BULLETIN DE LA S. M. F.

AMSLER

Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle quadratique

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 10-34
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__10_0>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE D'UNE IRRATIONNELLE QUADRATIQUE;

PAR M. AMSLER.

DE LA MÉDIATION. — Soient $a : b$ et $c : d$ deux fractions à termes entiers aux dénominateurs de même signe. $\frac{a+c}{b+d}$ s'appelle leur *médiante*. Notons les égalités

$$(1)\qquad ad - bc = a(b+d) - b(a+c) = (a+c)d - (b+d)c.$$

Elles montrent que $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre $a : b$ et $c : d$.

Au cas où $ad - bc = \pm 1$, appelons *contiguës* les deux premières fractions; chacune d'elles est contiguë à la médiante d'après les égalités (1).

Approximation d'une irrationnelle par médiations successives. — Soit ω un nombre positif donné. Partons de $1 : 0$ et $0 : 1$ et formons une suite de fractions $f_1, f_2, \ldots, f_h, \ldots, f_k, \ldots$ par la règle suivante : f_{k+1} est la médiante entre f_k et f_h, f_h étant la fraction d'indice inférieur à k la plus récemment écrite telle que f_k et f_h soient approchés de ω en sens contraires.

Les fractions se partagent en groupes de fractions approchées de ω par excès et en groupes de fractions approchées par défaut. Nous appellerons *principales* celles qui terminent les groupes en question.

A chaque fraction par excès faisons correspondre le symbole ε, à chaque fraction par défaut le symbole η. La suite des nombres ε, η correspondant aux diverses fractions et rangés dans l'ordre de formation s'appelle la *caractéristique* de ω.

Comme $1 : 0$ et $0 : 1$ sont contiguës, toute fraction de la suite est contiguë à la précédente et à la fraction principale la plus récente écrite avant cette dernière.

Interprétation des fractions principales. — Les fractions principales coïncident avec les réduites du développement de ω en fraction continue.

Si $\varepsilon\eta^p\varepsilon^q\eta^r\varepsilon^s\eta^t\ldots$ est la caractéristique de ω, son développement en fraction continue a $p-1$ pour partie entière, les premiers quotients incomplets étant q, r, s, t, ...

Le théorème est évident pour les deux premières réduites $p-1$ et $\frac{(q-1)p+1}{q}$. On l'établit aisément en le supposant vrai jusqu'à un certain rang des réduites et des fractions principales et formant à l'aide de la caractéristique la fraction principale du rang suivant.

Réciproquement, si une irrationnelle positive ω est comprise entre deux fractions contiguës, ce sont deux fractions de la suite formée pour calculer ω par médiations successives, celle dont les termes sont les plus petits étant une fraction principale.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions à termes > 0 et entiers comprenant entre elles ω et telles que $|ad-bc| = 1$.

En supposant $a < c$, on en déduit $b < d$.

Divisons c par a et d par b

$$\begin{aligned} c &= aq + r \qquad (r < a), \\ d &= bq' + r' \qquad (r' < b). \end{aligned}$$

Un raisonnement connu dit que $q = q'$ et que

$$ad - bc = ar' - br.$$

On forme les fractions

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+r}{b+r'}, \quad \frac{2a+r}{2b+r'}, \quad \ldots, \quad \frac{qa+r}{qb+r'},$$

la dernière étant du reste $\frac{c}{d}$ elle-même ; à partir de la troisième fraction, chaque fraction est la médiante entre la précédente et $\frac{a}{b}$. On aurait en classant par ordre de grandeur (croissante ou décroissante)

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{qa+r}{qb+r'}, \quad \ldots, \quad \frac{2a+r}{2b+r'}.$$

Mettons à leur place ω et $\frac{r}{r'}$

$$\frac{a}{b}, \quad \omega, \quad \frac{qa+r}{qb+r'}, \quad \ldots, \quad \frac{2a+r}{2b+r'}, \quad \frac{a+r}{b+r'}, \quad \frac{r}{r'},$$

$\frac{r}{r'}$ est approché de ω comme $\frac{c}{d}$, mais avec une moins bonne approximation, et $\frac{a}{b}$, $\frac{r}{r'}$ sont deux fractions contiguës comprenant entre elles ω; on divise a par r, d'où le reste ρ; a' par r', d'où le reste ρ'.

On est ramené au raisonnement déjà fait sur $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On continue jusqu'à épuisement des termes successifs a, r, ρ, ..., d, r', ρ', ... et le calcul est résumé dans l'un des Tableaux :

$$\frac{0}{1}, \quad \ldots, \quad \frac{\rho}{\rho'}, \quad \ldots, \quad \frac{a}{b}, \quad \omega, \quad \frac{c}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{r}{r'}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{0};$$

$$\frac{1}{0}, \quad \ldots, \quad \frac{\rho}{\rho'}, \quad \ldots, \quad \frac{a}{b}, \quad \omega, \quad \frac{c}{d}, \quad \ldots, \quad \frac{r}{r'}, \quad \ldots, \quad \frac{0}{1}.$$

En lisant ces Tableaux à rebours on voit que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ résultent de quelques médiations faites à partir de $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ pour approcher de ω, $\frac{a}{b}$ précédant un changement de sens de l'approximation.

C. Q. F. D.

On déduirait de là le théorème de Serret :

Si deux nombres positifs ω et ω' sont équivalents, c'est-à-dire liés par la relation $\omega' = \frac{p\omega + q}{p'\omega + q'}$ où p, q, p', q' sont des entiers tels que $|pq' - qp'| = 1$; ils ont en commun un quotient complet.

On montrerait qu'à partir d'un certain rang, les caractéristiques de ω et ω' coïncident.

Approximation d'une irrationnelle quadratique. — Soit à développer en fraction continue une racine d'une équation du second degré.

En amorçant le calcul par la méthode de Lagrange, on pourra toujours ramener le cas d'une équation à deux racines de même signe à celui de l'équation aux racines de signes contraires.

