BULLETIN DE LA S. M. F.

P. HUMBERT

# Sur deux polynômes associés aux polynômes de Legendre

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 46 (1918), p. 120-151
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__120_1>

## SUR DEUX POLYNOMES ASSOCIÉS AUX POLYNOMES DE LEGENDRE;

PAR M. PIERRE HUMBERT.

Soit $P_n(z)$, le polynome de Legendre d'ordre $n$. Nous définissons les deux polynomes $A_n(z)$, de degré $n-2$, et $B_n(z)$, de degré $n-1$, par l'identité

$$A_n(z)\,P_n(z) + B_n(z)\,P'_n(z) \equiv 1,$$

que nous appellerons *identité fondamentale.* Nous nous proposons d'étudier les principales propriétés de ces polynomes, ainsi que de quelques autres que l'on peut en considérer comme des extensions [1].

## I.

*Premières remarques.* — Le simple examen de l'identité fondamentale nous permet les remarques suivantes : $A_n$, qui est d'ordre $n-2$, ne contient que des termes d'ordres $n-2$, $n-4$, $n-6$, ...; $B_n$, au contraire, n'a que des termes d'ordres $n-1$, $n-3$, $n-5$, ....

$A_0$, $A_1$, et $B_0$ n'existent pas.

Les polynomes définis par les premières valeurs de $n$ sont les suivants :

$$
\begin{array}{ll}
 & B_1 = 1; \\
A_2 = -2, & B_2 = z; \\
A_3 = -5z, & B_3 = \dfrac{5z^2-2}{3}; \\
A_4 = -\dfrac{35z^2-8}{3}, & B_4 = \dfrac{35z^3-23z}{12}; \\
A_5 = -\dfrac{315z^3-147z}{12}, & B_5 = \dfrac{315z^4-287z^2+32}{60}, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

Enfin, si $\alpha$ est une racine quelconque de $P_n(z)$ l'identité fondamentale montre que

$$B_n(\alpha) = \frac{1}{P'_n(\alpha)}; \tag{1}$$

le signe de $B_n(\alpha)$ est donc celui de $P'_n(\alpha)$. On en déduit que, de même que les $n-1$ racines de $P'_n(z)$ séparent les $n$ racines de $P_n(z)$, les $n-1$ racines de $B_n(z)$ séparent les $n$ racines de $P_n(z)$. On voit de la même manière que les $n-2$ racines de $A_n(z)$ séparent les $n-1$ racines de $P'_n(z)$, et séparent également les $n-1$ racines de $B_n(z)$.

---

[1] Nous supposons connues du lecteur les propriétés élémentaires des fonctions de Legendre, qui se trouvent dans tous les traités d'Analyse. *Voir*, notamment, WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis*, 2e édition, Cambridge, 1916.

*Formules de récurrence entre* P *et* B. — Entre les polynomes B et les polynomes de Legendre existe la relation de récurrence

$$(2)\qquad P_{n-1}(z)\,B_n(z) - P_n(z)\,B_{n-1}(z) + \frac{z^2-1}{n} = 0.$$

Il nous suffit, pour la démontrer, de prouver que le premier membre, qui est un polynome en $z$ de degré $2n-2$, s'annule pour $2n-1$ valeurs de $z$, à savoir les $n$ racines $\alpha_i$ de $P_n(z)$, et les $n-1$ racines $\beta_i$ de $P_{n-1}(z)$. En effet, pour $z=\alpha_i$, l'expression (2) devient, en vertu de (1), égale à

$$\frac{P_{n-1}(\alpha_i)}{P'_n(\alpha_i)} + \frac{\alpha_i^2-1}{n},$$

ce qui est nul, d'après l'une des formules de récurrence entre les polynomes de Legendre et leurs dérivées,

$$(z^2-1)\,P'_n(z) = nzP_n(z) - nP_{n-1}(z).$$

De même, pour une racine $\beta_i$, l'expression (2) devient égale à

$$-\frac{P_n(\beta_i)}{P'_{n-1}(\beta_i)} + \frac{\beta_i^2-1}{n},$$

ce qui est encore nul, en vertu de la relation

$$-(z^2-1)P'_{n-1}(z) = nzP_{n-1}(z) - nP_n(z).$$

La formule (2) est donc démontrée.

Par un raisonnement identique, on démontrera aussi la formule suivante

$$(3)\qquad P_{n+1}B_{n-1} - P_{n-1}B_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}z(z^2-1).$$

*Valeurs particulières des polynomes* B. — En faisant, dans la formule (2), $z=1$, et en nous rappelant que $P_n(1)=1$, nous obtenons le résultat

$$B_n(1) = B_{n-1}(1),$$

et, comme $B_1(1)=1$,

$$B_n(1) = 1.$$

De même, faisant $z=-1$, et sachant que $P_n(-1)=(-1)^n$, nous trouvons

$$B_n(-1) = (-1)^{n+1}.$$

Enfin, faisant $z=o$, nous pourrons écrire

$$B_{2m}(o)=o,$$

$$B_{2m+1}(o)=(-1)^m\frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)}=\frac{1}{(2m+1)P_{2m}(o)}.$$

*Le polynome* B *sous forme de déterminant.* — Si nous écrivons la formule (2),

$$P_{n-1}B_n-P_nB_{n-1}+\frac{z^2-1}{n}=o,$$

et la suite des formules obtenues en diminuont chaque fois $n$ d'une unité,

$$P_{n-2}B_{n-1}-P_{n-1}B_{n-2}+\frac{z^2-1}{n-1}=o,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_1B_2-P_2B_1+\frac{z^2-1}{2}=o,$$

en y joignant

$$P_0B_1-1=o,$$

nous obtenons $n$ équations linéaires en $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$, d'où nous pourrons tirer ces $n$ quantités considérées comme inconnues. Nous aurons ainsi $B_n$ sous forme du quotient de deux déterminants. Le déterminant dénominateur sera simplement le produit

$$P_1P_2\ldots P_{n-1};$$

et le déterminant numérateur sera très aisément simplifié, en ajoutant terme à terme deux lignes consécutives, et tenant compte de la formule de récurrence entre trois polynomes de Legendre consécutifs. Le produit $P_1P_2\ldots P_{n-1}$ se trouve en facteur au numérateur, et nous obtiendrons l'expression suivante :

$$B_n(z)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 2z & 2 & o & o & o & \ldots \\ 2 & 5z & 3 & o & o & \ldots \\ o & 3 & 7z & 4 & o & \ldots \\ o & o & 4 & 9z & 5 & \ldots \\ . & . & . & .. & . & \ldots \end{vmatrix},$$

le déterminant ayant $n-1$ lignes et colonnes.

Cette forme très simple permet aisément le calcul d'un polynome $B_n$ d'ordre quelconque.

*Formule de récurrence entre trois polynomes* B *consécutifs.* — Reprenons les relations (2) et (3), joignons-y la suivante,

$$P_n B_{n+1} - P_{n+1} B_n + \frac{z^2-1}{n+1} = 0,$$

et éliminons $P_{n+1}$, $P_n$ et $P_{n-1}$ entre ces trois équations et la formule de récurrence bien connue

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)zP_n + nP_{n-1} = 0,$$

de façon à obtenir une formule ne contenant plus que des polynomes B. Nous trouvons

$$(n+1)B_{n+1} - (2n+1)zB_n + nB_{n-1} = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire la même formule de récurrence qu'entre trois polynomes P consécutifs.

