BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FOUCHÉ

Sur la transformation de Lie

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 37-53
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__37_0>

SUR LA TRANSFORMATION DE LIE

(Étude géométrique);

PAR M. MAURICE FOUCHÉ.

1. *Introduction.* — Dans un excellent Ouvrage sur *Les premiers principes de la Géométrie moderne*, Duporcq a donné de la transformation de Lie qui, à chaque droite de l'espace fait correspondre une sphère, une interprétation géométrique à laquelle j'étais arrivé de mon côté, et qui, à cause de sa simplicité, a dû se présenter à l'esprit de plusieurs géomètres. Cependant, il ne semble pas que le texte de Duporcq soit suffisamment explicite au point de vue de la rigueur des raisonnements. L'auteur a bien indiqué que la transformation de Lie consiste à faire correspondre à chaque point de l'espace une droite isotrope et qu'elle doit être possible parce que les points de l'espace d'une part, et le complexe des droites isotropes d'autre part, constituent deux ensembles dont les éléments dépendent d'un même nombre de paramètres. Ensuite, à l'aide de considérations fort simples relatives à des rapports anharmoniques, il explique que si l'on fait correspondre arbitrairement cinq points de l'espace à cinq droites isotropes on en déduira, par des constructions faciles, la droite isotrope qu'il faut faire correspondre à un point donné de l'espace. Mais Duporcq ne discute pas les cas d'indétermination que présente sa construction. Je ne prétends pas faire ici la critique complète de cette théorie un peu sommaire; mais il est des remarques qu'il me semble utile de signaler.

D'abord les droites isotropes, au sens précis du mot, ne forment pas véritablement un complexe. Le complexe est celui des droites qui rencontrent le cercle de l'infini : il comprend, outre les droites isotropes proprement dites, toutes les droites du plan de l'infini, chacune de celles-ci étant considérée comme double puisqu'elle rencontre le cercle de l'infini en deux points. Or, dans la transformation de Lie, ces droites de l'infini ne correspondent pas à des points distincts de l'espace. La vérité est qu'il y a une droite que j'appellerai *droite singulière*, à chaque point de laquelle on peut faire correspondre non une droite de l'infini, mais *un point du cercle de l'infini*. Avec les formules habituelles, la droite singulière est la droite de l'infini de l'un des plans de coordonnées; mais il est bien évident que si l'on combine la transformation classique avec une transformation homographique, on pourra donner à la droite singulière une position quelconque.

D'autre part, Duporcq fait état de la proposition fort simple d'après laquelle il existe une droite isotrope et une seule qui en rencontre trois autres. Or cette proposition tombe en défaut si les trois droites isotropes données passent par un même point du cercle de l'infini.

L'omission de la discussion des cas d'exception empêche évidemment de mettre en lumière le caractère homographique de la transformation. Le caractère dualistique n'en est pas non plus nettement indiqué. On n'a pas expliqué qu'à chaque plan de l'espace correspond aussi une droite isotrope, sauf, bien entendu, aux plans qui passent par la droite singulière.

Enfin Duporcq signale aussi l'importante propriété de la transformation de Lie qui, aux lignes asymptotiques d'une surface, fait correspondre les lignes de courbure d'une autre surface; mais il n'en donne pas de démonstration géométrique.

Il m'a semblé qu'il pouvait être utile de combler ces lacunes, et c'est pourquoi j'ai cherché à reprendre d'une manière plus attentive l'étude géométrique de cette importante transformation.

2. *Remarques sur les transformations homographiques.* — Bien que la transformation homographique soit très connue, je ferai cependant, à son sujet, quelques remarques qui seront utiles pour la suite de ce travail.

Une transformation homographique ponctuelle est une transformation *algébrique biunivoque* entre *tous les points de l'espace*, sans aucune exception, y compris les points imaginaires et les points à l'infini. Un plan (P) et une droite donnés (D) se transforment ainsi en une surface (P′) et une ligne (D′) qui ont un point commun et un seul, lequel correspond au point d'intersection de (P) et de (D) ; cela exige que (P′) soit un plan et (D′) une droite. Il en résulte qu'une droite se transforme en une droite et qu'une surface de $n^{\text{ième}}$ ordre se transforme en une surface de $n^{\text{ième}}$ ordre puisque chacune des deux surfaces doit couper une droite quelconque en n points.

