E. CARTAN

La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à *n* dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 65-99
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__65_0>

LA DÉFORMATION DES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE EUCLIDIEN RÉEL A n DIMENSIONS;

PAR M. E. CARTAN.

Je m'occupe dans le Mémoire qui suit de la déformation des hypersurfaces à $n-1$ dimensions dans l'espace euclidien réel à $n \geqq 4$ dimensions. Le problème à résoudre est le suivant :

Étant donnée une hypersurface (S), *trouver toutes les hypersurfaces* (Σ) *applicables sur* (S) (*avec conservation des longueurs d'arcs*).

Ce problème a fait l'objet de travaux nombreux et bien connus dans le cas $n = 3$; on sait que, dans ce cas, il existe une infinité de surfaces (Σ) applicables sur une surface donnée (S); elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument. Dans le cas $n > 3$ il n'en est plus ainsi : *en général les seules hypersurfaces* (Σ) *applicables sur une hypersurface donnée* (S) *sont égales ou symétriques à* (S). *Il en est sûrement ainsi lorsque l'hyperplan tangent à* (S) *dépend de plus de deux paramètres.*

Il n'y a donc que des catégories spéciales d'hypersurfaces qui puissent être déclarées *déformables*. Ce sont les suivantes :

a. Les hypersurfaces développables, enveloppes d'un hyperplan dépendant d'un paramètre; elles sont toutes applicables sur un hyperplan.

b. Les hypersurfaces dont l'équation peut être ramenée, par un choix convenable des axes de coordonnées rectangulaires, à la forme

$$\text{(1)} \qquad F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ou à la forme

$$\text{(2)} \qquad \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

cette dernière équation étant homogène. La déformation de l'hypersurface se ramène alors, dans le premier cas, à celle de la surface définie, dans un espace euclidien à trois dimensions, par l'équation (1); dans le second cas, à celle de la surface définie, dans un espace sphérique à trois dimensions, par l'équation (2), avec

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

L'hypersurface (Σ) la plus générale dépend ici de deux fonctions arbitraires d'un argument.

c. Les hypersurfaces lieux d'une variété plane à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Les hypersurfaces applicables dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

d. Les hypersurfaces enveloppes d'un hyperplan à deux paramètres u et v lorsque les coordonnées tangentielles de cet hyperplan

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha = 0$$

satisfont à une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \gamma f = 0,$$

et que la somme

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

est la différence U — V *entre une fonction de u et une fonction de v, ou encore lorsqu'on a*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v} - \gamma \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^2 = 0.$$

Les hypersurfaces (Σ) sont de la même catégorie, avec la même équation de Laplace; mais les fonctions U et V subissent, en passant de (S) à (Σ), une même transformation homographique à coefficients constants; ces hypersurfaces (Σ) dépendent d'*un paramètre* (en ne considérant pas comme distinctes deux hypersurfaces égales ou symétriques).

e. Il existe enfin *certaines hypersurfaces* (S) *qui sont applicables sur une seule hypersurface* (Σ) *non égale ni symétrique à* (S); ce sont les enveloppes d'un hyperplan à deux paramètres u

et v, les coordonnées tangentielles de cet hyperplan satisfaisant à une même équation (non arbitraire) de Laplace. Ces hypersurfaces (S) n'admettent pas de déformation continue.

Les n^os **1** à **6** contiennent le principe de la méthode employée; le n° **7** est consacré aux hypersurfaces développables; le n° **8** montre que toute hypersurface dont l'hyperplan tangent dépend de plus de deux paramètres est indéformable. Les hypersurfaces de la catégorie b font l'objet du n° **12**; celles de la catégorie c, des n^os **13-16**; celles de la catégorie d, des n^os **17-21**. On étudie avec plus de détail des cas particuliers intéressants dans les derniers n^os **22-25**, spécialement la déformation des hypersurfaces enveloppes de l'hyperplan

$$U_1 x_1 + \ldots + U_p x_p + V_1 y_1 + \ldots + V_q y_q = U + V,$$

où les U sont des fonctions de u seul et les V de v seul.

Les résultats obtenus dans ce Mémoire peuvent être étendus au problème de la représentation conforme dans un espace à $n \geqq 5$ dimensions : ce sera l'objet d'un prochain Mémoire.

FORMULES PRÉLIMINAIRES.

1. Considérons, dans l'espace euclidien réel à n dimensions, un n-èdre formé d'un point M et de n vecteurs unités rectangulaires I_1, I_2, ..., I_n issus de ce point. Supposons que les coordonnées de l'origine M et les projections des n vecteurs soient des fonctions d'un certain nombre de paramètres, nombre qui ne peut pas dépasser $\frac{n(n+1)}{2}$. Si l'on considère les $n+1$ vecteurs infiniment petits dM, dI_1, ..., dI_n obtenus en donnant aux paramètres des accroissements infiniment petits, ces vecteurs peuvent s'exprimer linéairement au moyen des vecteurs I_1, I_2, ..., I_n eux-mêmes, les coefficients étant des expressions différentielles linéaires. En exprimant que les vecteurs I_1, I_2, ..., I_n restent de longueur 1 et rectangulaires entre eux, on arrive facilement aux formules fondamentales

$$(1) \qquad \begin{cases} dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_n I_n, \\ dI_r = \varpi_{r1} I_1 + \varpi_{r2} I_2 + \ldots + \varpi_{rn} I_n \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

où les expressions ϖ_{rk} satisfont aux relations

$$(2) \qquad \varpi_{rr} = 0, \qquad \varpi_{rs} = -\varpi_{sr}.$$

Les expressions ω_i, ϖ_{rs} ne sont pas autre chose que les composantes par rapport aux axes du n-èdre du déplacement instantané de ce n-èdre.

Les covariants bilinéaires des expressions ω_i, ϖ_{rs} s'expriment en fonctions bilinéaires de ces mêmes expressions d'une manière simple qu'on obtient immédiatement en annulant les covariants bilinéaires des seconds membres des équations (1). On trouve ainsi

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \omega'_r = [\omega_1 \varpi_{1r}] + [\omega_2 \varpi_{2r}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{nr}], \\ \varpi'_{rs} = [\varpi_{r1} \varpi_{1s}] + [\varpi_{r2} \varpi_{2s}] + \ldots + [\varpi_{rn} \varpi_{ns}] \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Ces formules constituent les formules de structure du groupe des déplacements euclidiens de l'espace à n dimensions. Dans le cas de $n = 3$, elles reproduisent sous une forme condensée des formules classiques dans la théorie des mouvements à plusieurs paramètres.