Soit alors

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

une équation où a, b, c sont des entiers premiers entre eux,

a et c étant de signes contraires. Nous lui ferons correspondre une forme quadratique indéfinie $ax^2 + 2bxy + cy^2$ que nous appellerons *réduite*, voulant rappeler, par là, que $ac < 0$.

Traitons l'exemple

$$3z^2 + 8z - 7 = 0.$$

Nous calculerons la racine $\omega > 0$ à partir de $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$ et nous remplacerons z par les fractions successives dans $3z^2 + 8z - 7$ pour connaître à chaque instant le sens de l'approximation. Plus commodément, nous formerons les valeurs de $3x^2 + 8xy - 7y^2$ quand x et y sont les termes des fractions successives :

$$(1) \qquad 3 \quad -7 \quad 4 \quad -9 \quad -3 \quad 11 \quad 12 \quad 7 \quad -4 \quad \ldots,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{0} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{9}{13} \quad \ldots.$$

La caractéristique de la racine ω est

$$\varepsilon^1 \eta^1 \varepsilon^2 \eta^2 \varepsilon^3 \ldots;$$

d'où

$$\omega = 1 - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}$$

Appelons *index successifs* les termes de la suite (1).

On peut les calculer *directement* à partir de $3 \; -7 \; +4$, sans passer par la suite (2), donc sans faire de substitutions dans

$$3x^2 + 8xy - 7y^2,$$

comme nous le montrerons bientôt.

Appelons *index contigus* deux à deux les index fournis par une fraction de la suite, la fraction principale antérieure la plus récente et par leur médiante qui, précisément sont trois fractions contiguës deux à deux.

Établissons une relation du second degré entre trois index contigus.

Relations entre trois index contigus. — Soient $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ trois fractions contiguës empruntées à la suite, r, r', r'' les index correspondants, r et r' étant nécessairement de signes contraires.

On a

$$\begin{aligned} ap^2 + 2bpq \ \ + cq^2 \ &= r, \\ ap'^2 + 2bp'q' + cq'^2 &= r', \\ ap''^2 + 2bp''q'' + cq''^2 &= r'', \end{aligned}$$

avec

$$p'' = p + p', \qquad q'' = q + q'.$$

Dans la forme $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$, faisons la substitution

$$\begin{cases} x = pX + p'Y, \\ y = qX + q'Y. \end{cases}$$

Il vient

$$f(pX + p'Y, qX + q'Y) = rX^2 + \lambda XY + r'Y^2,$$

λ étant un entier; faisons $X = Y = 1$, il vient

$$\begin{aligned} r'' &= r + \lambda + r', \\ \lambda &= r'' - r - r'. \end{aligned}$$

Mais $b^2 - ac$ est un invariant pour toute substitution linéaire faite dans f; comme $|pq' - qp'| = 1$, on a

$$\lambda^2 - 4rr' = 4(b^2 - ac)$$

ou encore

$$(1) \qquad (r'' - r - r')^2 - 4rr' = 4(b^2 - ac),$$

$$(2) \qquad r^2 + r'^2 + r''^2 - 2r'r'' - 2r''r - 2rr' = 4(b^2 - ac).$$

C'est la relation annoncée (on en déduirait qu'un index quelconque est inférieur à Δ en valeur absolue). Elle est symétrique par rapport à r, r', r''.

Remarque. — Il est clair que la forme réduite

$$rX^2 + (r'' - r - r')XY + r'Y^2,$$

où d'ailleurs $r'' - r - r'$ est *pair* d'après (1), donne précisément pour premiers index r, r', r'' quand on fait usage des fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$.

Définition générale des index. — Comme on l'a dit plus haut, les index relatifs à la racine ω de $f(z, 1) = 0$ sont les résultats de la substitution dans la forme des termes des fractions qui convergent vers le nombre $> 0 : \omega$, au fur et à mesure que le nombre des médiations augmente.

Pour une forme g *non réduite*, on pourra attribuer une suite d'index à chaque racine positive de l'équation $g(z, 1) = 0$; on les obtiendra en substituant dans $g(x, y)$ les termes des médiantes successives et commençant chaque suite à la première variation de signe accusée par les résultats de substitution.

Si dans $g(x, y)$ deux certaines fractions contiguës $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ fournissent deux résultats de signes contraires, la plus simple d'entre elles est une réduite du développement d'une racine de $g(z, 1) = 0$ en fraction continue.

Récurrence linéaire des index. — Étant donné un groupe de trois index contigus, former le suivant :

Soient r, r', r'' trois index contigus, où d'ailleurs r et r' présentent une variation. Nous distinguerons deux cas :

1° r, r', r'' présentent *deux* variations.

Par exemple $\overset{+}{r}$, $\overset{-}{r'}$, $\overset{+}{r''}$. Si r''' est le suivant de r'', il est contigu à r' et r'', donc l'équation

$$(x - r' - r'')^2 = 4r'r'' + 4(b^2 - ac)$$

admet comme racines r et r''', d'où

$$\begin{aligned} r - r' - r'' + r''' - r' - r'' &= 0, \\ r + r''' &= 2(r' + r''). \end{aligned}$$

2° r, r', r'' présentent *une* variation.

Elle est entre r et r' et l'on aura, par exemple, $\overset{+}{r}$, $\overset{-}{r'}$, $\overset{-}{r''}$.

Si r''' est le suivant de r'', il sera contigu à r et r'' et l'équation

$$(x - r - r'')^2 = 4rr'' + 4(b^2 - ac)$$

aura pour racines r' et r''', d'où

$$\begin{aligned} r' - r - r'' + r''' - r - r'' &= 0, \\ r' + r''' &= 2(r + r''). \end{aligned}$$

Concilions les cas 1° et 2° dans une règle unique.

Règle de récurrence. — On écrit les quatre index r, r', r'', r''' dans un ordre tel que les trois premiers présentent *deux* variations, *en permutant au besoin les deux premiers. La somme des extrêmes est alors le double de celle des moyens.*

Application. — Si dans un groupe de trois index contigus, on échange les deux premiers, les index postérieurs ne sont pas altérés.