On aurait pu également l'obtenir à partir de $B_n$ mis sous forme de déterminant.

*Expression de* $Q_n$ *au moyen du polynome* $B_n$. — La formule (4) va nous conduire à un résultat très important. Si nous considérons l'équation aux différences

$$(n+1)u_{n+1} + nu_{n-1} = (2n+1)zu_n, \tag{5}$$

nous remarquerons que nous en connaissons deux solutions particulières, $P_n(z)$ et $B_n(z)$ ; la solution générale en sera donc

$$u_n = \varphi(z)P_n(z) + \psi(z)B_n(z),$$

$\varphi$ et $\psi$ étant deux fonctions quelconques, indépendantes de $n$. Or nous savons que cette équation (5) admet également pour solution la fonction de Legendre de seconde espèce, $Q_n(z)$. Il existe donc deux fonctions $\varphi$ est $\psi$ telles que l'on ait

$$Q_n(z) = \varphi(z)P_n(z) + \psi(z)B_n(z).$$

Cherchons à obtenir directement cette expression [1]. On a, par

---

[1] Nous avons déjà publié ce résultat, ainsi que le raisonnement qui y conduit, (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 165, p. 759) et l'avons étendu en faisant connaître une méthode de réduction pour des fonctions de seconde espèce vérifiant une équation différentielle d'un type général (*Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh*, vol. XXXVIII, p. 61). Nous en verrons plus loin deux exemples.

définition de la fonction de seconde espèce,

$$Q_n(z) = P_n(z)\int_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)[P_n(t)]^2},$$

ce que nous écrirons

$$Q_n(z) = P_n(z)\int_z^\infty \frac{A_n P_n + B_n P'_n}{P_n^2}\,\frac{dt}{t^2-1}.$$

En intégrant par parties le terme contenant $P'_n$, nous trouvons

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} + \int_z^\infty \left[\frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2tB_n}{(t^2-1)P_n}\right]\frac{dt}{t^2-1}.$$

En dérivant l'identité fondamentale, nous avons la relation

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\frac{A'_n}{P'_n} - \frac{B_n P''_n}{P_n P'_n}.$$

Par décomposition en éléments simples, les racines de $P_n$ étant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et celles de $P'_n$ étant $b_1; b_2, \ldots, b_{n-1}$, nous pourrons écrire

$$\frac{A'_n}{P'_n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{A'_n(b_i)}{P''_n(b_i)}\,\frac{1}{z-b_i},$$

$$\frac{B_n P''_n}{P_n P'_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i)P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2(z-a_i)} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{B_n(b_i)}{P_n(b_i)}\,\frac{1}{z-b_i},$$

ce qui nous donne, en observant que les sommes portant sur les $b$ se détruisent en vertu de l'identité fondamentale dérivée,

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i)P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2}\,\frac{1}{z-a_i}.$$

Mais nous tirons de l'équation différentielle de Legendre la relation suivante :

$$\frac{P''_n(a_i)}{P'_n(a_i)} = -\frac{2a_i}{a_i^2-1};$$

donc

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2-1)P'_n(a_i)}\,\frac{1}{z-a_i}.$$

D'autre part, la décomposition en éléments simples, jointe aux résultats que nous avons établis plus haut sur $B_n(1)$ et $B_n(-1)$, nous permet d'écrire

$$\frac{2zB_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{2a_iB_n(a_i)}{(a_i^2-1)P'_n(a_i)(z-a_i)}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1},$$

d'où

$$\frac{A_n+B'_n}{P_n}-\frac{2zB_n}{(z^2-1)P_n}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}; \tag{6}$$

donc, en portant dans l'intégrale, et en intégrant,

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}=\frac{B_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)}+\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{z}{z^2-1},$$

c'est-à-dire

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{zP_n(z)-B_n(z)}{z^2-1}.$$

C'est bien l'expression que nous cherchions, et nous avons donc

$$\varphi(z)=\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{z}{z^2-1},$$
$$\psi(z)=\frac{1}{z^2-1}.$$

De nombreux auteurs ont mis $Q_n$ sous la forme

$$Q_n=\frac{1}{2}P_n\log\frac{z+1}{z-1}-f_{n-1},$$

où $f_{n-1}$ est un polynome d'ordre $n-1$. Les expressions qu'ils en ont données sont en général compliquées, et contiennent les polynomes de Legendre d'ordre inférieur à $n$. On voit que nous avons simplement

$$f_{n-1}=\frac{zP_n-B_n}{z^2-1}.$$

Le polynome $f_{n-1}$ est encore solution de l'équation aux différences (5), avec cette fois

$$\varphi(z)=\frac{z}{z^2-1},\qquad \psi(z)=\frac{-1}{z^2-1}.$$

Enfin la formule (6), que l'on peut écrire

$$(z^2-1)(A_n+B'_n)=2(zB_n-P_n),$$

montre que le polynome

$$\Delta(z) = -\frac{1}{2}(A_n + B'_n)$$

est lui aussi solution de la même équation aux différences, avec

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \qquad \psi(z) = \frac{-z}{z^2 - 1}.$$

La formule

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z P_n - B_n}{z^2 - 1}$$

est de toute première importance dans la théorie des polynomes qui nous occupent; elle permettra en effet d'écrire de nombreuses propriétés du polynome $B_n$, à partir des propriétés connues de $Q_n$.

## II.

Les polynomes A jouissent de propriétés analogues, et dont la démonstration est à peu de chose près identique à celle que nous avons donnée dans le cas des polynomes B.

*Formule de récurrence entre* A *et* P'. — C'est par une démonstration calquée sur celle de la formule de récurrence entre B et P, mais en considérant, au lieu des racines de $P_n$ et $P_{n-1}$, celles de $P'_n$ et $P'_{n-1}$, que l'on établira la relation

$$A_{n-1} P'_n - A_n P'_{n-1} = n, \tag{7}$$

ainsi que la suivante:

$$A_{n-1} P'_{n+1} - A_{n+1} P'_{n-1} = (2n+1)z. \tag{8}$$

*Valeurs particulières des polynomes* A. — Ces formules nous permettent d'écrire, en tenant compte des valeurs particulières des P',

$$A_n(1) \quad = 1 - \frac{n(n+1)}{2},$$

$$A_n(-1) = (-1)^n A_n(1)$$

et

$$A_{2m+1}(0) = 0,$$

$$A_{2m}(0) = (-1)^m \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m-1)} = -2m B_{2m-1}(0).$$

*Le polynome* $A_n$ *sous forme de déterminant.* — En opérant sur les formules (7) et (8) exactement comme nous l'avons fait sur les formules de récurrence entre les P et les B, nous obtiendrons sans difficulté l'expression

$$A_n = -\frac{2}{(n-1)!}\begin{vmatrix} 5z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 7z & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 9z & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 6 & 11z & 5 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \end{vmatrix},$$

où le déterminant a $n-2$ lignes et colonnes.

*Formule de récurrence entre trois polynomes* A *consécutifs.* — On la tirera des mêmes formules, jointes à la suivante,

$$nP'_{n+1} - (2n+1)zP'_n + (n+1)P'_{n-1} = 0$$

et l'on obtiendra

$$nA_{n+1} - (2n+1)zA_n + (n+1)A_{n-1} = 0.$$

c'est-à-dire la même formule que pour P'. Or cette équation aux différences est satisfaite aussi par la fonction $Q'_n(z)$, qui dès lors pourra s'exprimer au moyen de $P'_n$ et de $A_n$.