2. On peut aussi considérer l'espace au point de vue tangentiel. Désignons par P_r le premier membre de l'équation *normale* de l'hyperplan mené par M et perpendiculaire au vecteur I_r; en désignant par μ le point courant, on a

$$P_r \equiv I_r \mid (\mu - M),$$

le second membre étant le produit géométrique du vecteur I_r et du vecteur $\mu - M$ d'origine M et d'extrémité μ; on a

$$dP_r = dI_r \mid (\mu - M) - I_r \mid dM = \sum_{s=1}^{j=n} \varpi_{rs} P_s - \omega_r.$$

Aux formules (1) doivent donc s'ajouter les formules dualistiques

$$(1') \quad dP_r = \varpi_{r1} P_1 + \varpi_{r2} P_2 + \ldots + \varpi_{rn} P_n - \omega_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les seconds membres contiennent les $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions ω_i, ϖ_{rs}. Ces formules nous seront très utiles dans la suite.

3. Considérons une variété à $n-1$ dimensions de l'espace à n dimensions : nous appellerons, pour abréger, *hypersurface* une telle variété. La position d'un point M sur cette hypersurface dépend de $n-1$ paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Considérons alors un n-èdre variable ayant pour origine un point M variable de l'hypersurface et tel que le vecteur I_n soit normal à l'hypersurface. Le point M étant donné, ce n-èdre peut encore dépendre de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ paramètres. Pour ce n-èdre variable, on a des formules telles que (1), (1'); mais, ici, l'expression ω_n est identiquement nulle. Les formules (3) montrent alors que l'on a

$$[\omega_1 \varpi_{1n}] + [\omega_2 \varpi_{2n}] + \ldots + [\omega_{n-1} \varpi_{n-1,n}] = 0;$$

on en déduit facilement que les expressions $\varpi_{1,n}, \varpi_{2,n}, \ldots, \varpi_{n-1,n}$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, ou encore de

$$dt_1, \quad dt_2, \quad \ldots, \quad dt_{n-1};$$

cela est d'ailleurs évident autrement, car l'hyperplan tangent P_n étant fonction des seuls paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, les composantes ϖ_{nr} de sa différentielle dP_n dépendent linéairement de

$$dt_1, \quad dt_2, \quad \ldots, \quad dt_{n-1}.$$

Remarquons du reste, et cette remarque jouera un grand rôle dans la suite, que le nombre des paramètres indépendants dont dépend l'hyperplan tangent est égal au nombre des expressions $\varpi_{1n}, \varpi_{2n}, \ldots, \varpi_{n-1,n}$ linéairement indépendantes.

4. Proposons-nous maintenant, étant donnée une hypersurface (S), de trouver toutes les hypersurfaces (Σ) *applicables* sur (S). Nous supposerons que nous avons *attaché* à chaque point de (S) un n-èdre satisfaisant aux conditions du numéro précédent; ce n-èdre dépendra des $n-1$ paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Le ds^2 de l'hypersurface (S) est évidemment

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{n-1}^2.$$

Si N est un point variable de l'hypersurface (Σ), ses coordonnées sont des fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, et l'on peut toujours trouver

$n-1$ vecteurs $J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}$ tels que l'on ait

$$dN = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_{n-1} J_{n-1};$$

la condition que le ds^2 de (Σ) soit le même que celui de (S) montre alors que ces $n-1$ vecteurs J_r sont de longueur 1 et rectangulaires entre eux. Désignons alors par J_n le vecteur-unité rectangulaire à $J_1, \ldots, J_{n-1}$. On définit ainsi en chaque point de (Σ) un certain n-èdre attaché à l'hypersurface.

Le n-èdre le plus général de l'espace à n dimensions dépendant de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres $u_1, \ldots, u_N$, le problème proposé revient alors au suivant :

Déterminer les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_N$ en fonction de $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, de manière à avoir l'identité

$$dN = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_{n-1} J_{n-1}. \tag{4}$$

Ce premier problème une fois résolu, on connaîtra les composantes mobiles du mouvement instantané du n-èdre attaché à (Σ) et il suffira ensuite d'en déduire le mouvement de (Σ) pour avoir en particulier les coordonnées de N en fonction de $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

5. Désignons par de grandes lettres Ω_r, Π_{rs} les composantes du mouvement instantané du n-èdre le plus général $NJ_1, \ldots, J_n$: ce sont des expressions de Pfaff aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Le système différentiel à intégrer est alors

$$\left\{\begin{array}{ll} \Omega_1 & = \omega_1, \\ \Omega_2 & = \omega_2, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots,} \\ \Omega_{n-1} & = \omega_{n-1}, \\ \Omega_n & = 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Les premiers membres ne dépendent que des fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_N$; les seconds membres, des variables indépendantes $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Égalons les covariants bilinéaires des deux membres de chacune des équations (5); nous avons, en tenant compte de ces équations (5) elles-mêmes,

$$
(6)\quad \begin{cases}
[\omega_2(\Pi_{21} - \varpi_{21})] + [\omega_3(\Pi_{31} - \varpi_{31})] + \ldots + [\omega_{n-1}(\Pi_{n-1,1} - \varpi_{n-1,1})] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[\omega_1(\Pi_{1,n-1} - \varpi_{1,n-1})] + [\omega_2(\Pi_{2,n-1} - \varpi_{2,n-1})] + \ldots + [\omega_{n-2}(\Pi_{n-2,n-1} - \varpi_{n-2,n-1})] = 0 \\
[\omega_1 \Pi_{1n}] + [\omega_2 \Pi_{2n}] + \ldots + [\omega_{n-1} \Pi_{n-1,n}] = 0
\end{cases}
$$

Les $n-1$ premières équations (6) montrent que les expressions $\Pi_{rs} - \varpi_{rs}$ $(r, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. Si l'on pose alors

$$\Pi_{rs} - \varpi_{rs} = \sum_{t=1}^{t=n-1} \alpha_{rst}\,\omega_t \qquad (\alpha_{rst} = -\alpha_{srt}),$$

on obtient

$$\alpha_{rst} - \alpha_{rts} = 0,$$

égalité qui, jointe à

$$\alpha_{rst} + \alpha_{srt} = 0,$$

montre que tous les coefficients α_{rst} sont nuls.