Une transformation homographique dualistique fait correspondre d'une manière biunivoque un point à un plan et inversement, et cela sans aucune exception.

L'importance de la discussion des cas d'exception est capitale, car, sans cet examen, on se ferait de singulières illusions. Par exemple l'inversion établit bien une correspondance biunivoque entre les points de l'espace, sauf en ce qui concerne les points de l'infini et le pôle d'inversion. Aussi l'inversion n'est-elle pas homographique.

Le même exemple nous montre qu'il ne serait pas correct de dire qu'une transformation biunivoque entre deux ensembles dont les éléments dépendent d'un même nombre de paramètres est homographique, car l'inversion établit une telle correspondance entre les points de deux espaces superposés si l'on y supprime le pôle et les points de l'infini. Il semble alors qu'on doive réserver le nom d'*homographiques* aux transformations définies comme il suit : pour qu'on puisse établir une transformation homographique entre deux ensembles, il faut que ces deux ensembles aient la même *structure*, c'est-à-dire qu'ils puissent être représentés par un même système de coordonnées, de telle sorte que chaque élément de l'un ou l'autre ensemble corresponde d'une manière biunivoque à un système de valeurs de ces coordonnées. Il convient aussi, en général, d'exclure les valeurs infinies des coordonnées, soit que les systèmes de valeurs, dont une au moins est infinie, ne correspondent à aucun élément de l'ensemble, soit qu'on emploie des coordonnées homogènes, ce qui est préférable. Les éléments qui se correspondent sont alors ceux qui sont représentés par les mêmes valeurs des coordonnées. C'est ainsi qu'on peut établir une correspondance homographique entre les points de deux courbes unicursales distinctes ou confondues : le système de coordonnées est alors composé de deux coordonnées homogènes. On le peut aussi entre les points de deux quadriques : les coordonnées sont au nombre de quatre réparties en deux groupes homogènes. On le peut aussi entre les points d'une courbe unicursale et les génératrices d'un même système d'une quadrique. Par exemple, l'inversion qui n'est pas homographique établit cependant une correspondance homographique entre les points de deux sphères; mais il est impossible d'établir une pareille correspondance entre les points d'un plan et ceux d'une sphère.

3. *L'homographie ponctuelle.* — La manière la plus rapide d'établir rigoureusement et sans calcul la possibilité et les propriétés de l'homographie ponctuelle me paraît résulter de l'emploi simultané des rapports anharmoniques et des coordonnées homogènes.

Considérons dans l'espace quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 formant les sommets d'un *tétraèdre* dit *de référence*, et un point P dit *point directeur* qui n'est situé dans aucune des faces de ce tétraèdre. Par chaque arête du tétraèdre de référence faisons passer quatre plans dont deux sont des faces du tétraèdre, dont le troisième passe par le point directeur P et le quatrième par un point quelconque M de l'espace. Ces quatre plans ont un rapport anharmonique que je désignerai par $(A_1 A_2 . A_3 A_4\, PM)$ s'ils passent par l'arête $A_1 A_2$.

A chaque point M de l'espace correspondent ainsi six rapports anharmoniques dépendant chacun d'une des arêtes du tétraèdre de référence. Or, si l'on considère les intersections de la droite PM avec les faces du tétraèdre, on démontrera sans peine que les trois rapports anharmoniques qui dépendent de trois arêtes concourantes sont les quotients deux à deux des trois autres, à condition bien entendu qu'on prenne les éléments dans un ordre convenable. Par exemple :

$$(A_1 A_2 . A_3 A_4\, MP) = (A_2 A_3 . A_1 A_4\, MP) : (A_2 A_4 . A_1 A_3\, MP).$$

Si alors on désigne par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ les trois rapports anharmoniques qui dépendent des côtés de l'un des triangles, $A_2 A_3 A_4$ par exemple, les trois autres rapports anharmoniques seront respectivement égaux à $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$, et x, y, z, t constituent un système ds quatre coordonnées homogènes telles qu'à tout point M de l'espace correspond un système de valeurs et un seul. Inversement, la connaissance des valeurs des quatre coordonnées donne les valeurs des six rapports anharmoniques. L'une au moins des quatre coordonnées n'est pas nulle; supposons que ce soit t : les trois premiers rapports $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ définissent trois plans passant respectivement par les côtés du triangle $A_2A_3A_4$ et se coupant en un seul point qui sera le point M; les trois autres rapports anharmoniques seront $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ et $\frac{x}{z}$. Si t est nulle, ces trois plans se confondent sur le plan $A_1A_2A_3$; mais alors on prendra les rapports qui correspondent à une autre face du tétraèdre de référence, De toute manière on trouve un point M et un seul. Il est aisé de vérifier que tous les points d'un des plans du tétraèdre de référence ont une coordonnée nulle, que tous les points d'une des arêtes ont deux coordonnées nulles, et enfin que chacun des quatre sommets de ce tétraèdre a trois coordonnées nulles. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les points de l'espace et les systèmes de valeurs des quatre coordonnées, et cela sans aucune exception.