*Expression de* $Q'_n$ *en fonction de* $A_n$. — Il suffit, pour obtenir cette expression, de dériver la formule donnant $Q_n$ en fonction de $P_n$ et de $B_n$. Nous trouvons ainsi

$$Q'_n = \frac{1}{2}P'_n \log\frac{z+1}{z-1} - \frac{z^2P'_n - z^2B'_n - 2P_n - zP'_n + B'_n + 2zB_n}{(z^2-1)^2}.$$

En tenant compte de la formule (6) établie plus haut,

$$(z^2-1)(A_n + B'_n) = 2(zB_n - P_n),$$

nous trouvons l'expression très simple

$$Q'_n = \frac{1}{2}P'_n \log\frac{z+1}{z-1} - \frac{zP'_n + A_n}{z^2-1}.$$

Remarquons que ce terme

$$\frac{zP'_n + A_n}{z^2-1}$$

n'est pas un polynome, comme dans le cas de $Q_n$. On a en effet

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad A_n(1) = 1 - \frac{n(n+1)}{2};$$

le numérateur n'est donc pas nul pour $z = 1$.

## III.

*Formules de récurrence entre* A *et* B. — Il existe, comme on le sait, un certain nombre de formules de récurrence entre les polynomes de Legendre et leurs dérivées, linéaires par rapport aux P et aux P′, et vérifiées aussi par les fonctions de seconde espèce $Q_n$ et leurs dérivées. Considérons l'une d'entre elles, et écrivons-la

$$F(Q_i, Q_j, \ldots, Q'_i, Q'_j, \ldots) = 0.$$

Remplaçons dans cette formule les Q par leur expression en fonction de P et de B, les Q′ par leur expression en fonction de P′ et de A; tous les termes en P et P′ disparaîtront en vertu de

$$F(P_i, P_j, \ldots, P'_i, P'_j, \ldots) = 0$$

et il restera l'expression

$$F(B_i, B_j, \ldots, -A_i, -A_j, \ldots) = 0.$$

On obtiendra donc des formules de récurrence entre les polynomes A et B à partir d'une quelconque des formules de récurrence entre les fonctions de Legendre et leurs dérivées, en remplaçant $P_i$ par $B_i$ et $P'_i$ par $-A_i$.

Nous écrirons donc, à partir des formules de récurrence classiques des polynomes de Legendre,

$$\begin{aligned}
zA_n - A_{n-1} + nB_n &= 0,\\
A_n - zA_{n-1} + nB_{n-1} &= 0,\\
(z^2-1)A_n + n(zB_n - B_{n-1}) &= 0,\\
(z^2-1)A_{n-1} + n(B_n - zB_{n-1}) &= 0,\\
(2n+1)B_n &= A_{n-1} - A_{n+1},
\end{aligned}$$

et, à partir d'une formule donnée par F. Neumann,

$$(2n+1)(z^2-1)A_n = n(n+1)(B_{n-1} - B_{n+1}).$$

*Remarques.* — Nous avons dit que $A_0$, $A_1$ et $B_0$ n'existaient pas; mais, pour que les formules que nous venons d'écrire soient valables quel que soit $n$, nous serons amenés à poser, par convention,

$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = 0,$$
$$B_0 = z.$$

Toutes les formules indiquées ci-dessus (relations de récurrence entre P et B, entre P′ et A, entre trois B ou trois A consécutifs, expressions de $Q_n$ et de $Q'_n$) seront alors valables sans restrictions; et il en sera de même de celles que nous établirons par la suite.

*Formules de récurrence contenant les dérivées.* — On peut obtenir un certain nombre de formules de récurrence introduisant les dérivées des polynomes A ou B; mais elles contiendront en général les polynomes de Legendre. On y parviendra en dérivant la formule

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log\frac{z+1}{z-1} - \frac{zP_n - B_n}{z^2-1},$$

et en appliquant la relation de récurrence

$$(z^2-1)Q'_n = nzQ_n - nQ_{n-1}.$$

On trouvera ainsi

$$(z^2-1)B'_n = (n+1)B_{n+1} - (n-1)zB_n - 2P_n$$

et

$$(z^2-1)B'_n = (n+2)zB_n - nB_{n-1} - 2P_n$$

ou encore

$$(z^2-1)A'_n + n(n+1)B_n = 2P'_n. \tag{9}$$

A ce groupe se rattache la formule, que nous avons établie par ailleurs,

$$(z^2-1)(A_n + B'_n) = 2(zB_n - P_n),$$

d'où l'on pourra tirer la suivante, ne contenant plus P,

$$(z^2-1)B''_n + [n(n+1)-2]B_n + 2zA_n + 2(z^2-1)A'_n = 0,$$

mais ces dernières formules ne sont plus des formules de récurrence proprement dites.

*Équation différentielle pour* $A_n$. — Nous allons néanmoins en tirer un résultat intéressant : dans la formule (9), remplaçons $B_n$ par sa valeur tirée de l'identité fondamentale : nous obtenons

$$(z^2-1)A'_n P'_n - n(n+1)A_n P_n = 2P'^2_n - n(n+1),$$

d'où, par dérivation, l'équation différentielle du second ordre, linéaire et avec second membre, à laquelle satisfait le polynome $A_n(z)$

$$(z^2-1)A''_n - n(n+1)A_n = 4P''_n.$$

On en remarquera la forme particulièrement simple ; et l'on pourra noter que l'on connaît une solution de l'équation sans second membre, à savoir la fonction primitive de $P_n(z)$.

*Équation différentielle pour* $B_n$. — Le même procédé pourrait nous conduire à une équation différentielle vérifiée par le polynome $B_n(z)$. Il est plus simple de la rechercher à partir de l'expression de $Q_n$ en fonction de $P_n$ et de $B_n$ : on la dérivera deux fois, et l'on écrira que $Q_n$ vérifie l'équation de Legendre. On sera ainsi amené à une équation différentielle pour $B_n(z)$, beaucoup moins simple d'ailleurs que celle de $A_n$ :

$$\begin{aligned}(z^2-1)^2 B''_n - 2z(z^2-1)B'_n + [2(z^2+1) - n(n+1)(z^2-1)]B_n \\ = 4zP_n - 4(z^2-1)P'_n.\end{aligned}$$

*Fonction génératrice de* $B_n$. — C'est encore à partir de la même expression de $Q_n$ que nous pourrons trouver une fonction génératrice pour $B_n$ : il nous suffira de partir des fonctions génératrices bien connues de $P_n$ et de $Q_n$ : nous trouverons sans difficulté

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} h^n B_n(z) = \frac{z^2-1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} \log\left(e^{\frac{z}{z^2-1}} \frac{z-h+\sqrt{1-2hz+h^2}}{z+1}\right),$$

le logarithme étant népérien ; et nous n'oublierons pas la convention que nous avons faite sur $B_0$.