Les équations (5) entraînent donc comme conséquence les nouvelles équations

$$(7) \qquad \Pi_{rs} = \varpi_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

6. Pour éviter toute confusion, nous modifierons un peu nos notations en posant

$$\varpi_{in} = \psi_i, \qquad \Pi_{in} = \Psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'égalité des covariants bilinéaires des deux membres de chacune des équations (7) donne, en tenant compte des équations (5) et (7) et en utilisant les formules (3),

$$(8) \qquad [\Psi_r \Psi_s] = [\psi_r \psi_s] \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

De là nous allons tirer des conclusions importantes.

Supposons que l'hyperplan tangent à l'hypersurface (S) dépende de h paramètres $(2 \leq h \leq n-1)$. On peut alors supposer choisis les vecteurs tangents $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ de manière à avoir

$$\psi_{h+1} = \psi_{h+2} = \ldots = \psi_{n-1} = 0,$$

les h expressions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_h$ étant linéairement indépendantes.

Le nombre des expressions bilinéaires $[\psi_r \psi_s]$ linéairement indépendantes est alors de $\frac{h(h-1)}{2}$. *Il faut*, d'après (8), *que ce nombre soit le même pour l'hypersurface* (S) *et l'hypersurface* (Σ). Il faut donc que, pour ces deux hypersurfaces, le nombre h ait la même valeur, à moins que la somme des valeurs de ce nombre pour (S) et (Σ) ne soit égale à 1, c'est-à-dire à moins que (S) ne soit un hyperplan ou l'enveloppe d'un hyperplan dépendant d'un paramètre.

Donc, *pour que deux hypersurfaces soient applicables, il faut que, pour ces deux hypersurfaces, l'hyperplan tangent dépende du même nombre de paramètres; exception faite du cas où l'une des hypersurfaces serait un hyperplan et l'autre l'enveloppe d'un hyperplan à un paramètre (hypersurface développable).*

LES HYPERSURFACES DÉVELOPPABLES.

7. Examinons tout de suite ce cas d'exception, et pour cela supposons que (S) soit l'enveloppe d'un hyperplan dépendant d'un paramètre.

Le système de Pfaff

$$(9)\quad \begin{cases} \Omega_r = \omega_r & (r = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega_n = 0, & \\ \Psi_r = 0 & (r = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Pi_{rs} = 0 & (r, s = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

est complètement intégrable, car les covariants bilinéaires des deux membres de chacune de ses équations sont égaux en tenant compte des équations (9) elles-mêmes : cela tient à ce que les expressions $[\psi_r \psi_s]$ sont identiquement nulles. Ce système (9) étant complètement intégrable, il existe une hypersurface (Σ) applicable sur (S) et telle que $\Psi_r = 0$: c'est évidemment un hyperplan.

Toute hypersurface enveloppe d'hyperplans dépendant d'un paramètre est donc applicable sur un hyperplan.

LES HYPERSURFACES DONT L'HYPERPLAN TANGENT DÉPEND DE PLUS DE DEUX PARAMÈTRES.

8. Passons maintenant au cas où l'hypersurface (S) est l'enveloppe d'un hyperplan dépendant de $h \geqq 3$ paramètres.

Les égalités

$$[\Psi_1 \Psi_r] = [\psi_1 \psi_r]$$

conduisent aux suivantes :

$$0 = [\Psi_1 \Psi_1 \Psi_r] = [\Psi_1 \psi_1 \psi_r].$$

Ces dernières montrent que, si Ψ_1 et ψ_1 sont linéairement indépendantes, chaque expression ψ_r est une combinaison linéaire de Ψ_1 et de ψ_1 ; cela n'est pas possible, car alors h serait au plus égal à 2. Il y a donc une relation linéaire au moins entre Ψ_1 et ψ_1. D'autre part, si ψ_1 est nulle, Ψ_1 l'est aussi; sinon, en effet, les égalités

$$[\Psi_1 \Psi_r] = 0$$

montreraient que chaque expression Ψ_r est proportionnelle à Ψ_1 et h serait égal à 1; de même, ψ_1 est nulle si Ψ_1 l'est.

Il résulte de là que, dans tous les cas, on peut écrire

$$\Psi_r = \varepsilon_r \psi_r,$$

ε_r étant un coefficient différent de zéro. Supposons maintenant que ψ_1, ψ_2, ψ_3 soient linéairement indépendantes; les égalités

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2], \qquad [\Psi_1 \Psi_3] = [\psi_1 \psi_3], \qquad [\Psi_2 \Psi_3] = [\psi_2 \psi_3]$$

donnent

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \pm 1 ;$$

puis $\varepsilon_r = \varepsilon_1$ si ψ_r n'est pas nulle. En définitive on a, quel que soit r,

$$\Psi_r = \varepsilon \psi_r \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Si $\varepsilon = -1$, en changeant le sens du vecteur J_n, on se ramène au cas $\varepsilon = 1$, et finalement on trouve

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Omega_r &= \omega_r, \\ \Omega_n &= \omega_n, \\ \Pi_{rs} &= \varpi_{rs}, \\ \Psi_r &= \psi_r. \end{aligned} \right.$$

Les mouvements instantanés des n-èdres attachés à (S) et (Σ) sont donc les mêmes, et par suite les hypersurfaces (S) et (Σ) sont *égales* (ou symétriques). Autrement dit, l'hypersurface (S) est *indéformable*.

Toute hypersurface dont l'hyperplan tangent dépend de trois ou d'un plus grand nombre de paramètres est indéformable.

LES HYPERSURFACES ENVELOPPES D'UN HYPERPLAN A DEUX PARAMÈTRES.