A remarquer que, dans un groupe d'index contigus, l'index seul de son signe n'occupe jamais la dernière place, car il n'y a jamais lieu de prendre la médiante entre deux fractions approchées de ω dans le même sens.

Reprenons l'exemple donné plus haut et partons du groupe

$$+3 \quad -7 \quad +4$$

3	−7	+4	−9	$-9 = 2(4-7)-3,$
−7	4	−9	−3	$-3 = 2(-9+4)+7,$
4	−9	−3	+11	....................,
4	−3	11	−12	....................,
−3	11	12	7	$7 = 2(12-3)-11,$
...	..	..	.	....

Nous construisons la suite des index et il en résulte immédiatement la caractéristique de ω.

On voit immédiatement que si r, r', r'' sont trois entiers de somme paire, r et r' étant de signes contraires, on peut engendrer une suite d'index à partir de r, r', r'', qui régira le calcul de la racine $>$ o de l'équation

$$rz^2 + 2\,\frac{r'' - r - r'}{2}\,z + r' = 0.$$

Rétrorécurrence des index. — Si r et r' sont de signes contraires et $r+r'+r''$ pair, on peut se demander si le groupe (r, r', r'') représente toujours un groupe d'index contigus de rang au moins égal à deux, relatif au calcul d'une certaine irrationnelle quadratique. La réponse est affirmative.

I. *r et r' seraient consécutifs.* — Soit ρ l'index principal le plus voisin de r quand on remonte la suite supposée. On aura par exemple

$$\overset{-}{\rho}, \quad \ldots, \quad \overset{+}{r}, \quad \overset{-}{r'}, \quad r''.$$

La règle de récurrence donne

$$\rho + r'' = 2(r + r'),$$
$$\rho = 2r + 2r' - r''.$$

II. *r et r' ne seraient pas consécutifs.* — Soit σ l'index qui dans la suite supposée précède immédiatement r'; r est l'index principal le plus voisin de r' quand on remonte la suite et l'on a par exemple

$$\overset{+}{r}, \quad \ldots, \quad \overset{-}{\sigma}, \quad \overset{-}{r'}, \quad r''.$$

Appliquons la règle de récurrence

$$\sigma, \quad r'', \quad r', \quad r'';$$
$$\sigma + r'' = 2(r + r'),$$
$$\sigma = 2r + 2r' - r''.$$

Dans la suite supposée, le groupe d'index contigus qui engendre (r, r', r'') serait donc

$$(2r + 2r' - r'', r, r') \qquad \text{ou bien} \qquad (r, 2r + 2r' - r'', r');$$

encore faut-il, pour que ce groupe soit acceptable, que r et $2r + 2r' - r''$ soient de signes contraires.

Si cette condition est remplie, (r, r', r'') sera au moins le second d'une certaine suite de groupes d'index contigus; nous dirons qu'*il admet un précédent*.

Si cette condition n'est pas remplie, (r, r', r'') *n'aura pas de précédent*, mais par contre (r', r, r'') aura un précédent, puisque, dès lors, r' et $2r + 2r' - r''$ seront de signes contraires.

Donc on peut, par rétrorécurrence, constituer une suite de groupes d'index contigus où (r, r', r''), ou, peut-être, (r', r, r'') occupe un rang arbitraire et cela d'une seule manière.

Exemple. — Donnons-nous

$$-2 \quad +26 \quad +30.$$

En principe, prenons pour précédent de (r, r', r'') le groupe $(2r + 2r' - r'', r, r')$ quitte à modifier l'ordre des deux premiers pour engendrer un deuxième précédent,

$$-4 \; +52 \; -30, \quad -2, \quad +26 \qquad \text{ou} \qquad +18 \; -2 \; +26.$$

Le précédent de $+18 \; -2 \; +26$ serait $6 \; 18 \; -2$ qui est à rejeter; il faut donc écrire $-2 \; 18 \; 26$ et prendre le précédent $6 \; -2 \; 18, \ldots$. On lira le Tableau de *bas en haut :*

$$\uparrow \quad \begin{array}{c|ccc} . & \ldots & .. & .. \\ 6 & -2 & 18 & 26 \\ 18 & -2 & 26 & 30 \end{array}$$

Remarque. — Supposons qu'en calculant une suite d'index, on constate que le signe des index est à un moment donné stabilisé pour une durée assez longue, ce qui correspond pour ω à un quotient incomplet élevé; on pourra accélérer le calcul par le moyen d'un Tableau de différences.

Si $\left|\overset{+}{a} \quad -\overset{-}{b} \quad -\overset{-}{c}\right|$ engendre un grand nombre d'index négatifs, on verrait qu'ils se calculent par le Tableau suivant :

Index.	Δ.	Δ^2.
$-b$	—	$2a$
$-c$	—	$2a$
$2a + b - 2c$	—	$2a$
....	..	...
$n(n+1)a + nb - (n+1)c$	—	$2a$
....	..	...

On ira jusqu'au premier nombre > 0 qu'on rencontrera dans la première colonne et l'on reprendra la règle de récurrence ordinaire.

Périodicité des groupes d'index contigus. — Pour une forme réduite où $b^2 - ac = \Delta$, les groupes d'index contigus *font partie* des solutions en entiers *non tous du même signe* de l'équation

$$r^2 + r'^2 + r''^2 - 2r'r'' - 2r''r - 2rr' = 4\Delta$$

ou encore

$$(r'' - r - r')^2 - 4rr' = 4\Delta.$$

Soient r l'index seul de son signe ; R, R′, R″ les valeurs absolues de r, r', r''. On aura

$$(R'' + R - R')^2 + 4RR' = 4\Delta,$$

équation qu'il faut résoudre en entiers positifs. En supposant $R'' \geqq R'$, on posera

$$\left\{\begin{aligned} R'' + R - R' &= 2\lambda, \\ RR' &= \Delta - \lambda^2, \end{aligned}\right.$$

λ étant un entier positif dont le carré soit inférieur à Δ ; $R'' \geqq R'$ entraîne $R \leqq 2\lambda$, ce qui conduit à rejeter la valeur $\lambda = 0$. Il y aura un nombre *fini* de solutions, puisque $\lambda^2 < \Delta$, et, *a fortiori*, la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ne pourra engendrer qu'un nombre *fini* de groupes d'index contigus.