Il suffit alors de changer le tétraèdre de référence et le point directeur, et de faire correspondre les points qui ont les mêmes coordonnées dans les deux systèmes.

Ainsi se trouve établie rigoureusement la proposition fondamentale qu'une transformation homographique ponctuelle est complètement définie quand on se donne cinq couples de points homologues pourvu que dans chacun des systèmes, quatre de ces points ne soient pas dans un même plan.

4. *Le complexe mixte.* — J'arrive maintenant à la transformation de Lie; mais, au lieu du cercle de l'infini, je considère une conique (F) dite *fondamentale*. Dans le complexe des droites qui rencontrent cette conique, je supprime les droites situées dans le plan de cette conique et j'introduis les points mêmes de cette conique. J'obtiens ainsi le *complexe mixte*. Je vais montrer que, malgré son caractère hétérogène, cet ensemble de droites et de points, auxquels je donnerai le nom commun d'*éléments*, possède la même structure que l'ensemble des points de l'espace et jouit d'un certain nombre de propriétés identiques à celles des points et des plans, de telle sorte qu'on pourra faire correspondre

homographiquement ces éléments soit aux points, soit aux plans de l'espace.

J'appellerai *piste* une suite d'éléments définis comme il suit : Une piste peut se composer d'une suite de droites du complexe, et alors elle sera formée des génératrices de même système d'une quadrique, ce qu'on appelle une *semi-quadrique*. Elle peut aussi se composer des droites passant par un même point de la conique fondamentale et situées dans un même plan, ce qui constitue un faisceau. Seulement, dans ce faisceau, il y a une droite faisant partie du plan de la conique (F). Cette droite devra être remplacée par son second point d'intersection avec la conique. Enfin la piste peut se composer des points de la conique (F). Dans tous les cas, *le rapport anharmonique de quatre éléments d'une piste est bien déterminé.*

5. *Les pistes conjuguées.* — Je dis d'abord que deux éléments quelconques définissent une piste et une seule dont ils font partie et en même temps une piste *conjuguée* formée, dans le cas général, des droites du complexe qui rencontrent ces deux-là *autre part que sur la conique fondamentale.*

Si les deux éléments donnés sont deux droites rencontrant la conique (F) en deux points différents et ne se rencontrant pas elles-mêmes, elles déterminent avec la conique (F) une quadrique. Les deux pistes conjuguées sont formées des génératrices de cette quadrique de l'un ou l'autre système. On voit aussi que les seules droites du complexe mixte qui rencontrent les deux droites données autre part que sur la conique (F) sont les génératrices de cette quadrique n'appartenant pas au même système qu'elles, parce que, par chaque point de la conique (F) autre que les pieds de ces droites sur cette conique, on ne peut faire passer qu'une seule droite les rencontrant toutes deux. Il convient aussi de remarquer que si A est le pied sur la conique (F) d'une des deux droites données, la génératrice de la piste conjuguée passant par A est située dans le plan tangent en A à la quadrique, de sorte que le plan des deux droites est tangent à la conique (F).

Si les deux droites se rencontrent en un point S non situé sur (F), la quadrique se réduit au cône de sommet S et les deux pistes conjuguées sont confondues:

Si les deux droites partent d'un même point A de la conique (F), leur plan coupe cette conique en un second point A′, et les seules droites du complexe mixte qui les rencontrent sont celles qui passent par A′ dans ce plan-là. La quadrique se décompose donc en deux plans dont l'un est celui des deux droites et l'autre le plan de la conique (F). Alors la première piste sera constituée par le faisceau des droites issues de A dans le plan des deux droites données, et la piste conjuguée sera formée du faisceau du sommet A′ dans le même plan. Il reste entendu qu'il faudra remplacer la droite AA′ du premier faisceau par le point A′ et la droite A′A du second par le point A.