9. Reste le cas $h = 2$. Dans ce cas, on peut choisir les axes du n-èdre attachés aux différents points de (S) de manière à avoir

$$\psi_3 = \psi_4 = \ldots = \psi_{n-1} = 0.$$

L'hypersurface est l'enveloppe d'une famille d'hyperplans dépendant de deux paramètres et la caractéristique de l'hyperplan P_n est la variété plane à $n-3$ dimensions intersection de P_n, P_1, P_2. L'hyperplan tangent est le même tout le long de cette variété plane.

On a, pour toute hypersurface (Σ) applicable sur (S),

$$\Psi_3 = \Psi_4 = \ldots = \Psi_{n-1} = 0.$$

Toute hypersurface (Σ) satisfait donc au système de Pfaff

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Omega_r - \omega_r = 0 & (r = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega_n = 0, & \\ \Pi_{rs} - \varpi_{rs} = 0 & (r, s = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Psi_3 = 0, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ \Psi_{n-1} = 0, & \end{array}\right.$$

et l'on a, en tenant compte de ces équations (11),

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Omega'_r - \omega'_r \equiv 0 & (r = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2], & \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} \equiv -[\Psi_1 \Psi_2] + [\psi_1 \psi_2], & \\ \Pi'_{1r} - \varpi'_{1r} \equiv 0 & (r = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi'_{rs} - \varpi'_{rs} \equiv 0 & (r, s = 3, \ldots, n-1), \\ \Psi'_r \equiv -[\varpi_{1r} \Psi_1] - [\varpi_{2r} \Psi_2] & (r = 3, \ldots, n-1). \end{array}\right.$$

10. Faisons d'abord la remarque suivante. L'équation $\omega_n = 0$ donne

$$[\omega_1 \psi_1] + [\omega_2 \psi_2] = 0,$$

ce qui montre que ψ_1 et ψ_2 sont deux combinaisons linéaires (nécessairement indépendantes) de ω_1 et ω_2. L'équation $\psi_r = 0$ conduit alors à

$$[\varpi_{1r} \psi_1] + [\varpi_{2r} \psi_k] = 0,$$

ce qui montre que ϖ_{1r} et ϖ_{2r} sont deux combinaisons linéaires de ψ_1 et ψ_2, et par suite de ω_1 et ω_2. On voit donc que les seconds membres des équations (12) ne font intervenir que quatre expressions de Pfaff ω_1, ω_2, Ψ_1, Ψ_2 indépendantes des premiers membres des équations (11); sur ces quatre expressions, deux dépendent des différentielles des variables indépendantes, deux des différentielles des fonctions inconnues.

Posons

$$(13) \qquad \begin{cases} \varpi_{1r} = \alpha_r \omega_1 + \beta_r \omega_2 \\ \varpi_{2r} = \gamma_r \omega_1 + \delta_r \omega_2 \end{cases} \qquad (r = 3, \ldots, n-1)$$

La condition

$$[\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2] = 0$$

permet de poser

$$(14) \qquad \begin{cases} \Psi_1 = \mathrm{A}\omega_1 + \mathrm{M}\omega_2, \\ \Psi_2 = \mathrm{M}\omega_1 + \mathrm{N}\omega_2 \end{cases}$$

avec trois coefficients arbitraires A, M, N; soient λ, μ, ν les valeurs de ces coefficients pour (S); la condition

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2]$$

donne

$$(15) \qquad \mathrm{AN} - \mathrm{M}^2 = \lambda\nu - \mu^2.$$

Enfin, la condition

$$[\varpi_{1r} \Psi_1] + [\varpi_{2r} \Psi_2] = 0$$

donne

$$(16) \qquad \beta_r \mathrm{A} + (\delta_r - \alpha_r)\mathrm{M} - \gamma_r \mathrm{N} = 0 \qquad (r = 3, \ldots, n-1),$$

équations vérifiées aussi bien pour (S) que pour (Σ). Ces équations se réduisent évidemment à deux *au plus*.

11. D'après cela, plusieurs cas sont possibles, suivant :

1° Qu'il y a deux équations (16) indépendantes;
2° Qu'il y a une seule équation (16) indépendante;
3° Que les équations (16) se réduisent toutes à des identités.

Éliminons d'abord le premier cas, qui donne évidemment

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{\nu},$$

ces rapports étant, d'après (15), égaux à ± 1; on a alors, en changeant au besoin le sens de la normale de (Σ),

$$\Psi_1 = \psi_1, \qquad \Psi_2 = \psi_2,$$

et par suite (Σ) et (S) sont égales et symétriques. Dans ce cas général, l'hypersurface (S) est indéformable.

Restent les deux autres cas : nous allons commencer par le dernier.

LES HYPERSURFACES DÉFORMABLES DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE.

12. Dans ce cas, on a

$$\alpha_r = \delta_r, \qquad \beta_r = 0, \qquad \gamma_r = 0,$$

les covariants bilinéaires qui se trouvent aux seconds membres de (12) se réduisent alors à deux indépendants, à savoir

$$[\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2],$$
$$[\psi_1 \psi_2] - [\Psi_1 \Psi_2].$$

Le système (11) est par suite en involution et son intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. *Il y a donc une infinité d'hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) et ces hypersurfaces dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

On peut, du reste, caractériser d'une manière géométrique simple les hypersurfaces (S) en question et ramener le problème de leur déformation à celui de la déformation d'une surface dans l'espace à trois dimensions euclidien ou sphérique.

1. Supposons, en premier lieu, tous les coefficients α_r nuls.

Les formules

$$
(17)\qquad \begin{cases} dP_n = -\ \psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 = \varpi_{12} P_2 + \psi_1 P_n - \omega_1, \\ dP_2 = \varpi_{21} P_1 + \psi_2 P_n - \omega_2 \end{cases}
$$

montrent alors que le système linéaire d'hyperplans

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_n + \rho$$

est *fixe* (¹). Si l'on choisit les axes fixes de manière que les trois premiers plans de coordonnées fassent partie de ce système, l'hyperplan tangent à (S) a une équation de la forme

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u = 0,$$

où les coefficients dépendent de deux paramètres. Par suite, l'équation de l'hypersurface est de la forme

$$
(18)\qquad F(x_1, x_2, x_3) = 0.
$$

Les variétés linéaires à $n-3$ dimensions $\mathfrak{P}$ qui engendrent l'hypersurface et qui sont les caractéristiques de l'hyperplan tangent (intersection des hyperplans P_n, P_1, P_2) font partie d'un réseau fixe.