Appliquons à l'exemple

$$3x^2 + 8xy - 7y^2 \quad \text{ou} \quad \Delta = 16 + 21 = 37;$$

$$\left\{\begin{aligned} RR' &= 37 - \lambda^2 \qquad (0 < \lambda^2 < 37), \\ R'' &= 2\lambda < R' - R \qquad (R \leqq 2\lambda). \end{aligned}\right.$$

On peut former le Tableau suivant :

λ.	RR′.	R.	R′.	R″.
1	36	1	36	37
		2	18	18
2	33	1	33	36
		3	11	12
3	28	1	28	33
		2	14	18
		4	7	9
4	21	1	21	28
		3	7	12
		7	3	4
5	12	1	12	21
		2	6	14
		3	4	11
		4	3	9
		6	2	6
6	1	1	1	12

Nous soulignons les groupes qui figurent dans la suite relative à $3x^2 + 8xy - 7y^2$.

Soit p le nombre des groupes R, R′, R″ relatifs à la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Au groupe RR′R″ *peuvent* correspondre les huit groupes suivants :

$$\begin{array}{llll} R - R' - R'', & R - R'' - R', & -R' \quad R - R'', & -R'' + R - R', \\ -R \quad R' \quad R'', & -R \quad R'' \quad R', & R' - R \quad R'', & R'' - R \quad R', \end{array}$$

puisque l'index seul de son signe n'est jamais le dernier du groupe. Il faut même supprimer la moitié de ces groupes comme n'ayant pas de précédents. A l'instant où l'on écrira le groupe d'index contigus d'ordre $4p + 1$, *au plus tard*, il y aura dans la suite deux groupes identiques.

La règle de récurrence montre qu'à partir du groupe qui s'est reproduit le premier, il y a périodicité des groupes et par suite des index de la suite.

Je dis que le premier groupe récrit est le groupe de tête, abstraction faite de l'ordre des deux premiers index.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; nous entrons en contradiction avec la propriété signalée plus haut, au sujet de la rétrorécurrence d'après laquelle tous les précédents d'un groupe sont déterminés d'une manière unique. C. Q. F. D.

Périodicité des index. — Si le premier groupe d'index contigus admet un précédent, pour parler comme plus haut, il se reproduira tel quel. Sinon il se reproduira avec inversion des deux premiers index.

Dans le premier cas, la suite des index sera périodique au moins à partir du deuxième ; dans le second cas, elle sera périodique seulement à partir du troisième.

Remarque. — Il arrive souvent, et c'est le cas pour

$$3x^2 + 8xy - 7y^2,$$

que le groupe de tête se reproduit au signe près avant de se reproduire exactement. Dans ce cas la période d'index se décompose en deux *antipériodes* de même longueur ne différant que par un changement de signe général :

$$3 \diagdown \underline{-7\ 4\ -9\ -3\ 11\ 12} \diagup \overline{7\ -4\ 9\ 3\ -11\ -12} \diagdown \underline{-7\ 4\ -9\ -3\ 11\ 12} \diagup \overline{\ldots}$$

Cycles de groupes d'index contigus. — Si à partir d'un groupe (r, r', r'') de trois index contigus qui admet un précédent on construit une suite d'index, le groupe de tête se reproduira tel quel et l'on aura une chaîne sans fin parfaitement périodique de groupes d'index contigus qu'on pourra reconstituer par récurrence ou rétrorécurrence à partir d'un seul de ces groupes.

Nous appellerons *cycle* une telle chaîne.

Exemple : $3\ -7\ 4$ engendre un cycle.

$7\ -3\ 4$ n'engendrerait qu'un cycle *imparfait;* il deviendrait parfait par suppression du groupe initial.

Formes réduites rattachées à un cycle. — Engendrons un cycle à partir de (r, r', r'') et soit (ρ, ρ', ρ'') un groupe du cycle. La forme

$$\rho x^2 + (\rho'' - \rho' - \rho)xy + \rho' y^2$$

sera *rattachée* au cycle. Elle est réduite puisque $\rho\rho' < 0$.

Toutes les formes rattachées à un cycle sont équivalentes proprement ou improprement. Il suffit de raisonner sur deux formes consécutives, la première résultant du groupe (ρ, ρ', ρ'').

1° (ρ, ρ', ρ'') *ont deux variations*, d'où

$$\rho''' = 2(\rho' + \rho'') - \rho.$$

On vérifie aisément que les deux formes

$$\rho x^2 + (\rho'' - \rho' - \rho)xy + \rho' y^2 \quad \text{et} \quad \rho' X^2 + (\rho''' - \rho'' - \rho')XY + \rho'' Y^2$$

sont liées par la substitution

$$\begin{cases} x = Y, \\ y = X + Y; \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

2° (ρ, ρ', ρ'') *ont une variation,* d'où

$$\rho''' = 2(\rho'' + \rho) - \rho'.$$

Les deux formes

$$\rho x^2 + (\rho'' - \rho' - \rho)xy + \rho' y^2 \quad \text{et} \quad \rho X^2 + (\rho''' - \rho'' - \rho)XY + \rho'' Y^2$$

sont liées par la substitution

$$\begin{cases} x = X + Y, \\ y = Y; \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Cycles conjugués. — Soient un cycle et les formes réduites y rattachées.

A toute forme de la suite, faisons correspondre une autre forme par la tranformation

$$x = Y, \qquad y = -X,$$

si la première correspond à un groupe d'index à deux variations; par la transformation

$$x = X, \qquad y = -Y,$$

si le groupe en question ne présente qu'une variation.

