\beta}}\right]$. Cette suite est absolument convergente si $\gamma > 0$ et sa limite est égale à la dérivée $f^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}$. Il suffirait pour s'en assurer de répéter, pour le cas de plusieurs variables, la démonstration que j'ai donnée au n° **11** : il n'y a qu'à remplacer dans cette démonstration les intégrales simples par des intégrales doubles.

La condition $\gamma > 0$ peut s'écrire

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$$

et s'interpréter géométriquement de la manière la plus simple. Soient $O\alpha$, $O\beta$ deux axes. Faisons correspondre à chaque dérivée d'ordres α' et β', le point de coordonnées α' et β'. Soient A et B les points $(\alpha, 0)$ et $(0, \beta)$. Le point (α', β') doit être à l'intérieur du triangle OAB.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si, quels que soient les entiers positifs m et n, il existe un *polynome* $P_{m,n}(x, y)$ *vérifiant l'inégalité*

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta},$$

en tout point (x, y) *intérieur au carré* $|x| < 1$, $|y| < 1$, *la fonction* $f(x, y)$ *admet, à l'intérieur du carré, toute dérivée* $f^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}$ *pour laquelle*

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1.$$

19. Nous allons maintenant établir, relativement aux fonctions de deux variables pour lesquelles certains rapports des différences partielles à une puissance de l'accroissement sont bornés, des propositions analogues à celles du Chapitre II. Nous désignerons par $\Delta_h^{(r)}$, la différence d'ordre r pour les accroissements $h, 2h, \ldots, rh$ donnés à x et par $\Delta_k^{(s)}$, la différence d'ordre s pour les accroissements $k, 2k, \ldots, sk$ donnés à y.

Supposons d'abord que les rapports $\left|\frac{\Delta_h}{h}\right|$ et $\left|\frac{\Delta_k}{k}\right|$ soient bornés et que l'on ait

$$\left|\frac{\Delta_h}{h}\right| < A, \qquad \left|\frac{\Delta_k}{k}\right| < A'.$$

Nous supposerons que $f(x, y)$ est égal à 0 à l'extérieur du carré (Γ) de centre O, de côtés parallèles aux axes et égaux à 2; nous ferons varier le point (x, y) à l'intérieur d'un carré (Γ') concentrique au premier dont les côtés, égaux à $2(1 - \delta)$, seront parallèles aux axes. Soit M le module maximum de $f(x, y)$ dans (Γ). Il existe un polynome $Q_m(x)$, de degré m, tel que

$$(1) \qquad \left|f(x, y) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y)\, m\, Q_m[m(\alpha - x)]\, d\alpha\right| < \frac{F}{m},$$

F ne dépendant que de A, M, δ.

De même, il existe un polynome $Q_n(y)$, de degré n, tel que

$$f(\alpha, y) = \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\, n\, Q_n[n(\beta - y)]\, d\beta + \frac{\theta' F'}{n} \qquad (|\theta'| < 1),$$

F′ ne dépendant que de A′, M, δ. On a d'ailleurs

$$m\, Q_m[m(\alpha - x)] = m\, K[m(\alpha - x)] + \frac{\theta D}{m} \qquad (|\theta| < 1),$$

D ne dépendant que de M. En remplaçant $f(\alpha, y)$ par sa valeur et posant, pour abréger l'écriture,

$$\mathfrak{O}_1 F_m = m F_m[m(\alpha - x)],$$

F_m étant une fonction quelconque, il vient

$$(2)\quad \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y)\mathfrak{O}_1 Q_m d\alpha = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\mathfrak{O}_1 Q_m \mathfrak{O}_1 Q_n d\alpha\, d\beta + \frac{F'}{n}\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y)\,\mathfrak{O}_1 Q_m\, d\alpha$$

La dernière intégrale peut s'écrire

$$\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y)\mathfrak{O}_1 K\, d\alpha + \frac{D}{m}\int_{-1}^{+1} \theta\theta' f(\alpha, y)\, d\alpha.$$