$$x_1 = \text{const.}, \qquad x_2 = \text{const.}, \qquad x_3 = \text{const.}$$

Le réseau des variétés linéaires orthogonales à trois dimensions $\mathfrak{P}'$,

$$x_4 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \text{const.}$$

est également fixe. Par chaque point de l'espace passe une variété linéaire $\mathfrak{P}$ du premier réseau et une seule, une variété linéaire $\mathfrak{P}'$ du second réseau et une seule; par le point M par exemple la variété ($\mathfrak{P}$) est l'intersection des hyperplans P_n, P_1, P_2; la variété ($\mathfrak{P}'$) l'intersection des hyperplans $P_3, \ldots, P_{n-1}$. Chaque variété linéaire $\mathfrak{P}$ coupe l'hypersurface (S) suivant une variété à deux dimensions ou

---

(¹) En effet, la forme linéaire de ces équations aux différentielles totales montre que l'on a

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 + \xi, \\
P_2 &= \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3 + \eta, \\
P_n &= \zeta_1 A_1 + \zeta_2 A_2 + \zeta_3 A_3 + \zeta,
\end{aligned}
$$

les hyperplans A_1, A_2, A_3 étant des hyperplans fixes arbitraires.

surface (s) et l'hypersurface (S) est engendrée en menant par chaque point de (s) la variété génératrice $\mathfrak{P}$ qui passe par ce point. Sur une variété $\mathfrak{P}'$ fixe $\omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ sont nuls et l'on a

$$
(19) \qquad \begin{cases} dM = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2, \\ dI_1 = \varpi_{12} I_2 + \psi_1 I_n, \\ dI_2 = \varpi_{21} I_1 + \psi_2 I_n, \\ dI_n = -\psi_1 I_1 - \psi_2 I_2. \end{cases}
$$

Le ds^2 de la surface (1) est donc $\omega_1^2 + \omega_2^2$.

L'hypersurface (Σ) a une génération analogue à celle de (S) avec deux réseaux orthogonaux de variétés linéaires $\mathfrak{Q}$ à $n-3$ dimensions, $\mathfrak{Q}'$ à trois dimensions, chaque variété $\mathfrak{Q}'$ coupant (Σ) suivant une surface (σ). *Pour l'applicabilité de* (S) *sur* (Σ) *il faut que les surfaces* (s) *et* (σ), *considérées comme appartenant chacune à un espace euclidien à trois dimensions* $(\mathfrak{P}')$ *et* $(\mathfrak{Q}')$, *soient applicables l'une sur l'autre*, et il est évident que la condition est suffisante.

II. Supposons en second lieu que les coefficients α_r ne sont pas tous nuls. Partons des formules

$$
\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \omega_1(\alpha_3 P_3 + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1} - 1) + \psi_1 P_n, \\ dP_2 &= \varpi_{21} P_1 + \omega_2(\alpha_3 P_3 + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1} - 1) + \psi_2 P_n; \end{aligned}
$$

on peut choisir le n-èdre attaché à l'hypersurface de manière à avoir

$$\alpha_4 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0;$$

il suffit pour cela de prendre le plan $\alpha_3 P_3 + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1}$ pour troisième plan coordonné; écrivons pour abréger α à la place de α_3.

Des formules

$$\varpi_{1r} = 0, \qquad \varpi_{2r} = 0 \qquad (r = 4, \ldots, n-1)$$

on déduit, par (3),

$$\alpha[\omega_1 \varpi_{3r}] = \alpha[\omega_2 \varpi_{3r}] = 0;$$

d'où

$$\varpi_{3r} = 0 \qquad (r = 4, \ldots, n-1).$$

De

$$\varpi_{13} = \alpha\omega_1, \qquad \varpi_{23} = \alpha\omega_2$$

on déduit ensuite

$$[\omega_1(d\alpha - \alpha^2\omega_3)] = [\omega_2(d\alpha - \alpha^2\omega_3)] = ,,$$

d'où

$$d\alpha = \alpha^2\omega_3.$$

De là résultent les formules

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \alpha\omega_1\left(P_3 - \frac{1}{\alpha}\right) + \psi_1 P_n, \\ dP_2 &= \varpi_{21} P_1 + \alpha\omega_2\left(P_3 - \frac{1}{\alpha}\right) + \psi_2 P_n, \\ d\left(P_3 - \frac{1}{\alpha}\right) &= -\alpha\omega_1 P_1 - \alpha\omega_2 P_2. \end{aligned}\right.$$

Par suite *le système linéaire d'hyperplans*

$$\lambda P_1 + \mu P_2 + \nu\left(P_3 - \frac{1}{\alpha}\right) + \rho P_n$$

est fixe. Si l'on choisit les axes fixes de manière que les quatre premiers hyperplans de coordonnées fassent partie de ce système, on voit que l'hypersurface (S) est l'enveloppe d'un hyperplan

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

où les coefficients dépendent de deux paramètres. Autrement dit *l'équation de l'hypersurface est de la forme*

$$(21)\qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

F *étant homogène*.

L'hypersurface est engendrée par des variétés linéaires à $n-3$ dimensions $\mathfrak{F}$ qui font partie du réseau fixe

$$\frac{x_1}{\text{const.}} = \frac{x_2}{\text{const.}} = \frac{x_3}{\text{const.}} = \frac{x_4}{\text{const.}};$$

leurs trajectoires orthogonales à trois dimensions $\mathfrak{F}'$ forment également un réseau fixe

$$x_5 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \text{const.}, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \text{const.};$$

ce sont des variétés hypersphériques à trois dimensions : la quantité $\frac{1}{\alpha}$ est le rayon de celle qui passe par M. Chacune d'elles coupe (S) suivant une surface (s) et (S) est engendrée par les variétés linéaires ($\mathfrak{P}$) qui passent par les différents points de (s). Sur une variété $\mathfrak{P}'$ fixe $\omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ sont nuls et l'on a

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} dM &= \omega_1\, I_1 + \omega_2 I_2,\\ dI_1 &= \varpi_{12} I_2 + \alpha\omega_1 I_3 + \psi_1 I_n,\\ dI_2 &= \varpi_{21} I_1 + \alpha\omega_2 I_3 + \psi_2 I_n,\\ dI_n &= -\psi_1 I_1 - \psi_2 I_2. \end{aligned}\right.$$

Le ds^2 de la surface (s) tracée dans cet espace sphérique à trois dimensions de courbure α^2 est $\omega_1^2 + \omega_2^2$.