Si l'on range les nouvelles formes en sens inverse de l'ordre de formation, elles sont rattachées à un certain cycle. Pour le démontrer, considérons deux formes consécutives : f_1, f_2 rattachées au cycle donné, les formes nouvelles g_{-1} et g_{-2} qui leur correspondent.

Il y a lieu de distinguer quatre cas, suivant les nombres de variations que comportent les groupes d'index qui engendrent f_1 et f_2.

Traitons le cas où f_1, f_2 sont engendrées par deux groupes à deux variations,

$$f_1 \rightarrow \overset{+}{r} \quad \overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r''}, \qquad f_1 = rx^2 + (r'' - r - r')xy + r'y^2;$$

$$f_2 \rightarrow \overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r''} \quad \overset{-}{2r' + 2r'' - r}, \qquad f_2 = r'x^2 + (r' + r'' - r)\,xy + r''y^2.$$

A f_1 correspond

$$g_{-1} = r'X^2 - (r'' - r - r')XY + rY^2;$$

A f_2 correspond

$$g_{-2} = r''X^2 - (r' + r'' - r)XY + r'Y^2.$$

Prouvons que g_{-2}, g_{-1} sont deux formes consécutives rattachées a un même cycle.

Dans g_{-2} faisons

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Il vient

$$\overset{+}{r''} \quad \overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r}.$$

Faisons les mêmes substitutions dans g_{-1}; il vient

$$\overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r} \quad 2r+2r'-r''.$$

Le signe $2r+2r'-r''$ n'est du reste pas douteux; puisque (r, r', r'') admet un précédent, c'est que $2r+2r'-r''$ est du signe —. On voit que $\left(\overset{+}{r''}, \overset{-}{r'}, \overset{+}{r}\right)$ et $\left(\overset{-}{r'}, \overset{+}{r}, \overset{-}{2r+2r'-r''}\right)$ sont deux groupes dont le premier engendre le second en appliquant la règle de récurrence. C. Q. F. D.

(Démonstration analogue dans les trois autres cas.)

On lira donc les g dans l'ordre des indices croissants et elles seront rattachées à un cycle.

Ce cycle sera dit *conjugué* du premier.

En observant les quatre formes f_1, g_{-1}, f_2, g_{-2} dans les quatre cas possibles, on trouve que f_1 et g_{-1}, d'une part, et f_2 et g_{-2} de l'autre, sont engendrés par des groupes d'index ayant le même nombre de variations.

Comme la transformation

$$|x, y; X, -Y| \quad \text{ou} \quad |x, y; Y, -X|$$

devient dès lors réversible, on voit que deux cycles conjugués sont réciproques.

Signification du cycle conjugué d'un cycle donné. — Calculons la racine positive de

$$rZ^2+(r''-r-r')Z+r'=0;$$

le calcul est régi par le cycle issu de r, r', r''.

Dans l'hypothèse où r, r', r'' présentent deux variations, posons $Z=-\frac{1}{Z}$, il vient

$$r'Z^2-(r''-r-r')Z+r=0.$$

La racine positive de cette équation se calcule au moyen du cycle conjugué du proposé.

Donc si un cycle régit le calcul d'une racine > 0 de

$$rZ^2 + (r'' - r - r')Z + r' = 0,$$

le conjugué régit le calcul de la deuxième racine ou peut-être de son inverse, suivant que r, r', r'' présentent une ou deux variations.

Théorème. — *Les suites d'index relatives à deux cycles conjugués présentent la même succession de signe + et —, à condition qu'on renverse le sens de lecture pour l'une d'elles.*

Dans les quatre cas distingués plus haut, comparons les signes de deux groupes de trois index consécutifs r', r'', r''' et son analogue; en respectant le sens de lecture propre à chaque cycle; on trouve :

	Cycle donné.			Cycle conjugué.		
I................	—	+	—	—	+	—
II...............	—	+	+	+	+	—
III..............	—	—	—	—	—	—
IV...............	—	—	+	+	—	—

La propriété est visible.

Remarque. — Toutes les formes rattachées à deux cycles conjugués sont évidemment *équivalentes* (*proprement ou improprement*).

Théorème de Lagrange. — Nous avons ramené le cas d'une forme indéfinie quelconque à celui d'une forme réduite.

La suite des index étant périodique au moins à partir du troisième, la fraction continue qui développe une irrationnelle quadratique quelconque *finit par être périodique*.

D'après les propriétés des cycles conjugués, la période des quotients incomplets relatifs à l'une des racines d'une équation du deuxième degré est celle des quotients incomplets de l'autre lue en sens inverse.

Traitons

$$az^2 + 2bz + c = 0, \qquad \text{avec} \qquad ac < 0.$$

En changeant au besoin z en $\frac{1}{z}$, on pourra toujours faire en sorte que le groupe d'index contigus $(a, c, a+2b+c)$ admette un précédent. Il y aura lieu de distinguer quatre cas, suivant que ce groupe initial $(a, c, a+2b+c)$ présente une ou deux variations et que, lors de sa première réapparition, a et c sont ou ne sont pas consécutifs dans la suite.

Traitons l'un de ces quatre cas; celui où $(a, c, a+2b+c)$, qui admet un précédent, ne présente qu'une variation, a et c étant consécutifs dans la suite lors de la première réapparition du groupe.

Écrivons la suite d'index et au-dessous la caractéristique

$$\begin{array}{llllllllllllll} \overset{+}{a} & \overset{-}{c} & \overset{-}{a+2b+c} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \ldots & \overset{+}{a} & \overset{-}{c} & \overset{-}{a+2b+c} & \ldots\ldots\ldots\ldots, & & & \\ \varepsilon & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta^{\alpha} & \varepsilon^{\beta} & \eta^{\gamma} & \ldots & \varepsilon^{\lambda} & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta_1^{\alpha} & \varepsilon^{\beta} & \eta_1^{\gamma} & \ldots. \end{array}$$

α étant au moins égal à 2; $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ au moins égaux à 1.