La première de ces intégrales peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' f\left(x + \frac{\alpha}{m}, y\right) K(\alpha)\, d\alpha$$

et son module est inférieur à

$$M\int_{-\infty}^{+\infty} |K(\alpha)|\, d\alpha = MN;$$

la seconde est inférieure à $\dfrac{2DM}{m}$; donc, en remplaçant dans (2)

$$\left|\int_{-1}^{+1} f(\alpha,y)\mathfrak{O}_1 Q_m d\alpha - \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\mathfrak{O}_1 Q_m \mathfrak{O}_1 Q_n d\alpha\, d\beta\right| < \frac{MNF'}{n} + \frac{2DMF'}{mn} \leqq \frac{MF'(N+2D)}{n} = \frac{G}{n},$$

d'où, en tenant compte de l'inégalité (1),

$$\left|f(x, y) - \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\mathfrak{O}_1 Q_m \mathfrak{O}_1 Q_n d\alpha\, d\beta\right| < \frac{F}{m} + \frac{G}{n}.$$

L'intégrale double est, comme l'élément différentiel, un polynome entier en x, y de degré m en x et de degré n en y que nous désignerons par $P_{m,n}(x, y)$; nous aurons donc

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{F}{m} + \frac{G}{n},$$

et cela, quels que soient les entiers m et n.

Il résulte alors du paragraphe précédent que la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles d'ordres α' et β' tels que $\alpha' + \beta' < 1$.

20. Supposons maintenant que les rapports $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right|$ et $\left|\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^s}\right|$ soient bornés dans (Γ),

$$\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right| < A, \qquad \left|\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^s}\right| < A'.$$

Nous remplacerons encore $f(x, y)$ par 0 à l'extérieur de (Γ) et nous ferons varier le point (x, y) à l'intérieur de (Γ'). Pour faire la démonstration nous prendrons $r = 2$, $s = 1$.

Il existe d'abord un polynome $Q_m(x)$ tel que

$$(3) \quad \left| f(x, y) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y) m \left\{ 2 Q_m[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} Q_m\left[m\frac{\alpha - x}{2}\right]\right\} d\alpha \right| < \frac{F}{m^2}$$

avec

$$(4) \quad m \left\{ 2 Q_m[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} Q_m\left[m\frac{\alpha - x}{2}\right]\right\}$$
$$= m\left\{ 2K\,[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} K\left[m\frac{\alpha - x}{2}\right]\right\} + \frac{\theta D}{m^2} \qquad (|\theta| < 1).$$

D'autre part, on peut trouver $Q_n(y)$ tel que

$$(5) \quad f(\alpha, y) = \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) n Q_n[n(\beta - y)]\, d\beta + \frac{\theta' F'}{n} \qquad (|\theta'| < 1);$$

remplaçons, dans l'intégrale de l'inégalité (3), $f(\alpha, y)$ par sa valeur tirée de (5) et posons, pour abréger l'écriture,

$$\mathfrak{O}_1 F_n = n F_n[n(\beta - y)],$$
$$\mathfrak{O}_2 F_m = m\left\{ 2 F_m[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} F_m\left[m\frac{\alpha - x}{2}\right]\right\};$$

il viendra

$$(6) \quad \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y) \mathfrak{O}_2 Q_m\, d\alpha$$
$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \mathfrak{O}_2 Q_m \mathfrak{O}_1 Q_n\, d\alpha\, d\beta + \frac{F'}{n}\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y) \mathfrak{O}_2 Q_m\, d\alpha.$$

Cette dernière intégrale, en tenant compte de (4), s'écrit :

$$\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y) \mathcal{O}_2 \mathrm{K}\, d\alpha + \frac{\mathrm{D}}{m^2} \int_{-1}^{+1} \theta\theta' f(\alpha, y)\, d\alpha;$$

le second terme est inférieur en valeur absolue à $\frac{2\mathrm{MD}}{m^2}$, le premier peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2\theta' f\left(x + \frac{\alpha}{m}\right) \mathrm{K}(\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta' f\left(x + \frac{2\alpha}{m}\right) \mathrm{K}(\alpha)\, d\alpha;$$

il est inférieur en valeur absolue à

$$3\mathrm{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{K}(\alpha)|\, d\alpha = 3\mathrm{MN}.$$