L'hypersurface (Σ) a une génération analogue à celle de (S) avec deux réseaux orthogonaux de variétés, les unes linaires $\mathfrak{Q}$ à $n-3$ dimensions et les autres sphériques $\mathfrak{Q}'$ à trois dimensions. Chaque variété $\mathfrak{Q}'$ coupe (Σ) suivant une surface (σ). Pour l'applicabilité de (S) et de (Σ) il *faut que les surfaces* (s) *et* (σ) *situées dans deux variétés* $\mathfrak{P}'$ *et* $\mathfrak{Q}'$ *de même courbure* 1 *soient applicables l'une sur l'autre*, et il est évident que cela suffit. La recherche des hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) revient donc ici à la recherche, dans un espace sphérique à trois dimensions de courbure 1, des surfaces applicables sur une surface donnée.

LES HYPERSURFACES DÉFORMABLES DE LA SECONDE CATÉGORIE.

13. Supposons maintenant que les équations (16) se réduisent à une seule, ou, ce qui revient au même, que les équations

$$(23)\quad \omega_2\varpi_{1r} - \omega_1\varpi_{2r} \equiv \beta_r\omega_2^2 + (\delta_r - \alpha_r)\omega_1\omega_2 - \gamma_r\omega_1^2 = 0 \quad (r = 3, \ldots, n-1),$$

sans être toutes des identités, se réduisent à une seule.

Cette équation unique est homogène et du second degré en ω_1, ω_2 et l'on peut se trouver encore dans deux cas différents, suivant que le premier membre est un carré parfait ou non.

Nous examinerons d'abord le premier cas. On peut profiter de l'indétermination des vecteurs tangents I_1, I_2 pour supposer que l'équation (23) se réduit à

$$\omega_1^2 = 0,$$

autrement dit qu'on a

$$(24)\qquad \alpha_r = \delta_r, \qquad \beta_r = 0.$$

On a donc, d'après (16),

$$N = 0, \qquad \nu = 0$$

et par suite, d'après (15),

$$M = \pm \mu;$$

on peut, du reste, toujours choisir le sens positif de la normale à (Σ) pour que M soit égal à μ; on aura alors, par suite,

$$\Psi_2 = \psi_2.$$

On peut donc ajouter aux équations du système de Pfaff (11) la nouvelle équation

$$\Psi_2 - \psi_2 = 0.$$

Les covariants bilinéaires des premiers membres du nouveau système deviennent alors, en tenant compte de ce système,

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega'_r - \omega'_r &\equiv 0, \\ \Omega'_n &\equiv [\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} &\equiv \mu[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{1r} - \varpi'_{1r} &\equiv 0, \\ \Pi'_{rs} - \varpi'_{rs} &\equiv 0, \\ \Psi'_2 - \psi'_2 &= [\varpi_{21}(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Psi'_r &= -\alpha_r[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)]. \end{aligned} \right.$$

Si ϖ_{12} est linéairement independante de ω_1, les seconds membres des relations précédentes ne peuvent être nuls que si $\Psi_1 - \psi_1$ est nul. Dans ce cas les n-èdres attachés à (S) et (Σ) ont le même mouvement instantané et (Σ) est égale ou symétrique à (S) : l'hypersurface (S) est indéformable.

Si, au contraire, on a

$$(26) \qquad \varpi_{12} = h\omega_1,$$

le système de Pfaff prolongé est en involution, et son intégrale générale dépend *d'une fonction arbitraire d'un argument.*

14. Les hypersurfaces (S) qui satisfont à la condition trouvée peuvent être définies d'une manière géométrique simple comme des *lieux de variétés linéaires à $n - 2$ dimensions dépendant d'un paramètre.*

Remarquons en effet que l'équation

$$\omega'_1 = [\omega_2 \varpi_{21}] + [\omega_3 \varpi_{31}] + \ldots + [\omega_{n-1} \varpi_{n-1,1}]$$

peut s'écrire, grâce aux relations (24) et (26),

$$\omega'_1 = [\omega_1 \chi],$$

et que, par suite, l'équation $\omega_1 = 0$ est complètement intégrable. Cette équation définit donc sur (S) une famille à un paramètre de variétés à $n - 2$ dimensions; or, quand on se déplace sur une de ces variétés, c'est-à-dire quand on fait $\omega_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1, \\ dP_1 &= \quad \psi_1 P_n; \end{aligned}$$

la variété linéaire d'intersection de P_n et P_1 reste donc fixe : c'est par suite la variété à $n - 2$ dimensions considérée.

Réciproquement, supposons que (S) soit le lieu d'une variété linéaire à $n - 2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Les hyperplans tangents sont les hyperplans qui contiennent cette variété : ils dépendent donc de deux paramètres. En conservant les notations habituelles on peut supposer que la variété génératrice à $n - 2$ dimensions est l'intersection de P_n et de P_1. Or, on a

$$\begin{aligned} dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \varpi_{13} P_3 + \ldots + \varpi_{1,n-1} P_{n-1} + \psi_1 P_n - \omega_1. \end{aligned}$$

Il faut que, si l'on tient compte de l'équation aux différentielles totales qui est vérifiée quand on se déplace sur une génératrice à $n - 2$ dimensions, les seconds membres de dP_1 et dP_n soient linéaires et homogènes en P_1 et P_n. Il faut, par suite, que cette équation aux différentielles totales soit $\omega_1 = 0$ et qu'elle entraîne

$$\psi_2 = \varpi_{12} = \varpi_{13} = \ldots = \varpi_{1,n-1} = 0.$$

On a donc

$$\beta_r = 0, \qquad \nu = 0,$$

et, comme μ n'est pas nul,

$$\alpha_r = \delta_r;$$

les relations (24) et (26) sont donc vérifiées, ce qu'il fallait démontrer.