Si le plan des deux droites est tangent à la conique (F), le point A′ coïncide avec le point A et les deux pistes coïncident.

Si les deux éléments sont une droite coupant la conique (F) en A et un autre point A′ de cette conique, les deux pistes seront formées des faisceaux de sommet A et A′ dans le plan défini par la droite donnée et le point A′. Elles coïncident si le point A′ coïncide avec A. Bien entendu, dans ce cas, il faudra remplacer la tangente en A à la conique (F) par son point de contact.

Si, enfin, les deux éléments donnés sont deux points de la conique (F), il faut concevoir que la quadrique se réduit au plan de (F) considéré comme plan double, et les deux pistes se composent l'une et l'autre des points de la conique (F).

On remarquera que, dans tous les cas, deux éléments du complexe mixte définissent une quadrique et une seule, laquelle peut se réduire à deux plans ou à un plan double. Deux pistes conjuguées sont toujours situées sur une même quadrique.

Il résulte évidemment de ce qui précède que deux pistes distinctes n'ont jamais plus d'un élément commun. En général, elles n'en ont aucun.

6. *Analogie avec le plan et la droite.* — L'existence des pistes conjuguées fait prévoir le caractère dualistique du complexe mixte. Nous supposerons que chaque élément de l'ensemble soit pour ainsi dire dédoublé, c'est-à-dire qu'il se compose de deux éléments superposés que nous appellerons *élément-point* et *élément-plan*. Je dirai de plus que deux éléments de classes différentes conviennent l'un à l'autre s'ils font partie de deux

pistes conjuguées. Ce seront, suivant les cas, deux droites ayant un point commun en dehors de la conique fondamentale, et pouvant d'ailleurs coïncider, ou bien deux droites coupant la conique fondamentale au même point et dont le plan est tangent à cette conique, ou bien une droite et son pied sur la conique fondamentale, ou enfin deux points de cette conique pouvant d'ailleurs coïncider.

On verra facilement, en reprenant la discussion précédente, que si un élément convient à deux éléments donnés, il est situé sur la conique définie par ces deux éléments, et que, par conséquent :

Si un élément convient à deux autres, il fait partie de la piste conjuguée de celle qui contient ces deux-là.

On voit ainsi que deux éléments qui conviennent l'un à l'autre sont l'analogue d'un plan et d'un point situés dans ce plan et qu'une piste est l'analogue d'une droite. Deux pistes conjuguées sont l'analogue d'une même droite considérée pour l'une comme formée de la suite de ses points, et pour l'autre de la suite des plans qui la contiennent.

7. *Théorème des trois éléments.* — Les propositions qu'on vient de démontrer sont donc les analogues des suivantes, corrélatives deux à deux :

Par deux points on peut toujours faire passer une droite et une seule. Deux plans se coupent suivant une droite par laquelle passent une infinité d'autres plans. Si un plan passe par deux points, il passe par la droite qui joint ces points, ce qui revient à dire que si une droite a deux points dans un plan, elle y est située tout entière. Si un point fait partie de deux plans, il fait partie de leurs droites d'intersection, ce qui est évident.

Une proposition capitale est que trois points non en ligne droite définissent un plan qui les contient, et que trois plans qui ne passent pas par la même droite ont un point commun et un seul. L'analogue sera la suivante :

Trois éléments de la même classe ne faisant pas partie d'une *même piste déterminent toujours un élément de l'autre classe qui leur convient à tous trois, et un seul.*

Pour le démontrer, remarquons que parmi les trois éléments donnés il y a au moins une droite (D) puisque trois points de la conique fondamentale font partie de la même piste. Les deux autres éléments déterminent une piste (P) et une piste conjuguée (P′). Il suffit donc de faire voir qu'il existe un élément et un seul de cette piste (P′) convenant à la droite (D). Si (P′) est une semi-quadrique, la droite (D) la coupe en deux points dont l'un A est sur la conique (F). La génératrice (G) de (P′) qui passe par le second point d'intersection B est la droite cherchée.

Il n'y a pas d'exception si le point B se confond avec le point A parce qu'alors les deux droites (D) et (G) sont dans un même plan tangent à la semi-quadrique (P′) et par suite à la conique fondamentale.