*Formules de récurrence diverses.* — De nombreuses autres formules pourraient être établies par des procédés analogues : signalons par exemple les suivantes, dont la démonstration serait aisée :

$$A_{n-1}P_n + B_n P'_{n-1} = z,$$
$$A_n P_n + A_{n-1}P_{n-1} - z(P_n A_{n-1} + P_{n-1}A_n) + z^2 - 1 = 0,$$
$$B_n Q_{n-1} - B_{n-1}Q_n = \frac{1}{2n}\left[2z - (z^2-1)\log\frac{z+1}{z-1}\right], \quad \ldots\ldots$$

## IV.

*Développements en séries se rattachant aux suites de Sturm.* — L'équation aux différences à laquelle satisfont les polynomes $B_n$ montre que ces polynomes appartiennent à une suite de Sturm. On peut donc leur appliquer la formule fondamentale établie par Darboux dans son *Mémoire sur le théorème de Sturm*, et écrire le développement suivant :

$$\begin{aligned}(n+1)\frac{B_{n+1}(z)B_n(x) - B_{n+1}(x)B_n(z)}{z-x} = {} & (2n+1)B_n(z)B_n(x)\\ & + (2n-1)B_{n-1}(z)B_{n-1}(x)\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + 5B_2(z)B_2(x)\\ & + 2B_1(z)B_1(x).\end{aligned}$$

La démonstration directe de cette formule, à partir des relations de récurrence, est d'ailleurs immédiate.

En faisant $x = z$, nous obtenons le développement

$$(n+1)(B'_{n+1}B_n - B_{n+1}B'_n) = (2n+1)B_n^2 + \ldots + 5B_2^2 + 2B_1^2.$$

De même, en remarquant que les polynomes $P_n$ vérifient la même équation aux différences, on pourra écrire un autre groupe de développements :

$$(n+1)(B_n P'_{n+1} - B_{n+1}P'_n) = \quad B_0P_0 + 2B_1P_1 + \ldots + (2n+1)B_nP_n,$$
$$(n+1)(B'_{n+1}P_n - B_nP_{n+1}) = -B_0P_0 + 3B_1P_1 + \ldots + (2n+1)B_nP_n.$$

En considérant à présent que, pour la même raison, les polynomes A forment une suite de Sturm, nous aurons les développements suivants :

$$\frac{A_{n+1}(z)A_n(x) - A_n(z)A_{n+1}(x)}{(n+1)(z-x)} = \sum_{i=2}^{i=n}\frac{2i+1}{i(i+1)}A_i(z)A_i(x),$$
$$\frac{A'_{n+1}A_n - A'_nA_{n+1}}{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n}\frac{2i+1}{i(i+1)}A_i^2,$$

et de même

$$\frac{A_{n+1}(z)P'_n(x) - A_n(z)P'_{n+1}(x)}{(n+1)(z-x)} = \frac{1}{x-z} + \frac{5}{6}A_2(z)P'_2(x),$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$+\frac{2n+1}{n(n+1)}A_n(z)P'_n(x);$$

d'où, en faisant $x = z$,

$$\frac{A_n P''_{n+1} - A_{n+1} P''_n}{n+1} = \frac{A'_{n+1} P'_n - A'_n P'_{n+1}}{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n} \frac{2i+1}{i(i+1)} A_i P'_i.$$

*Autres développements.* — Des développements en série analogues à ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions de Legendre s'obtiennent aisément à partir des diverses formules de récurrence : ainsi

$$-(A_{n+1} + A_n) = -1 + 3B_1 + 5B_2 + \ldots + (2n+1)B_n,$$
$$-A_n = (2n-1)B_{n-1} + (2n-5)B_{n-3} + (2n-9)B_{n-5} + \ldots,$$

le dernier terme étant ici $2B_1$ ou $5B_2$ suivant que $n$ est pair ou impair.

Les mêmes formules de récurrence permettent d'écrire

$$1 - z^n A_n = B_1 + 2zB_2 + \ldots + nz^{n-1}B_n$$

et

$$\frac{z^{n-1}B_n - 1}{1-z^2} = \frac{1}{2}A_2 + \frac{z}{3}A_3 + \ldots + \frac{z^{n-2}}{n}A_n.$$

*Un développement introduisant les fonctions* Q. — La formule suivante, due à Frobenius,

$$\frac{1}{2(y-x)}\log\frac{(x+1)(y-1)}{(x-1)(y+1)} = \sum_0^\infty (2n+1)Q_n(x)Q_n(y),$$

va nous permettre d'écrire un développement particulièrement remarquable.

Remplaçons dans le second membre $Q_n(x)$ par sa valeur en fonction de $P_n$ et de $B_n$; puis tenons compte du développement fondamental

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty (2n+1)P_n(x)Q_n(y).$$

Nous arriverons alors au développement cherché :

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{x^2-1}{2}\log\frac{y-1}{y+1}-x\right)=\sum_0^\infty(2n+1)B_n(x)Q_n(y).$$

*Développement de* $B_n$ *en série de polynomes de Legendre.* — Plusieurs résultats ont été établis par Christoffel [1] sur le polynome que nous avons appelé $f_{n-1}(z)$, tel que

$$Q_n=\frac{1}{2}P_n\log\frac{z+1}{z-1}-f_{n-1}.$$

Nous allons utiliser ces travaux pour obtenir de nouvelles formules relatives au polynome $B_n$.

Tout d'abord, nous partirons du développement, indiqué par Christoffel, de $f_{n-1}$ en série de polynomes de Legendre,

$$f_{n-1}=\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}+\ldots.$$

Or nous avons établi la formule

$$f_{n-1}=\frac{zP_n-B_n}{z^2-1},$$

d'où nous tirerons

$$B_n=zP_n-(z^2-1)\left[\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}+\ldots\right].$$

Les formules de récurrence entre les polynomes P nous permettent d'écrire

$$zP_n=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n}{2n+1}P_{n-1},$$

$$\begin{aligned}(2n-1)z^2P_{n-1}=&\frac{n(n+1)}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n^2}{2n+1}P_{n-1}\\&+\frac{(n-1)^2}{2n-3}P_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2n-3}P_{n-3},\\(2n-5)z^2P_{n-3}=&\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-3)}P_{n-1}+\frac{(n-2)^2}{2n-3}P_{n-3}\\&+\frac{(n-3)^2}{2n-7}P_{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{2n-7}P_{n-5},\end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

[1] *Ueber die Gaussische Quadratur* (*Crelle*, t. 55, 1858). Les notations de Christoffel sont un peu différentes et le polynome $f_{n-1}$ dont il s'occupe diffère du nôtre par un facteur constant.

Ceci nous donne, après simplifications, et en remarquant que les termes en $P_{n+1}$ se détruisent, le développement du polynome $B_n(z)$ en série de polynomes de Legendre :

$$\begin{aligned}B_n = \frac{2(2n-1)}{3.n}P_{n-1} &- \frac{2(2n-5)(n^2-2n+2)}{1.3.5.n(n-1)(n-2)}P_{n-3}\\ &- \frac{2(2n-9)(n^2-4n+9)}{3.5.7.(n-1)(n-2)(n-3)}P_{n-5}\\ &- \frac{2(2n-13)(n^2-6n+20)}{5.7.9.(n-2)(n-3)(n-4)}P_{n-7}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

ce que nous écrirons de la façon suivante :

$$B_n = -8\sum_{m=0,1}^{m=n-1}\frac{(2m+1)(n^2+m^2+n+m-2)P_m}{(n-m-2)(n-m)(n-m+2)(n+m+3)(n+m+1)(n+m-1)},$$

la parité de $m$ étant différente de celle de $n$.

*Développement du polynome* $\Delta_n$. — Le polynome que nous avons désigné par $\Delta_n$, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}(A_n + B'_n),$$

admet un développement analogue, mais un peu plus simple. Il suffit, pour le trouver, d'écrire une formule connue,

$$\Delta_n = \frac{P_n - zB_n}{z^2-1} = -P_n + zf_{n-1},$$

et d'appliquer le développement de Christoffel. On trouve, après réductions,

$$\Delta_n = 4\sum_{m=0,1}^{m=n-2}\frac{(2m+1)(n-m)(n+m+1)}{(n-m-1)(n-m+1)(n+m+2)(n+m)}P_m,$$

$m$ et $n$ étant de même parité.