15. Étudions d'un peu plus près la déformation des hypersurfaces précédentes. Le déplacement instantané du n-èdre attaché à l'hypersurface déformée (Σ) est facile à déterminer sans intégration. Les composantes de ce déplacement sont en effet les mêmes que pour (S), à la seule exception de Ψ_1, et l'on a évidemment

$$\Psi_1 - \psi_1 = \rho\omega_1,$$

le coefficient ρ dépendant naturellement d'une fonction arbitraire d'un argument. Or le premier membre $\Psi_1 - \psi_1$ est une différentielle exacte puisqu'on a

$$\psi_1' = [\psi_2 \varpi_{21}] = 0, \qquad \Psi_1' = [\psi_2 \varpi_{21}] = 0;$$

le second membre est donc aussi une différentielle exacte. Or, l'équation $\omega_1 = 0$ admet pour intégrale le paramètre dont dépend la variété linéaire génératrice; si t est ce paramètre, on a donc

$$\Psi_1 = \psi_1 + f(t)\,dt,$$

$f(t)$ désignant une fonction *arbitraire* de t.

Cette fonction $f(t)$ étant fixée, la détermination de l'hypersurface (Σ) dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, associé au groupe euclidien de l'espace à n dimensions. Si n est égal à 4, ce système, comme l'on sait, se ramène à deux équations de Riccati.

On peut se demander s'il ne serait pas possible de diriger les calculs de manière à avoir sans aucun signe d'intégration l'hypersurface (Σ) la plus générale applicable sur une hypersurface donnée (S); autrement dit, s'il serait possible d'exprimer les coordonnées d'un point de (Σ) par des formules dépendant d'une manière déterminée d'une fonction arbitraire d'un argument et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Il faut et il suffit pour cela que le système de Pfaff

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \Omega_r - \omega_r = 0 & (r = 1, \ldots, n-1), \\ \quad \Omega_n = 0, & \\ \Pi_{rs} - \varpi_{rs} = 0 & (r, s = 1, \ldots, n-1), \\ \Psi_2 - \psi_2 = 0, & \\ \quad \Psi_r = 0 & (r = 3, \ldots, n-1) \end{array}\right.$$

jouisse de la propriété suivante : *chacun de ses systèmes dérivés* *successifs contient une seule équation de moins que le précédent.*

Or, on a, en tenant compte de (24) et (26),

$$(25)\quad \begin{cases} \Omega'_r - \omega'_r \equiv 0, & \\ \quad \Omega'_n \equiv [\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], & \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} \equiv \mu[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], & \\ \Pi'_{1s} - \varpi'_{1s} \equiv 0 & (s = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi'_{rs} - \varpi'_{rs} \equiv 0 & (r, s = 3, \ldots, n-1), \\ \Psi'_2 - \psi'_2 \equiv -h[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], & \\ \quad \Psi'_r \equiv -\alpha_r[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)] & (r = 3, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Par suite, le système dérivé de (27) est

$$(28)\quad \begin{cases} \Omega_r - \omega_r = 0 & (r = 1, \ldots, n-1), \\ \Pi_{12} - \varpi_{12} - \mu\Omega_n = 0, & \\ \Pi_{1s} - \varpi_{1s} = 0 & (s = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi_{rs} - \varpi_{rs} = 0 & (r, s = 3, \ldots, n-1), \\ \Psi_2 - \psi_2 + h\Omega_n = 0 & \\ \Psi_r + \alpha_r \Omega_n = 0 & (r = 3, \ldots, n-1). \end{cases}$$

On a maintenant, en tenant compte de ces équations (28),

$$\begin{aligned} \Omega'_1 - \omega'_1 &\equiv -[\Omega_n(\Psi_2 - \mu\omega_2)], \\ \Omega'_2 - \omega'_2 &\equiv -[\Omega_n(\Psi_2 + \mu\omega_1)] = -2\mu[\Omega_n\omega_1]; \end{aligned}$$

ces deux formules suffisent à prouver que le système dérivé de (28) contient au moins deux équations de moins que (28).

C. Q. F. D.

16. Plaçons-nous à un autre point de vue en nous contentant de traiter le cas $n = 4$. Dans ce cas, la variété génératrice à deux dimensions $[P_4 P_1]$ a, avec la variété infiniment voisine, un point commun M_0 que nous supposerons à distance finie, pour rester dans le cas général. Les formules

$$\begin{aligned} dP_4 &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2, \\ dP_1 &= h\omega_1 P_2 + \alpha_3\omega_1 P_3 + \psi_1 P_4 - \omega_1 \end{aligned}$$

montrent que ce point M_0 est l'intersection des hyperplans P_4, P_1, P_2, $P_3 - \frac{1}{\alpha_3}$.

On a donc

$$M_0 = M + \frac{1}{\alpha_3} I_3.$$

De là il résulte que le vecteur I_3 associé au point M contient le point M_0 et que la distance $MM_0 = \frac{1}{\alpha_3}$ se conserve par la déformation. On a de plus

$$dM_0 = d\left(M + \frac{1}{\alpha_3} I_3\right) = -\frac{\gamma_3}{\alpha_3}\omega_1 I_2 + \left(\omega_3 - \frac{d\alpha_3}{\alpha_3^2}\right) I_3;$$

les coefficients de I_2 et I_3 dans le second membre étant également des invariants dans la déformation, il en résulte que la droite MM_0 fait avec la tangente à la courbe lieu de M_0 [tangente qui se trouve dans la variété (P)] un angle invariant dans la déformation.