Si la piste (P′) est un faisceau de droites, le plan de ce faisceau est coupé par la droite (D) en un point B et l'élément cherché est la droite du faisceau passant par B. Il peut se faire que la droite (D) passe par le sommet A du faisceau, lequel est situé sur la conique fondamentale. Alors l'élément cherché est le point A lui-même.

Si enfin la piste (P′) se compose des points de la conique (F), l'élément cherché est le pied de la droite (D) sur cette conique.

Des cas particuliers remarquables sont ceux où les trois éléments sont trois droites passant par un même point A de la conique (F), ou un point A de la conique (F) et deux droites passant par ce point, ou enfin une droite passant par A et deux points de (F). L'élément cherché est alors le point A.

Le raisonnement précédent montre aussi qu'il existe un élément et un seul faisant partie d'une piste donnée et convenant à un autre élément donné ne faisant pas partie de la piste conjuguée. C'est l'analogue de ce qu'une droite et un plan qui ne la contient pas ont un point commun et un seul, ou que, une droite et un point extérieur déterminent un plan et un seul. Seulement on n'a traité que le cas où l'élément donné est une droite. Pour combler cette lacune, prenons deux éléments α et β de la piste (P′); avec l'élément donné, cela en fera trois auxquels conviendra un élément (E) et un seul. Mais on a vu au numéro précédent que tout élément qui convient à deux éléments de la piste (P') fait partie de la piste conjuguée (P). L'élément (E) est donc l'élément cherché, et ce sera le seul parce que tout élément de (P) doit convenir à α et à β.

Cette proposition peut encore s'énoncer : *Dans l'ensemble des éléments qui conviennent à un élément de l'autre classe, il y en a un et un seul faisant partie d'une piste de la première classe, pourvu que cette piste ne fasse pas partie de l'ensemble considéré.*

Dans l'espace, si deux droites ont un point commun, elles sont dans un même plan, et réciproquement. La traduction sera :

Si deux pistes composées d'éléments de la même classe ont un élément commun, il existe un élément de l'autre classe et un seul qui convient à tous les éléments de ces deux pistes, ou, ce qui revient au même :

Si deux pistes ont un élément commun, les pistes conjuguées ont aussi un élément commun.

Il suffit de considérer l'élément commun aux deux pistes et deux autres pris sur chacune d'elles. A ces trois éléments en convient un de l'autre classe et un seul, et celui-là fait partie des deux pistes conjuguées des pistes données puisqu'il convient à des éléments de chacune d'elles.

8. *Propriétés projectives.* — Toutes les pistes qui ont un élément commun et dont tous les éléments conviennent à un même élément de l'autre classe définissent avec leurs conjuguées une suite de quadriques passant par (F) et admettant, dans le cas général, deux génératrices de systèmes différents et formant par suite un faisceau. Donc le rapport anharmonique de quatre d'entre elles est complètement défini ; il importe peu qu'une de ces quadriques se réduise à deux plans ou au plan double de la conique (F).

Si les deux éléments communs sont deux droites confondues, le faisceau sera celui des cônes ayant pour base la conique (F) et la droite donnée pour génératrice commune.

Si l'un des éléments communs est une droite et l'élément commun de l'autre classe un point A de la conique fondamentale, le point A est le pied de la droite sur la conique (F) et le faisceau de quadriques se réduit au faisceau des plans passant par la droite.

Si les deux éléments communs sont deux points de la conique fondamentale, on aura encore un faisceau de plans passant par la droite des deux points, laquelle sera tangente à la conique (F) si les deux points coïncident. Dans tous les cas le rapport anharmonique de quatre de ces plans est bien déterminé.

Nous aurons ainsi deux espèces de rapports anharmoniques : celui de quatre éléments d'une même piste qui est l'analogue de celui de quatre points en ligne droite ou de quatre plans passant par une même droite, et celui de quatre pistes ayant un élément commun qui est l'analogue de celui de quatre droites passant dans le même plan par un même point.

Les propriétés projectives des points, droites et plans dépendent toutes de ce que le rapport anharmonique de quatre droites ou de quatre plans d'un même faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre points où une droite quelconque coupe ces quatre droites ou ces quatre plans, et cette égalité résulte de ce qu'il y a correspondance homographique entre les droites ou les plans du faisceau d'une part, et les points correspondants de la transversale d'autre part, c'est-à-dire du fait que deux droites dans le plan, une droite et un plan dans l'espace ont un point commun et un seul. Puisque nous avons trouvé dans le complexe mixte les propriétés équivalentes à celles-là, les propriétés projectives des droites, plans ou points s'appliqueront sans changement aux éléments et aux pistes de ce complexe mixte, et l'on pourra par le procédé indiqué au n° 3 constituer un système de quatre coordonnées homogènes représentant les éléments d'une manière biunivoque.