*Développements introduisant des produits de fonctions de Legendre.* — La seconde formule de Christoffel dont nous allons nous servir est la suivante :

$$P_m f_{n-1} - P_n f_{m-1} = \sum_{s=0}^{n-m-1}\frac{P_s P_{n-m-s-1}}{m+s+1},$$

qui comprend, comme cas particulier, la formule de Schäfli et Hermite,

$$f_{n-1}=\sum_{s=1}^{s=n}\frac{1}{s}P_{n-s}P_{s-1}.$$

Nous remarquerons que le premier membre de la formule de Christoffel n'est autre que

$$\frac{P_n B_m - P_m B_n}{z^2-1}.$$

Si nous faisons alors $m=2$, nous arriverons à l'expression suivante pour le polynome $B_n$ :

$$\frac{3}{2}B_n=\sum_{s=3}^{s=n}\left(\frac{P_{n-s}}{s}[P_{s-1}-P_{s-3}]\right)+P_{n-1}+\frac{zP_{n-2}}{2},$$

ce qu'au moyen de formules de récurrence on peut encore mettre sous la forme

$$\frac{3}{2}B_n=(z^2-1)\sum_{s=3}^{s=n}\frac{2s-3}{s(s-1)(s-2)}P_{n-s}P'_{s-2}+P_{n-1}+\frac{zP_{n-2}}{2}.$$

Faisons de même, dans la formule générale, $m=1$; le premier membre devient

$$\frac{P_n - zB_n}{z^2-1},$$

c'est-à-dire le polynome $\Delta_n$. Nous avons par conséquent le très simple développement suivant :

$$\Delta_n=\sum_{s=0}^{n-2}\frac{P_s P_{n-s-2}}{s+2}.$$

## V.

*Intégrales définies diverses.* — Un certain nombre d'intégrales définies où figurent les polynomes A et B ont des valeurs simples et qu'il est facile de calculer.

Si nous considérons l'identité fondamentale, et si nous l'intégrons entre $-1$ et $+1$, en remarquant que, puisque $A_n$ est de degré inférieur à $P_n$, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} A_n(z) P_n(z)\, dz$$

est nulle, nous obtenons le résultat

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P'_n(z)\, dz = 2.$$

De même, la formule de récurrence

$$P_{n-1} B_n - P_n B_{n-1} + \frac{z^2 - 1}{n} = 0$$

nous permet d'écrire, en intégrant,

$$(10) \qquad \int_{-1}^{+1} B_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = \frac{4}{3n}.$$

Si nous posons à présent

$$B_n(z) = b_{n-1} z^{n-1} + \ldots,$$
$$P_n(z) = p_n z^n + \ldots,$$

il est facile de calculer $b_{n-1}$ en fonction de $p_n$ : il suffit par exemple de se servir de l'équation différentielle satisfaite par $B_n$, ou du développement de $B_n$ en série de polynomes de Legendre. Nous trouverons ainsi

$$b_{n-1} = \frac{2}{3} p_n.$$

Écrivant alors

$$z B_n = a_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n,$$

nous aurons d'une part, en égalant les coefficients de $z^n$ dans les deux membres,

$$b_{n-1} = a_n p_n,$$

d'où

$$a_n = \frac{2}{3},$$

et d'autre part

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{+1} z B_n(z) P_n(z)\, dz,$$

d'où la formule

$$\int_{-1}^{+1} z B_n(z) P_n(z)\, dz = \frac{4}{3(2n+1)},$$

qui n'est d'ailleurs valable que pour $n > 1$; car pour $n = 1$, on n'a plus $b_{n-1} = \frac{2}{3} p_n$.

Un procédé analogue nous conduira aux intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} z^2 A_n(z) P_n(z)\, dz = -\frac{4n}{3(2n+1)},$$

$$\int_{-1}^{+1} z\, A_n(z) P'_n(z)\, dz = 2 - n(n+1),$$

$$\int_{-1}^{+1} z^2 B'_n(z) P_n(z)\, dz = \frac{4(n-1)}{3(2n+1)}.$$

En appliquant les formules de récurrence, nous trouverons encore

$$\int_{-1}^{+1} z A_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = -\frac{4}{3},$$

(11) $$\int_{-1}^{+1} A_{n+1}(z) P_{n-1}(z)\, dz = -\frac{4(2n+1)}{3n}.$$

Enfin, en appliquant aux intégrales (10) et (11) la formule d'Olinde Rodrigues pour le polynome $P_n$, nous obtenons les suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^n \frac{d^n B_{n+1}}{dz^n} dz = \frac{2^{n+2}}{3(n+1)} n!,$$

$$\int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^n \frac{d^n A_{n+2}}{dz^n} dz = \frac{(2n+3)2^{n+2}}{3(n+1)} n!.$$

Il nous est facile d'écrire une formule plus générale que toutes les précédentes. Si nous nous reportons au développement de $B_n$ en série de polynomes P, multipliant les deux membres par $P_m$ et intégrant, nous trouvons de suite, si $m$ est de parité différente de $n$ et inférieur ou égal à $n - 1$,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_m(z)\, dz$$
$$= -\frac{16(n^2 + m^2 + n + m - 2)}{(n-m-2)(n-m)(n-m+2)(n+m+3)(n+m+1)(n+m-1)}.$$

Si $m$ est de même parité que $n$, ou supérieur à $n - 1$, on a évidemment

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_m(z)\, dz = 0.$$

Nous avons donc en particulier, si $n$ est impair,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z)\,dz = \frac{-16}{(n-2)n(n+1)(n+3)}.$$

Nous obtiendrons de même les résultats suivants :

1° Si $n$ et $p$ sont de parités différentes,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z)B_p(z)\,dz = 0;$$

2° Si $n$ et $p$ sont de même parité,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z)B_p(z)\,dz$$
$$= 128\sum_m \frac{(2m+1)(m^2+n^2+m+n-2)(m^2+p^2+m+p-2)}{\left\{\begin{array}{l}(m-n+2)(m-n)(m-n-2)(m+n+3)(m+n+1)(m+n-1)\\ \times(m-p+2)(m-p)(m-p-2)(m+p+3)(m+p+1)(m+p-1)\end{array}\right\}}$$

la somme étant entendue de la façon suivante : $m$ doit être de parité différente de $n$ et $p$, et varier depuis 0 ou 1 jusqu'au plus petit des entiers $n-1$ ou $p-1$.

De même, nous reportant aux résultats établis sur le polynome $\Delta_n$, nous aurons, avec $m < n$ et de même parité,

$$\int_{-1}^{+1} \Delta_n(z)P_m(z)\,dz = 8\frac{(n-m)(n+m+1)}{(n-m-1)(n-m+1)(n+m+2)(n+m)},$$

et, en particulier, avec $n$ pair,

$$\int_{-1}^{+1} \Delta_n(z)\,dz = \frac{8}{(n-1)(n+2)}.$$

Enfin, pour terminer, nous signalerons la formule suivante, que l'on déduira facilement de l'expression de $Q_n$ sous forme d'intégrale définie, dite *de Neumann* :

$$\Delta_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{xP_n(z)-zP_n(x)}{z-x}\,dx.$$

## VI.

*Polynomes de Gegenbauer.* — Les principales propriétés des polynomes de Legendre ont été étendues à divers polynomes satisfaisant à une équation différentielle analogue, mais plus générale. Telles sont les fonctions $C_n^\nu$ de Gegenbauer, dont l'équation différentielle est

$$(1-z^2)y''-(2\nu+1)zy'+n(n+2\nu)y=0.$$

Cherchons à étendre quelques-unes des propriétés des polynomes $A_n$ et $B_n$ aux polynomes $A_n^\nu$ et $B_n^\nu$ associés à $C_n^\nu$ par l'identité fondamentale

$$A_n^\nu C_n^\nu + B_n^\nu C_n'^\nu \equiv 1.$$

Rappelons tout d'abord quelques points de la théorie des fonctions $C_n^\nu$, dont nous aurons à faire usage (¹).