L'irrationnelle a pour partie entière $\alpha - 1$, la période des quotients incomplets étant $\beta, \gamma, \ldots \lambda, \alpha$; de même, dans les autres cas; on observe les résultats suivants :

1° Si l'équation a entre -1 et $+1$ *un nombre pair* (0 ou 2) de racines, ces deux racines s'expriment par des fractions continues périodiques, la partie non périodique comprenant *un* quotient incomplet.

2° Si elle a entre -1 et $+1$ *une seule* racine, on trouve *deux* fractions continues *immédiatemeut* périodiques.

On en déduit aisément que :

Si une équation quelconque du deuxième degré a une racine développable en fraction continue immédiatement périodique, elle a une seule de ses racines entre -1 et $+1$, l'autre étant du signe contraire, plus grande que 1 en valeur absolue et pourvue d'un développement immédiatement périodique.

Irrationnelles rattachées à un cycle. — Ce sont les racines positives des équations successives

$$\rho z^2 + (\rho'' - \rho - \rho')z + \rho' = 0.$$

Deux irrationnelles consécutives sont liées par l'une des relations

$$u = \frac{1}{t+1},$$
$$u = t+1,$$

suivant le nombre pair ou impair des variations du groupe (ρ, ρ', ρ'') qui engendre u.

La partie non périodique de l'irrationnelle engendrée par (ρ, ρ', ρ'') est égale au nombre des index qui suivent ρ' et sont du même signe que lui. On formera la période en lisant au delà.

Une irrationnelle rattachée à un cycle est en même temps plus petite que 1 *et immédiatement périodique, en même temps plus grande que* 1 *et affectée d'un quotient incomplet non périodique.*

THÉORÈME. — *Si deux formes réduites sont liées par une substitution unimodulaire, et que l'une d'elles soit rattachée à un cycle, ce cycle est contenu dans le cycle parfait ou imparfait engendré par l'autre.*

Soit

$$\varphi(x, y) = rx^2 + (r'' - r - r')xy + r'y^2$$

une forme rattachée à un cycle.

Soit $f(x, y)$ une autre forme réduite telle que l'identité suivante ait lieu :

$$(1)\quad f(pX + qY, p'X + q'Y) = \varphi(X, Y), \qquad \text{avec} \qquad |pq' - qp'| = 1,$$

p, q, p', q' étant quatre entiers.

Nous distinguerons deux cas, suivant que p' et q' sont de même signe ou de signes contraires.

1° *p' et q' sont de même signe.* — L'égalité $|pq' - qp'| = 1$ montre que p et q sont aussi de même signe, ainsi que les deux fractions $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$. Ces deux fractions ont pour médiante $\frac{p+q}{p'+q'}$.

Dans l'identité (1) faisons successivement

$$\begin{cases} X = 1, \\ Y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1, \\ Y = 1. \end{cases}$$

Il vient

$$f(p, p') = r,$$
$$f(q, q') = r',$$
$$f(p+p', q+q') = r''.$$

Puisque $rr' < 0$, il y a une racine de l'équation $f(z, 1) = 0$ comprise entre les deux fractions de même signe contiguës $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$.

C'est dire que, si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$ sont positives, (r, r', r'') sont un groupe d'index contigus du cycle parfait ou imparfait engendré par la forme $f(x, y)$; si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$ sont négatives, (r, r', r'') fait partie du cycle conjugué de celui qu'engendre $f(x, y)$.

2° *p et p' sont de signes contraires.* — L'égalité $|pq' - qp'| = 1$ montre que p et q sont de signes contraires et que les fractions $\frac{p}{p'}$ et $\frac{-q}{-q'}$ sont de même signe, leur médiante étant $\frac{p-q}{p'-q'}$.

Dans l'identité (1) faisons successivement

$$\begin{cases} X = 1, \\ Y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1, \\ Y = -1; \end{cases}$$

il vient

$$f(p, p') = r,$$
$$f(-q, -q') = r',$$
$$f(p-q, p'-q') = 2r'' + 2r' - r''.$$

Réglons l'ordre de r et r' par la condition que le groupe des trois nombres admette un précédent.

En somme, nous venons de former un groupe emprunté au cycle conjugué du cycle Γ auquel φ se rattache.

Si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{-q}{-q'}$ sont positives, le cycle conjugué de Γ fait partie du cycle engendré par f.

Si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{-q}{-q'}$ sont négatives, le cycle conjugué de Γ fait partie du cycle conjugué de celui qu'engendre f; plus simplement Γ fait partie du cycle engendré par f, puisque deux cycles conjugués sont réciproques. C. Q. F. D.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes réduites diffèrent par une substitution unimodulaire est que les deux cycles qu'elles engendrent, rendus parfaits, s'il y a lieu, par suppression du groupe de tête, soient identiques ou conjugués.*

Les deux parties de ce théorème ont été démontrées plus haut.

Applications. — I. La substitution automorphe la plus simple relative à une forme réduite f est le produit des substitutions élémentaires de module

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

effectuées au cours du cycle entre deux appositions consécutives de la forme f.

Quand il y a deux antipériodes d'index, on trouve, en plus, des substitutions qui restituent la forme au *signe près*.

II. *Décomposer une substitution unimodulaire en ses éléments.* — Soit la substitution

$$\begin{cases} x = 6X + 5Y, \\ y = 7X + 6Y, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = +1.$$

Appliquons-la à la forme réduite $\lambda x^2 - \mu y^2$, où λ et μ sont deux entiers > 0. Il vient la forme

$$\lambda(6X + 5Y)^2 - \mu(7X + 6Y)^2,$$

qui sera réduite si

$$(36\lambda - 49\mu)(25\lambda - 36\mu) < 0.$$

Prenons pour fraction $\frac{\lambda}{\mu}$ la médiante entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{36}{25}$, donc $\frac{85}{61}$.