On se donnera par exemple cinq éléments-points choisis de manière qu'aucun élément-plan ne convienne à quatre d'entre eux, A, B, C, D, P. Si M est un élément-point quelconque, considérons les quatre éléments-plans définis respectivement par ABC, ABD, ABP, ABM. Ils font partie de la piste conjuguée de celle qui contient A et B. Ils admettent donc un rapport anharmonique (AB.CDMP). On obtient six de ces rapports anharmoniques en faisant toutes les combinaisons deux à deux des quatre éléments A, B, C, D. Par la considération de la piste définie par M et P, on verra, comme on l'a indiqué au n° 3, que trois de ces rapports sont les quotients de deux des trois autres, ce qui permettra de les représenter tous les six par les quotients de deux des quatre coordonnées homogènes. Enfin on démontrera comme au n° 3 qu'à tout système de valeurs de ces quatre coordonnées correspond un élément-point et un seul qui sera défini par trois éléments-plans définis à leur tour par trois des six rapports anharmoniques que l'on pourra toujours choisir de manière que les trois éléments-plans ne coïncident pas, ainsi que cela a été expliqué au n° 3.

9. *La transformation.* — La correspondance entre les points de l'espace et les éléments du complexe mixte sera complètement définie par l'égalité des valeurs des coordonnées, si, à cinq points de l'espace parmi lesquels il n'y en a pas quatre dans un même plan, on fait correspondre cinq éléments parmi lesquels quatre ne conviennent pas à un même élément de l'autre classe. Cette correspondance est biunivoque et peut être dite *homographique.*

Considérons maintenant l'ensemble des éléments-points qui conviennent à un même élément-plan, et une piste d'éléments-points ne faisant pas partie de cet ensemble. Nous savons (n° 7) qu'il existe un élément-point et un seul commun à cette piste et à cet ensemble. Or, à l'ensemble considéré correspond une certaine surface et à la piste une certaine ligne, lesquelles ont par conséquent un point commun et un seul. Cette surface est donc un plan et cette ligne une droite. Inversement, à une droite (D) on fera correspondre la piste définie par les éléments-points qui correspondent à deux points de la droite (D), et à un plan (P) l'ensemble des éléments-points qui conviennent à l'élément-plan E convenant aux trois éléments-points qui correspondent à trois points du plan (P). Il est évident qu'à cet ensemble et à cette piste correspondent une droite et un plan qui ne peuvent être que la droite (D) et le plan (P). On peut encore dire que le plan (P) correspond à l'élément-plan E et réciproquement. Les propriétés principales de la transformation peuvent alors s'énoncer ainsi :

1° *A chaque point de l'espace correspond un élément du complexe mixte et un seul, et réciproquement.*

2° *A tout plan de l'espace correspond un élément du complexe mixte et un seul, et réciproquement.*

3° *A un plan et à un point de ce plan correspondent des éléments qui conviennent l'un à l'autre, et réciproquement.*

4° *A tous les points d'une droite correspondent les éléments d'une piste, et à tous les plans passant par cette droite, les éléments de la piste conjuguée,* ou encore : *A toute droite de l'espace correspond une des quadriques de l'ensemble,* cette quadrique pouvant d'ailleurs se réduire à deux plans distraits et confondus.

5° *Si deux droites ont un point commun, les quadriques qui leur correspondent ont deux génératrices communes de systèmes différents et sont par conséquent tangentes, et réciproquement.*

Si maintenant nous supposons que la conique fondamentale soit le cercle de l'infini, les droites du complexe mixte seront des droites isotropes, les quadriques de l'ensemble seront des sphères et nous retomberons sur la transformation de Lie qui fait correspondre à toute droite une sphère, et à deux droites situées dans un même plan, deux sphères tangentes.