Le module du dernier terme de (6) ne surpasse donc pas

$$\frac{3\mathrm{MNF'}}{n} + \frac{2\mathrm{MDF'}}{m^2 n} \leq \frac{\mathrm{MF'}(3\mathrm{N} + 2\mathrm{D})}{n} = \frac{\mathrm{G}}{n},$$

d'où

$$(7) \quad \left| \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y) \mathcal{O}_2 \mathrm{Q}_m\, d\alpha - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \mathcal{O}_2 \mathrm{Q}_m \mathcal{O}_1 \mathrm{Q}_n\, d\alpha\, d\beta \right| < \frac{\mathrm{G}}{n},$$

et, en comparant (3) et (7),

$$\left| f(x, y) - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \mathcal{O}_2 \mathrm{Q}_m \mathcal{O}_1 \mathrm{Q}_n\, d\alpha\, d\beta \right| < \frac{\mathrm{F}}{m^2} + \frac{\mathrm{G}}{n}.$$

L'intégrale double est, comme l'élément différentiel, un polynome en x, y de degrés m et n que nous désignerons encore par $\mathrm{P}_{m,n}(x, y)$; nous aurons donc

$$|f(x\, y) - \mathrm{P}_{m,n}(x, y)| < \frac{\mathrm{F}}{m^2} + \frac{\mathrm{G}}{n},$$

et cela, quels que soient les entiers m et n.

Il résulte du théorème établi au n° 18 que les dérivées $f^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'} y^{\beta'}}$ pour lesquelles $\frac{\alpha'}{2} + \beta' < 1$, existent à l'intérieur de Γ. Par exemple, la dérivée f'_x existe.

On est ainsi conduit au théorème général suivant :

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans l'intérieur d'un do-

maine (Γ) *et telle que, à l'intérieur de ce domaine, les rapports* $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}$ *et* $\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^s}$ *soient bornés : cette fonction admet, à l'intérieur de* (Γ), *toutes les dérivées partielles* $f_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}^{(\alpha'+\beta')}$ *pour lesquelles*

$$\frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{s} < 1.$$

Par exemple, si les rapports $\frac{\Delta_h^{(2)}}{h^2}$ et $\frac{\Delta_k^{(2)}}{k^2}$ sont bornés, les dérivées f'_x et f'_y existent; si les rapports $\frac{\Delta_h^{(3)}}{h^3}$ et $\frac{\Delta_k^{(3)}}{k^3}$ sont bornés, les dérivées f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} existent partout ([1]).

Si nous supposons que tous les rapports

$$\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}, \quad \frac{\Delta_k^{(s)}}{k^s}$$

sont bornés pour chaque valeur de r *et de* s, *on en déduit que la fonction* $f(x, y)$ *possède des dérivées partielles de tous les ordres.*

21. Plus généralement, nous pourrions supposer que le rapport $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^\alpha}$ ($\alpha \leqq r$) et que le rapport $\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^\beta}$ ($\beta \leqq s$) sont bornés. On en déduirait l'existence de polynomes $P_{m,n}(x, y)$ pour lesquels

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{F}{m^\alpha} + \frac{G}{n^\beta},$$

et par suite que les dérivées $f_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}^{(\alpha'+\beta')}$, pour lesquelles $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$, existent en tout point intérieur à (Γ).

Nous nous trouverons, dans les hypothèses précédentes si, par exemple, les dérivées f'_x, f''_{x^2}, $\ldots$, $f_{x^{r-1}}^{(r-1)}$ existent et satisfont à une condition de Lipschitz par rapport à x d'ordre λ et si les dérivées f'_y, f''_{y^2}, $\ldots$, $f_{y^{s-1}}^{(s-1)}$ existent et satisfont à une condition de Lipschitz par rapport à y d'ordre μ. Nous avons vu qu'il suffit de

---

([1]) On peut même établir que ces dérivées sont continues et satisfont à des conditions de Lipschitz.

prendre

$$\alpha = r - 1 + \lambda \quad \text{et} \quad \beta = s - 1 + \mu$$

pour être ramené au cas précédent.

Il en sera ainsi, en particulier, si les dérivées $f_{x^r}^{(r)}$ et $f_{y^s}^{(s)}$ existent et sont bornées. Si nous supposons enfin que les dérivées $f_{x^r}^{(r)}$ et $f_{y^s}^{(s)}$ existent quels que soient les entiers r et s, nous pouvons en conclure l'existence dans (Γ) de toutes les dérivées $f_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)}$. Ce dernier théorème, au moins lorsque α et β sont entiers, a déjà été établi par M. S. Bernstein (¹).

(¹) *Loc. cit.*, p. 98.