Nous aurons la forme $85x^2 - 61y^2$ et la transformée

$$71X^2 - 24XY - 71Y^2,$$

aux deux termes extrêmes de laquelle figurent des coefficients opposés, d'après une propriété connue de la médiante.

Le groupe $71 \quad -71 \quad -24$ n'admet pas de précédent, car

$$2(71-71)+24=24$$

est du signe de 71.

Dans le cycle issu de $85x^2-61y^2$ identique d'ailleurs à son propre conjugué, vu l'absence du terme rectangle de la forme, il faut nous attendre à trouver le groupe $-71 \quad 71 \quad -24$ et non pas $71 \quad -71 \quad -24$.

Corrélativement, il s'introduit une forme

$$-71X'^2-24X'Y'+71Y'^2$$

et non pas

$$71X^2-24XY-71Y^2,$$

comme transformée de $85x^2-61y^2$.

Calculons les index consécutifs à -61 :

				Index.	Δ.	Δ².				
85	−61	−24	−159 →	−159	−50	+48	+24	−71	+71	−24
−61	24	−159	−209 →	−209	−2	+48	−71	+71	−24	
24	−159	−209		−211	+46	+48				
				−165	+94	+48				
				−71	+142					
				+71						

D'après les nombres de variations des groupes d'index contigus, nous posons

$$\begin{array}{l|l|l|l} x=y_1, & x_1=y_2, & x_2=x_3+y_3, & x_3=x_4+y_4, \\ y=x_1+y_1; & y_1=x_2+y_2; & y_2=y_3; & y_3=y_4; \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} x_4=x_5+y_5, & x_5=x_6+y_6, & x_6=Y', & X'=Y, \\ y_4=y_5; & y_5=y_6; & y_6=X'+Y'; & Y'=X. \end{array}$$

Telles sont les substitutions élémentaires cherchées.

III. Toutes les formes réduites ou non pour lesquelles

$$b^2-ac=\Delta,$$

où Δ est un entier positif donné, non carré parfait, se ramènent par une substitution unimodulaire à un nombre fini de formes réduites. On le verra en utilisant l'équation

$$\Sigma(r^2-2r'r'')=4\Delta.$$

Par exemple, le Tableau donné plus haut pour $\Delta = 37$, conduit à former trois cycles distincts dont le premier coïncide avec son conjugué, les deux derniers étant conjugués l'un de l'autre.

Toute forme *de l'ordre propre* où $\Delta = 37$ se ramène par une substitution unimodulaire à l'une des deux formes

$$x^2 - 37y^2, \quad 3x^2 + 8xy - 7y^2.$$

Relations entre les fractions qui correspondent à deux périodes consécutives d'index. — Appelons *fractions homologues* deux fractions qui sont séparées par $m - 1$ autres fractions, m étant le nombre d'index de la période.

En renversant au besoin toutes les fractions de la suite, on pourra supposer que le groupe initial de trois index contigus admet un précédent, donc que la suite des index est périodique au moins dès le deuxième. Reprenons la forme

$$3x^2 + 8xy - 7y^2.$$

Elle conduit aux deux suites :

$$3 \quad \underbrace{-7 \;\; 4 \;\; -9 \;\; -3 \;\; 11 \;\; 12 \quad 7 \;\; -4 \;\; 9 \;\; 3 \;\; -11 \;\; -12}_{\text{période des index.}} \quad -7 \;\; +4 \;\ldots,$$

$$\underline{\frac{1}{0}} \quad \underline{\underline{\frac{0}{1}}} \;\; \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \overline{\frac{2}{3}} \;\; \frac{3}{4} \;\; \frac{5}{7} \quad \overline{\overline{\frac{7}{10}}} \;\; \frac{9}{13} \;\; \frac{16}{23} \;\; \underline{\frac{25}{36}} \quad \frac{34}{49} \quad \frac{59}{85} \quad \underline{\underline{\frac{84}{121}}} \;\; \frac{109}{157} \cdots$$

Soit $\frac{x}{y}$ une fraction quelconque de la suite, on peut l'écrire $\frac{1x + 0y}{0x + 1y}$, mettant ainsi en évidence le résultat des médiations effectuées de proche en proche à partir des deux fractions initiales $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$.

Si $\frac{X}{Y}$ est la première fraction homologue de $\frac{x}{y}$ qui lui est postérieure, il faudra la noter $\frac{25x + 84y}{36x + 121y}$, à cause de la périodicité des index, et l'on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} X = 25x + 84y, \\ Y = 36x + 121y. \end{cases}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 25 & 84 \\ 36 & 121 \end{vmatrix}$ est égal à $+1$, car $\frac{25}{36}$ est approché de la racine cherchée comme $\frac{1}{0}$, $\frac{84}{121}$ l'est comme $\frac{0}{1}$ et l'on a

$$1 \times 1 - 0 \times 0 = +1.$$

On forme donc aisément la récurrence entre deux fractions homologues consécutives en observant la première réapparition du groupe initial d'index conjugués.

$\frac{x}{y}$ et $\frac{X}{Y}$ fournissant le même index, on a l'égalité suivante pour une infinité de couples de valeurs de x, y :

$$3x^2 + 8xy - 7y^2 = 3(25x + 84y)^2 \\ + 8(25x + 84y)(36x + 121y) - 7(36x + 121y)^2.$$

C'est donc une identité, de telle sorte que les formules (1) fournissent la substitution automorphe la plus simple de la forme considérée.

Relations entre les fractions qui correspondent à deux antipériodes consécutives d'index. — Un raisonnement analogue conduirait à former, dans le cas de deux antipériodes, une fraction quelconque à l'aide de celle dont le rang est moindre d'un nombre égal à celui des index d'une antipériode. Dans l'exemple choisi, on aura

$$(\underline{2}) \qquad \begin{cases} X_1 = 2x + 7y, \\ Y_1 = 3x + 10y. \end{cases}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$ est égal à -1, car au classement $\frac{1}{0} > \frac{0}{1}$ correspond, à cause du signe contraire des index, le classement $\frac{2}{3} < \frac{7}{10}$.