En ce qui concerne la transformation inverse, il faut bien remarquer que, si à chaque élément du complexe mixte ne correspond qu'un seul point ou un seul plan, à chaque quadrique de l'ensemble correspondent au contraire *deux* droites suivant que l'on considère comme formés d'éléments-points l'un ou l'autre des deux systèmes de génératrices qu'elle contient. Ces deux droites se confondent si la quadrique est un cône ou bien si elle se réduit à deux plans dont l'un est tangent à la conique fondamentale. A la conique fondamentale, c'est-à-dire à la quadrique réduite au plan de cette conique considéré comme plan double, correspond la *droite singulière*, qui contient tous les points correspondant aux divers points de la conique fondamentale et par laquelle passent tous les plans qui correspondent aux mêmes points.

10. *Le complexe linéaire.* — A chaque point A de l'espace correspond un élément-point E du complexe mixte qui peut être aussi considéré comme un élément-plan et auquel correspond un plan (P) de l'espace, mais deux éléments de classe différente qui coïncident conviennent l'un à l'autre. Donc le plan (P) contient le point A. Il en résulte que la transformation qui nous occupe établit aussi entre les éléments de l'espace une correspondance

dualistique par laquelle à chaque point de l'espace on fait correspondre un plan passant par ce point et inversement. Cette correspondance définit un *complexe linéaire*.

Soient maintenant deux pistes conjuguées (P) et (P′) appartenant par conséquent à une même quadrique. Nous savons qu'il leur correspond deux droites suivant que c'est (P) ou (P′) qui est considérée comme formée d'éléments-points.

A un point de la première droite correspond un élément de la piste-point (P) auquel correspond à son tour un plan si (P) est considérée comme une piste-plan. Mais alors ce plan contient tous les points qui correspondent aux divers éléments de la piste-point conjuguée (P′) puisque l'élément E convient à tous ceux de la piste (P′). C'est dire que la transformation dualistique fait correspondre à chaque point de la première droite un plan qui passe par la seconde. Donc : *les deux droites qui correspondent à une même quadrique sont conjuguées par rapport au complexe linéaire.*

Les droites du complexe linéaire sont celles qui se correspondent à elles-mêmes dans la transformation dualistique. Donc, dans notre transformation elles correspondent à des cônes parmi lesquels il faut comprendre les plans tangents à la conique fondamentale et cette conique elle-même. La droite singulière fait partie du complexe linéaire.

Tous les éléments d'une piste composée d'un faisceau de droites conviennent, comme on l'a vu, au sommet du faisceau, lequel est situé sur la conique fondamentale (n° 5). Donc les points qui leur correspondent sont dans le plan qui correspond à ce sommet, lequel passe par la droite singulière. Donc : les droites qui correspondent à des quadriques dégénérées sont celles qui rencontrent la droite singulière.

11. *La transformation est de contact.* — Un point M et un plan (P) qui le contient se transforment en deux éléments qui convienent l'un à l'autre. Je ne parlerai que du cas général où ces deux éléments sont deux droites qui se coupent en un point M′ non situé sur la conique fondamentale. A l'élément de contact M (P) on peut donc faire correspondre le point M′ et le plan (P′) des deux droites M′A et M′B. Si le point M décrit une surface (S) et

si (P) est le plan tangent à cette surface, le point M′ décrira une autre surface (S′). Je vais démontrer que le plan (P′) est tangent en M′ à la surface (S′).

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires.

Si un point (M) décrit une ligne (L), la droite du complexe mixte qui lui correspond décrit une surface réglée (R). Si deux lignes (L) et (L′) passent par un même point M, les deux surfaces réglées qui leur correspondent ont une génératrice commune (G) qui correspond au point (M). Supposons maintenant que les deux lignes (L) et (L′) soient tangentes en M, et considérons sur ces deux lignes deux points N et N′ infiniment voisins de M que l'on fait correspondre l'un à l'autre en exprimant leurs coordonnées en fonction d'un paramètre α. Les coordonnées de même nom de ces deux points ne différeront que d'un infiniment petit du second ordre par rapport à α. Mais ces mêmes coordonnées servent aussi à définir sur le complexe mixte les droites (H) et (H′) qui correspondent respectivement aux deux points N et N′. Si l'on coupe tout le système par un plan quelconque rencontrant (G), (H) et (H′) respectivement en D, C et C′, la distance CC′ sera du second ordre, tandis que DC et DC′ seront du premier, d'où il suit que l'angle CDC′ est infiniment petit, ce qui prouve que les deux surfaces réglées ont le même plan tangent en D. Puisque D est un point quelconque de (G) les deux surfaces réglées sont circonscrites tout le long de la génératrice (G).