Le polynome $C_n^\nu(z)$ est défini par le développement

$$(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_0^\infty \alpha^n C_n^\nu(z),$$

et s'écrit, en série hypergéométrique limitée,

$$C_n^\nu(z)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\ n+2\nu;\ \nu+\frac{1}{2};\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Ces polynomes admettent diverses relations de récurrence, suivant que l'on fait varier les indices $n$ ou $\nu$, ou tous deux à la fois. Lorsque $\nu$ reste fixe, on a la formule de récurrence suivante entre trois polynomes consécutifs :

$$(12)\qquad (n+1)C_{n+1}^\nu+(n+2\nu-1)C_{n-1}^\nu=2(n+\nu)zC_n^\nu$$

et des formules introduisant les dérivées, telles que celles-ci, dont nous nous servirons,

$$(13)\qquad nC_n^\nu=(n+2\nu-1)zC_{n-1}^\nu+(z^2-1)C_{n-1}'^\nu,$$

$$(14)\qquad nzC_n^\nu=(n+2\nu-1)C_{n-1}^\nu+(z^2-1)C_n'^\nu.$$

*Polynomes associés aux polynomes de Gegenbauer.* — Les principales propriétés des polynomes associés, $A_n^\nu$ et $B_n^\nu$, se dédui-

(¹) Les divers Mémoires de L. Gegenbauer sont résumés dans l'article de MM. Appell et Lambert, *Généralisations diverses des fonctions sphériques édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, 5, p. 237).

ront des relations de récurrence suivantes :

$$(n+2\nu-1)C_{n-1}^{\nu}B_n^{\nu}-nC_n^{\nu}B_{n-1}^{\nu}+z^2-1=0$$

et

$$\frac{A_n^{\nu}C_{n-1}^{\prime\nu}}{n}-\frac{A_{n-1}^{\nu}C_n^{\prime\nu}}{n+2\nu-1}+1=0.$$

On les démontrera en procédant comme pour leurs analogues dans le cas des fonctions de Legendre. Ainsi, pour la première, on remarquera que le premier membre, polynome d'ordre $2n-2$, s'annule pour les $n-1$ racines $\alpha_i$ de $C_{n-1}^{\nu}$, devenant alors égal à

$$-nC_n^{\nu}(\alpha_i)+(\alpha_i^2-1)\,C_{n-1}^{\prime\nu}(\alpha_i),$$

expression nulle d'après (13); et s'annule aussi, d'après (14), pour les $n$ racines $\beta_i$ de $C_n^{\nu}$. La seconde formule admet une démonstration identique.

Nous déduirons de la première relation, comme nous l'avons fait pour le polynome $B_n$, et en tenant compte de la relation (12), l'expression de $B_n^{\nu}$ sous forme de déterminant à $n-1$ lignes :

$$B_n^{\nu}=\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n+2\nu)}\begin{vmatrix}(2\nu+1)z & 2\nu+1 & 0 & 0 & \dots\\ 2 & (2\nu+4)z & 2\nu+2 & 0 & \dots\\ 0 & 3 & (2\nu+6)z & 2\nu+3 & \dots\\ . & . & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\end{vmatrix},$$

et de la deuxième, en tenant compte de la relation

$$\frac{C_n^{\prime\nu}}{n+2\nu-1}+\frac{C_{n-2}^{\prime\nu}}{n-1}=\frac{2(n+\nu-1)z}{(n+2\nu-1)(n-1)}C_{n-1}^{\prime\nu},$$

l'expression de $A_n^{\nu}$ sous forme de déterminant à $n-2$ lignes :

$$A_n^{\nu}=-\frac{n(2\nu+1)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n+2\nu)}\begin{vmatrix}2(\nu+2)z & 2\nu+3 & 0 & 0 & \dots\\ 2 & 2(\nu+3)z & 2\nu+4 & 0 & \dots\\ 0 & 3 & 2(\nu+4)z & 2\nu+5 & \dots\\ . & . & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\end{vmatrix}.$$

De même, il nous sera très facile d'écrire la formule de récurrence liant trois polynomes $B_n^{\nu}$ à indices inférieurs consécutifs :

$$(15)\qquad (n+2\nu)B_{n+1}^{\nu}+nB_{n-1}^{\nu}=2(n+\nu)zB_n^{\nu}.$$

Remarquons que, contrairement à ce qui avait lieu dans le cas des fonctions de Legendre, cette formule n'est pas la même que la formule (12) qui lie trois polynomes $C_n^\nu$ consécutifs. Elles ne seraient identiques que si l'on avait $\nu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque les fonctions de Gegenbauer se réduisent aux polynomes de Legendre.

Cependant on observera que la fonction

$$\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} B_n^\nu(z)$$

vérifie la même équation aux différences (12) que $C_n^\nu$.

Toutes les formules que nous avons indiquées deviennent, comme il fallait s'y attendre, identiques, pour $\nu = \frac{1}{2}$, aux formules correspondantes de la théorie des polynomes $A_n$ et $B_n$.

Parmi les relations de récurrence existant entre les polynomes $A_n^\nu$ et $B_n^\nu$, signalons les suivantes :

$$\frac{z A_n^\nu}{n} - \frac{A_{n-1}^\nu}{n+2\nu-1} + B_n^\nu = 0,$$

$$(z^2-1) A_{n-1}^\nu = (n+2\nu-1)(z B_{n-1}^\nu - B_n^\nu);$$

il serait aisé d'en écrire un grand nombre d'autres.

La relation (15) montrant que les polynomes $B_n^\nu$ forment une suite de Sturm, on pourra leur appliquer la formule de Darboux et obtenir par ce moyen divers développements en séries. On en déduirait aussi à partir des formules de récurrence.

*Fonction de seconde espèce.* — L'équation différentielle à laquelle satisfait $C_n^\nu$ admet une seconde solution, qui peut se mettre sous la forme

$$H_n^\nu(z) = K C_n^\nu(z) \int_\infty^z \frac{dt}{(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [C_n^\nu(t)]^2},$$

où K est une constante arbitraire. Si l'on prend K égal à $\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)}$, la fonction $H_n^\nu$ satisfera, non seulement à la même équation différentielle, mais à la même équation aux différences que $C_n^\nu$. Or, comme nous savons que la fonction

$$\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} B_n^\nu$$

satisfait aussi à cette équation, nous aurons, $\varphi$ et $\psi$ étant indépendants de $n$,

$$H_n^\nu(z) = \varphi(z)\, C_n^\nu(z) + \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} \psi(z) B_n^\nu(z).$$

En effet, si nous appliquons à $H_n^\nu$ la méthode générale de réduction, que nous avons signalée ailleurs, et que nous avons employée plus haut pour obtenir la valeur de $Q_n$, nous serons conduits à l'expression

$$H_n^\nu(z) = (2\nu+1) H_\bullet^{\nu+1}(z) C_n^\nu(z) - \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} \frac{B_n^\nu(z)}{(1-z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}},$$

généralisation de celle qui donne $Q_n(z)$.