Les formules $(\underline{2})$ fournissent une substitution, qui restitue la forme au signe près, la plus simple de toutes.

Le produit de deux substitutions telles que $(\underline{2})$ redonne la substitution $(\underline{1})$.

Récurrence entre les trois fractions homologues de trois périodes consécutives. — Soit une suite de fractions où la récurrence des fractions homologues de deux périodes consécutives s'exprime par

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} X' = pX + qY, \\ Y' = rX + sY, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = +1.$$

Prenons l'homologue immédiatement suivante $\frac{X''}{Y''}$; on a

$$\begin{cases} X'' = pX' + qY', \\ Y'' = rX' + sY'. \end{cases}$$

Des équations (I) nous tirons, puisque $ps - qr = +1$,

$$X = sX' - qY',$$

d'où par addition

$$X + X'' = (p+s)X'.$$

On aurait de même

$$Y + Y'' = (p+s)Y'.$$

On a donc la récurrence

$$\begin{cases} X'' - (p+s)X' + X = 0, \\ Y'' - (p+s)Y' + Y = 0. \end{cases}$$

Dans l'exemple choisi, on aura

$$p + s = 146.$$

Récurrence entre les fractions relatives à trois antipériodes consécutives d'index. — Supposons qu'il y ait deux antipériodes dans la période. Si les trois fractions $\frac{X}{Y}, \frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}$ rencontrées dans cet ordre ont deux fractions homologues $\frac{X}{Y}$ et $\frac{X_2}{Y_2}$ consécutives et la fraction $\frac{X_1}{Y_1}$ qui en est équidistante, on aurait

$$\begin{cases} X_1 = p_1 X + q_1 Y, \\ Y_1 = r_1 X + s_1 Y; \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = p_1 X_1 + q_1 Y_1, \\ Y_2 = r_1 X_1 + s_1 Y_1, \end{cases} \quad \text{avec} \quad p_1 s_1 - q_1 r_1 = -1,$$

et l'on en déduirait

$$\begin{cases} X_2 - (p_1 + s_1)X_1 - X = 0, \\ Y_2 - (p_1 + s_1)Y_1 - Y = 0. \end{cases}$$

Dans l'exemple choisi, on aurait $p_1 + s_1 = 12$; d'où

$$X_2 - 12X_1 - X = 0,$$
$$Y_2 - 12Y_1 - Y = 0.$$

En multipliant l'échelle de récurrence $u^2 - 12u - 1$ par $u^2 + 12u - 1$, on a

$$(u^2 - 1)^2 - 144u^2 = u^4 - 146u^2 + 1$$

qui correspond bien à la récurrence entre trois fractions homologues consécutives.

D'une façon générale, on aurait

$$p + s = (p_1 + s_1)^2 + 2.$$

Application à $x^2 - Dy^2$, où $D > 0$. — Soit, par exemple,

$$x^2 - 7y^2.$$

Cette forme est réduite, puisque 1 et -7 sont de signes contraires.

Le premier groupe d'index contigus est $1 \; -7 \; -6$, qui a un précédent, car $2(1-7)+6 = -6$ qui est du signe contraire à 1.

Formons le cycle

$$\begin{array}{rrr|r}
1 & -7 & -6 & -3 \\
1 & -6 & -3 & +2 \\
1 & -3 & +2 & -3 \\
-3 & 2 & -3 & 1 \\
2 & -3 & 1 & -6 \\
-3 & 1 & -6 & -7 \\
1 & -6 & -7 & -6 \\
\hline
1 & -7 & -6 &
\end{array}
\qquad
\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}$$

D'où les deux suites

$$\begin{array}{c|ccccccc|ccccccc|c}
1 & -7 & -6 & -3 & 2 & -3 & 1 & -6 & -7 & -6 & -3 & 2 & -3 & 1 & -6 & \dots, \\
\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{5}{2} & \frac{8}{3} & \frac{13}{5} & \frac{21}{8} & \frac{29}{11} & \frac{37}{14} & \frac{45}{17} & \frac{83}{31} & \frac{127}{48} & \frac{209}{79} & \dots.
\end{array}$$

Récurrence à deux périodes et substitution automorphe fondamentale

$$\begin{cases} X' = 8X + 21Y, \\ Y' = 3X + 8Y. \end{cases}$$

Récurrence à trois périodes

$$\begin{cases} X'' - 16X' + X = 0, \\ Y'' - 16Y' + Y = 0. \end{cases}$$

Le premier index engendré par $x^2 - Dy^2$ est toujours $+1$. L'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ admet donc pour solutions tous les couples de valeurs de x, y formées à l'aide des homologues de $\frac{0}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{127}{48}$, ...

Prouvons qu'il n'y en a pas d'autres. Soit par exemple (a, b) une solution de $x^2 - 7y^2 = 1$. On en conclut

$$\frac{a}{b} > \sqrt{7}, \quad \frac{7b}{a} < \sqrt{7}.$$

Donc $\sqrt{7}$ est compris entre deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{7b}{a}$, contiguës d'ailleurs, puisque $a \times a - 7b \times b = +1$. La plus simple des deux est donc une réduite du développement de $\sqrt{7}$. C'est $\frac{a}{b}$.

C. Q. F. D.

Remarque. — On aurait un résultat analogue dans le cas où la suite présente l'index -1.

Par exenple la plus petite solution de $x^2 - 73y^2 = -1$ est

$$x = 1068, \qquad y = 125;$$

toutes les autres proviennent des fractions homologues de $\frac{1068}{125}$.

La première des solutions de $x^2 - 73y^2 = +1$ est

$$x = 2281249, \qquad y = 267000.$$

Bibliographie. — A. Hurwitz, *Math. Ann.*, t. XXXIX, 1892, p. 279; t. XLV, 1894, p. 85; *Mathematical Papers of the Chicago Congress*, 1893, éd. New-York, 1896, p. 125.

G. Humbert, *Journal de Math.* (7e série), t. II, Fasc. II, 1916, p. 104.