La proposition corrélative que l'on peut établir soit d'une manière analogue, soit par transformation dualistique est que : si un plan se déplace à partir d'une position initiale de deux manières différentes, la droite du complexe mixte qui lui correspond décrit deux surfaces réglées ayant une génératrice commune; mais si les deux développables enveloppées par le plan mobile sont tangentes, ou, ce qui revient au même, si la caractéristique du plan mobile est la même dans les deux déplacements, les deux surfaces réglées sont circonscrites le long de la génératrice commune.

Cela posé, remarquons qu'aux deux droites qu'on peut mener par le point M dans le plan (P) correspondent deux quadriques qui doivent contenir la génératrice M′A, élément-point correspondant au point M et la génératrice M′B, élément-plan correspondant au plan (P). Toutes ces quadriques font donc partie d'un même faisceau et ont au point M' le même plan tangent $M'AB$. Si maintenant le point M se déplace sur la surface (S), il décrira une ligne tangente à l'une des droites précédentes, et la droite $M'A$ qui lui correspond décrira une surface réglée circonscrite le long de la génératrice $M'A$ à l'une des quadriques du faisceau, et par conséquent tangente en M' au plan $M'AB$. Le point M' se déplacera sur cette surface et sa trajectoire sera tangente au plan $M'AB$. Comme il en sera de même quelle que soit la trajectoire du point M' sur la surface (S'), il faut bien que cette surface soit tangente en M' au plan $M'AB$.

12. *La transformation de Lie fait correspondre aux lignes assymptotiques d'une surface les lignes de courbure d'une autre surface.* — Supposons que le point M décrive une ligne asymptotique (Z) de la surface (S). La droite correspondante décrira une surface réglée circonscrite à la quadrique (Q) correspondant à la tangente à (Z) le long de sa position initiale $M'A$. D'autre part, le plan (P) tangent à (S) admet pour caractéristique cette même tangente à (Z). Donc la droite qui lui correspond décrira une surface réglée circonscrite le long de $M'B$ à cette même quadrique (Q). Cela veut dire que les positions infiniment voisines de $M'A$ et $M'B$ ne diffèrent que par des infiniment petits du second ordre de deux génératrices de la quadrique (Q) infiniment voisines respectivement de $M'A$ et de $M'B$. Donc, on peut dire que le plan infiniment voisin de $M'AB$ ne diffère que par des infiniment petits du second ordre d'un plan tangent à (Q) infiniment voisin de $M'AB$. Mais la tangente à la trajectoire d'un point et la caractéristique d'un plan mobile ne dépendent que des infiniment petits du premier ordre. Donc la tangente à la trajectoire de M' et la caractéristique du plan $M'AB$ sont conjuguées sur la quadrique (Q). Elles le sont évidemment aussi sur la surface (S'), lieu du point M', par le fait seul que la transformation est de contact.

Si alors on considère la transformation de Lie, la quadrique (Q) est une sphère et les directions conjuguées sont rectangulaires, d'où il suit immédiatement que la trajectoire de M' et la caractéristique du plan $M'AB$ sont tangentes aux deux lignes de courbure de la surface (S'). Puisqu'il en est ainsi pour toute position de M', on voit que, quand le point M décrit une ligne asymptotique de la surface (S), le point M' qui lui correspond décrit une ligne de courbure de la surface transformée (S').

Pour être complet je rappellerai la remarque bien connue que dans la transformation inverse, à la surface (S') correspondent deux surfaces (S) parce que chaque plan tangent à la surface (S') détermine deux droites du complexe mixte dont chacune peut être prise pour un élément-point, l'autre étant un élément-plan. On obtient ainsi pour chaque point M' deux éléments de contact M(P) et $M_1(P_1)$. Le plan (P_1) est l'homologue du point M dans la transformation dualistique, et le plan (P) l'homologue du point (M). Il en résulte que les deux surfaces (S) et (S_1) se correspondent point par point de manière que le plan tangent en un point de l'une passe par le point correspondant de l'autre, et inversement, de sorte que les deux plans tangents qui se correspondent passent par la droite qui joint leurs points de contact. En somme, les deux surfaces sont conjuguées par rapport au complexe linéaire, et les lignes asymptotiques de l'une sont conjuguées des lignes asymptotiques de l'autre.