*Polynomes* $U_n$. — Particulièrement intéressants, au point de vue des applications, sont les polynomes $C_n^1$, qui, désignés par le symbole $U_n$, ont été rencontrés par MM. Guillet et Aubert dans une question d'électrostatique ([1]), et forment la base de la théorie des polynomes *Électro-sphériques* introduits par ces auteurs. Les polynomes B associés aux polynomes U s'expriment fort simplement en fonction des U eux-mêmes. En faisant en effet $\nu = 1$ dans le déterminant qui donne $B_n^\nu$, on trouve, après simplifications,

$$B_n^1 = \frac{1}{n+1} \begin{vmatrix} \frac{3}{2}z & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ . & . & . & .. & . & \dots \end{vmatrix},$$

avec toujours $n-1$ lignes. En développant, il vient

$$(n+1)B_n^1 = \frac{3}{2}z \begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ . & . & .. & . & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ . & . & .. & . & \dots \end{vmatrix},$$

([1]) *Annales de Physique*, 9ᵉ série, t. IX, 1918, p. 58.

le premier déterminant étant à $n-2$ lignes, et le second à $n-3$. Or, ainsi qu'il est facile de le vérifier, le déterminant à $n$ lignes

$$\begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

n'est autre que le polynome $U_n$ lui-même. On a donc la remarquable expression

$$(n+1)B_n^1 = \frac{3}{2} z U_{n-2} - U_{n-3},$$

ce qu'on peut encore écrire, eu égard aux propriétés des fonctions U,

$$(n+1)B_n^1 = U_{n-1} - \frac{z}{2} U_{n-2},$$

ou

$$(n+1)B_n^1 = \frac{z}{2} U_n - (z^2-1)U_{n-1},$$

ou, encore plus simplement,

$$4(n+1)B_n^1 = 3U_{n-1} - U_{n-3}.$$

*Polynomes* $C_n^0$. — Aux fonctions $C_n^\nu$ se rattachent les polynomes que l'on désigne par la notation $C_n^0$, et que l'on définit comme le coefficient de $2\alpha^n$ dans le développement de

$$-\log(1-2\alpha z+\alpha^2).$$

Si l'on pose $z=\cos\theta$, on a alors

$$C_n^0(z) = \frac{\cos n\theta}{n}.$$

Les polynomes associés, $A_n^0$ et $B_n^0$, ont alors une expression remarquablement simple, et qu'il est facile de vérifier :

$$B_n^0(z) = \cos(n-1)\theta = (n-1)C_n^0(z)$$

et

$$A_n^0(z) = -n\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = -nC_n'^0(z).$$

## VII.

*Polynomes de Jacobi.* — Les polynomes de la série hypergéométrique, introduits par Jacobi ([1]) et spécialement étudiés par Darboux ([2]), peuvent également être considérés comme une généralisation des polynomes de Legendre.

Rappelons brièvement leurs principales propriétés, avant d'étudier les polynomes qui leur sont associés par l'identité fondamentale.

Nous désignons par $X_n(z)$ le polynome de Jacobi d'ordre $n$, exprimé par le symbole

$$F(-n, \alpha+n; \gamma; z).$$

Il satisfait donc à l'équation hypergéométrique

$$z(1-z)X''_n + [\gamma-(\alpha+1)z]X'_n + n(\alpha+n)X_n = 0. \tag{16}$$

Parmi les relations de récurrence qu'admettent ces polynomes et leurs dérivées, citons les trois suivantes :

$$\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(X_{n+1}-X_n) + (2n+\alpha)z\,X_n + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(X_{n-1}-X_n) = 0, \tag{17}$$

$$nX_n - zX'_n = nX_{n-1} + \frac{n}{n+\alpha-1}zX'_{n-1}, \tag{18}$$

$$(n+\gamma)X_{n+1} - z(1-z)\frac{2n+\alpha+1}{n+\alpha}X'_n = [n+\gamma-(2n+\alpha+1)z]X_n. \tag{19}$$

La fonction de seconde espèce $Q_n$ donne lieu à diverses remarques intéressantes. Darboux la définit par le développement

$$\frac{1}{z-y} = \sum_0^\infty \frac{X_n(z)Q_n(y)}{J_n},$$

---

([1]) *Untersuchung über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Crelle*, t. 56, 1859).

([2]) *Approximation des fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878).

où

$$J_n = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}.$$

La fonction $Q_n$ ainsi définie vérifie l'équation aux différences (17), qui lie trois polynomes de Jacobi consécutifs ; mais elle ne vérifie pas l'équation différentielle (16). L'équation différentielle pour $Q_n$ est en effet

$$z(1-z)Q''_n + [2-\gamma+(\alpha-3)z]Q'_n + (n+1)(n+\alpha-1)Q_n = 0.$$

Mais, si l'on pose

$$Q_n(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}U_n(z),$$

on aura

$$U_n(z) = (2n+\alpha)J_n X_n(z)\int_z^\infty \frac{dt}{t^\gamma(1-t)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2(t)}$$

et $U_n$ vérifiera l'équation différentielle (16).

***Polynomes associés aux polynomes** de Jacobi*. — Ceci posé, nous introduisons, comme toujours, les polynomes définis par l'identité fondamentale

$$\mathcal{A}_n X_n + \mathcal{B}_n X'_n \equiv 1.$$

Comme nous l'avons fait dans les cas précédents, nous établirons, sans aucune difficulté, au moyen des formules (18) et (19), la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} n(n+\alpha-\gamma)X_{n-1}\mathcal{B}_n - (n+\alpha-1)(n+\gamma-1)X_n\mathcal{B}_{n-1} \\ + z(1-z)(2n+\alpha-1) = 0 \end{aligned}$$

et nous en déduirons la formule de récurrence liant trois polynomes $\mathcal{B}$ consécutifs :

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{2n+\alpha+1}\mathcal{B}_{n+1} + \frac{(n+\alpha-1)(n+\gamma-1)}{2n+\alpha-1}\mathcal{B}_{n-1} \\ &\quad - \left[\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1} + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1} - (2n+\alpha)z\right]\mathcal{B}_n = 0. \end{aligned}$$

Cette formule, on le voit, n'est pas la même que la relation (17) entre trois polynomes X. Elle ne lui sera identique que dans le cas $\gamma = 1$. Si de plus on a $\alpha = 1$, on retombe, par un simple changement de variable, sur les polynomes de Legendre.

On sait que, si $\alpha = 2\gamma - 1$, les polynomes de Jacobi deviennent identiques aux polynomes de Gegenbauer. Ce qui précède nous montre donc que les fonctions $B_n^\nu$ et $C_n^\nu$ ne satisfont à la même équation aux différences que si $\gamma = 1$, donc $\alpha = 1$, c'est-à-dire dans le cas des fonctions de Legendre, fait que nous avions déjà remarqué directement.

*Expression de la fonction de seconde espèce.* — La fonction de seconde espèce $Q_n$ ne s'exprimera donc par une expression de la forme

$$Q_n(z) = \varphi(z)X_n(z) + \psi(z)\mathfrak{B}_n(z)$$

que dans le cas $\gamma = 1$.

Mais, dans le cas général, si l'équation aux différences (17) n'est pas satisfaite par $\mathfrak{B}_n(z)$, on peut remarquer qu'elle est satisfaite par la fonction

$$(2n+\alpha)J_n\mathfrak{B}_n(z).$$

Donc on aura toujours

$$Q_n(z) = \varphi(z)X_n(z) + (2n+\alpha)J_n\psi(z)\mathfrak{B}_n(z).$$

D'ailleurs, pour $\gamma = 1$, on a $(2n+\alpha)J_n = 1$.

On trouvera cette expression en appliquant à $U_n$, seconde solution de l'équation différentielle (16), la méthode générale de réduction que nous avons indiquée. Dans le cas $\gamma = 1$, on aura

$$Q_n = X_n Q_0 + \frac{\alpha(\alpha+1)\mathfrak{B}_n + [\alpha - (\alpha+1)z]X_n}{\alpha(\alpha+1)z(1-z)}$$

et, dans le cas général,

$$(20)\quad Q_n = X_n Q_0 + \frac{(2n+\alpha)J_n\mathfrak{B}_n}{z(1-z)} + \frac{J_0 X_n[\alpha - \gamma + 1 - (\alpha+1)z]}{\gamma(\alpha+1)z(1-z)};$$

on a d'ailleurs

$$Q_0 = F\left(\gamma, 1; \alpha+1; \frac{1}{z}\right).$$

La formule (20) donne une expression nouvelle de $Q_n$, que l'on pourra ajouter aux huit expressions différentes qu'en a données Darboux.

## VIII.

*Polynomes d'Hermite.* — Nous allons terminer ce travail en faisant connaître quelques propriétés des polynomes $A_n$ et $B_n$ associés, par l'identité fondamentale, aux polynomes $U_n$ d'Hermite, qui peuvent être considérés comme un cas limite des polynomes de Jacobi. On sait que ces polynomes (¹), définis par

$$U_n(x) = e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

satisfont à l'équation différentielle

$$U''_n - 2xU'_n + 2nU_n = 0,$$

à l'équation aux différences

(21) $$U_{n+1} + 2xU_n + 2nU_{n-1} = 0,$$

et possèdent la propriété fondamentale suivante :

(22) $$U'_n = -2nU_{n-1}.$$

Nous démontrerons, par la méthode ordinaire, en nous servant de (22) et de

$$U_{n+1} + 2xU_n - U'_n = 0,$$

qui est une conséquence de (21) et (22), la relation de récurrence

(23) $$U_{n+1}B_n - 2(n+1)U_nB_{n+1} - 1 = 0.$$

Or, d'après (22), cette relation s'écrit

$$U_{n+1}B_n + B_{n+1}U'_{n+1} = 1,$$

ce qui montre, par comparaison avec l'identité fondamentale, que l'on a la remarquable propriété suivante :

(24) $$A_{n+1} = B_n.$$

Diverses autres formules peuvent être écrites aisément : ainsi

---

(¹) Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 294-308.

la relation de récurrence entre trois polynomes B consécutifs,

$$2(n+1)B_{n+1}+2xB_n+B_{n-1}=0,$$

et l'expression de $B_n$ sous forme de déterminant à $n-1$ lignes :

$$B_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}n!}\begin{vmatrix} 2x & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2x & 6 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2x & 8 & 0 & \dots \\ . & . & .. & . & . & \dots \end{vmatrix}.$$

L'identité fondamentale, écrite sous la forme

$$B_{n-1}U_n+B_nU'_n=1$$

donne, par dérivation, et en tenant compte des relations de récurrence établies plus haut, la formule

$$U_n[B'_{n-1}-2nB_n]-2nU_{n-1}[B'_n-2(n+1)B_{n+1}]=0,$$

d'où l'on tirera, eu égard au degré des divers termes,

$$\begin{aligned} B'_n-2(n+1)B_{n+1}&=K_nU_n,\\ B'_{n-1}-2nB_n&=-2nK_nU_{n-1},\end{aligned}$$

$K_n$ étant une constante dépendant de $n$ ; d'ailleurs

$$B'_{n-1}-2nB_n=K_{n-1}U_{n-1},$$

d'où

$$K_{n-1}=2nK_n$$

et, comme $K_1=\frac{1}{2}$,

$$K_n=\frac{1}{2^n n!}.$$

Nous aurons donc enfin

$$B'_n-2(n+1\,B_{n+1}=\frac{U_n}{2^n n!}.$$

Ce résultat nous permettra d'écrire le développement de B en série de polynomes U. On aura en effet

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)!\,B_{n+1}-2^n n!\,B'_n+U_n&=0,\\ 2^n n!\,B'_n-2^{n-1}(n-1)!\,B''_{n-1}+U'_{n-1}&=0,\end{aligned}$$

et ainsi de suite, d'où en ajoutant

$$2^{n+1}(n+1)!\,B_{n+1}+U_n+U'_{n-1}+U''_{n-2}+\dots=0.$$

En tenant compte de (22), on exprimera les dérivées successives des U en fonction de ces U eux-mêmes, et l'on aura

$$-2^{n+1}(n+1)!\,B_{n+1} = U_n - 2(n-1)\,U_{n-2} + 4(n-2)(n-3)\,U_{n-4} + \ldots,$$

le coefficient du terme $U_{n-2p}$ étant

$$(-1)^p 2^p (n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+1).$$

Il sera facile d'en déduire, en s'appuyant sur une propriété connue des polynomes d'Hermite, la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} B_n U_m \, dx.$$

*Polynomes de M. Appell.* — La propriété la plus intéressante des polynomes associés aux polynomes d'Hermite, c'est-à-dire la relation

$$A_{n+1} = B_n, \tag{24}$$

peut se généraliser de la façon suivante. Considérons une suite de polynomes $X_0$, $X_1$, ..., $X_n$, ... satisfaisant à une équation différentielle du type

$$X_n'' + [a(n)x + b(n)]X_n' + f(n)X_n = 0$$

et jouissant de la propriété suivante :

$$X_n' = \varphi(n)X_{n-1}, \tag{25}$$

ce qui les fait rentrer dans la classe de polynomes étudiée par M. Appell (1). Il est facile de voir que ces polynomes satisfont à l'équation aux différences

$$f(n+1)X_{n+1} + [a(n+1)x + b(n+1)]X_n + \varphi(n+1)\varphi(n)X_{n-1} = 0. \tag{26}$$

L'identité fondamentale pourra s'écrire

$$A_n X_n + \varphi(n) B_n X_{n-1} \equiv 1.$$

Écrivons de plus

$$A_{n+1} X_{n+1} + \varphi(n+1) B_{n+1} X_n \equiv 1.$$

(1) *Annales de l'École Normale*, t. IX, 1880, p. 119-144.

Si $\alpha$ est une racine de $X_n$, on aura

$$A_{n+1}(\alpha)\,X_{n+1}(\alpha) = \varphi(n)\,B_n(\alpha)\,X_{n-1}(\alpha).$$

Or, d'après (26),

$$f(n+1)\,X_{n+1}(\alpha) + \varphi(n)\,\varphi(n+1)\,X_{n-1}(\alpha) = 0;$$

donc

$$f(n+1)\,B_n(\alpha) + \varphi(n+1)\,A_{n+1}(\alpha) = 0,$$

ce qui, eu égard au degré de $B_n$ et de $A_{n+1}$, nous montre que

$$f(n+1)\,B_n(x) + \varphi(n+1)\,A_{n+1}(x) \equiv 0,$$

relation qui généralise la formule (24) pour les polynomes de la classe de M. Appell.