Si donc on se donne la courbe (C) lieu du point M_0 la variété génératrice qui correspond au point M_0 contient la tangente à la courbe (C) en ce point. Si l'on considère alors dans la variété (P) le système de coordonnées ayant pour origine le point M_0 et pour axes la tangente et la normale à (C), les coordonnées (x, y) d'un point M de l'hypersurface (S) par rapport à ce système sont des invariants dans la déformation. On peut choisir un 4-èdre $(M_0 K_1 K_2 K_3 K_4)$ attaché à la courbe (C) du point M_0 de manière à satisfaire aux formules de Frenet

$$\frac{dM_0}{ds} = K_1,$$

$$\frac{dK_1}{ds} = \rho K_2,$$

$$\frac{dK_2}{ds} = -\rho K_1 + \sigma K_3,$$

$$\frac{dK_3}{ds} = -\sigma K_2 + \tau K_4,$$

$$\frac{dK_4}{ds} = -\tau K_3,$$

où ρ, σ, τ sont les trois courbures de la courbe (C) et K_1, K_2, K_3, K_4 les vecteurs unités portés sur la tangente, la première normale principale, etc. On a alors, pour un point variable de (S),

$$M = M_0 + xK_1 + y(\alpha K_2 + \beta K_3 + \gamma K_4),$$

où α, β, γ sont des fonctions de l'arc s de (C) satisfaisant à

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

On trouve sans difficulté pour le carré de l'élément d'arc de (S)

$$\begin{aligned} dS^2 &= [dx+(1-\alpha\rho y)\,ds]^2+dy^2+2\alpha\rho x\,dy\,ds \\ &\quad+\left\{[sx+(\alpha'-\beta\sigma)y]^2+[(\beta'+\alpha\sigma-\gamma\tau)^2+(\gamma'+\beta\tau)^2]y^2\right\}ds^2. \end{aligned}$$

Dans la déformation x, y et s restent invariants; il faut donc que $\alpha\rho$ reste aussi constant et par suite le coefficient de ds^2; donc ρ reste constant ainsi que α. Si l'on désigne par les mêmes lettres, affectées de l'indice 1, les quantités correspondant à l'hypersurface (Σ), on a

$$\begin{gathered} \alpha_1=\alpha, \\ \rho_1=\rho, \\ \beta_1\sigma_1=\beta\sigma, \\ (\beta'_1+\alpha\sigma_1-\gamma_1\tau_1)^2+(\gamma'_1+\beta_1\tau_1)^2=(\beta'+\alpha\sigma-\gamma\tau)^2+(\gamma'+\beta\tau)^2. \end{gathered}$$

Si, par exemple, on choisit pour σ_1 une fonction arbitraire de s, la quantité β_1 est déterminée et par suite γ_1, et la dernière équation donne τ_1. La courbe (C_1) est alors déterminée par ses trois courbures $\rho_1=\rho$, σ_1 et τ_1, mais sa détermination effective exige encore l'intégration de deux équations de Riccati, ce qui concorde avec le résultat général énoncé plus haut.

La discussion des cas particuliers se ferait sans difficulté.

LES HYPERSURFACES DÉFORMABLES DE LA TROISIÈME CATÉGORIE.

17. Revenons maintenant à l'équation (23) qui est une équation homogène et du second degré en ω_1 et ω_2, et plaçons-nons dans le dernier cas qui nous reste à examiner, celui où le premier membre de cette équation n'est pas un carré psrfait. Cette équation a une signification géométrique simple : *elle exprime que la variété génératrice à $n-3$ dimensions, intersection de P_n, P_1 et P_2, a en commun avec la variété infiniment voisine une variété linéaire à $n-4$ dimensions;* ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant qu'elle a une enveloppe.

On a en effet

$$\begin{aligned}
dP_n &= -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2,\\
dP_1 &= \varpi_{12} P_2 + \varpi_{13} P_3 + \ldots + \varpi_{1,n-1} P_{n-1} + \psi_1 P_n - \omega_1,\\
dP_2 &= \varpi_{21} P_1 + \varpi_{23} P_3 + \ldots + \varpi_{2,n-1} P_{n-1} + \psi_2 P_n - \omega_2.
\end{aligned}$$

La caractéristique de la variété génératrice est donc l'intersection commune de cette variété avec les hyperplans

$$\begin{aligned}
&\varpi_{13} P_3 + \ldots + \varpi_{1,n-1} P_{n-1} - \omega_1,\\
&\varpi_{23} P_3 + \ldots + \varpi_{2,n-1} P_{n-1} - \omega_2;
\end{aligned}$$

pour qu'il y ait une enveloppe il faut et il suffit qu'on ait

$$\omega_1 \varpi_{2r} - \omega_2 \varpi_{1r} = 0 \qquad (r = 3, \ldots, n-1).$$

Cette condition géométrique se traduit évidemment par une équation différentielle du premier ordre et du second degré par rapport aux deux paramètres dont dépend l'hyperplan tangent, et l'on peut supposer que cette équation différentielle est

$$du\, dv = 0.$$

Il est alors facile de voir que l'*hyperplan* P_n *satisfait à une équation de Laplace de la forme*

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial u\, \partial v} + \alpha \frac{\partial P_n}{\partial u} + \beta \frac{\partial P_n}{\partial v} + \gamma P_n = 0; \tag{29}$$

il est du reste facile de le vérifier par le calcul.

L'intersection de P_1 et de P_2 ne dépend que de u et de v; nous pourrons toujours choisir l'hyperplan P_1 lui-même de manière qu'il ne dépende que de u et de v; il en sera de même de P_2 : cela revient à dire que ϖ_{12} est une combinaison linéaire de ω_1 et ω_2. Posons

$$\varpi_{12} = h\, du + k\, dv,$$

et soit

$$(\omega_2 - p\,\omega_1)(\omega_2 - q\,\omega_1) = 0$$

l'équation (23) qui admet pour intégrales $u =$ const. et $v =$ const.

On peut poser

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= a\, du + b\, dv,\\
\omega_2 &= p\, a\, du + q\, b\, dv,
\end{aligned}$$

puis

$$\left.\begin{aligned}
\varpi_{1r} &= a_r\, du + b_r\, dv\\
\varpi_{2r} &= p\, a_r\, du + q\, b_r\, dv
\end{aligned}\right\} \qquad (r = 3, \ldots, n-1).$$

Les relations

$$[\omega_1\psi_1] + [\omega_2\psi_2] = 0,$$
$$[\varpi_{1r}\psi_1] + [\varpi_{2r}\psi_2] = 0$$

permettent enfin de poser

$$\psi_1 = -q m\, du - p n\, dv,$$
$$\psi_2 = m\, du + n\, dv.$$

La formule

$$dP_n = -\psi_1 P_1 - \psi_2 P_2$$

et l'hypothèse que P_n, P_1, P_2 ne dépendent que de u et v montrent que les coefficients de du, dv dans ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions de u et v seuls; les quantités p, q, m, n sont donc des fonctions de u et de v seulement.

Cela posé, on a

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P_n}{\partial u} = m(qP_1 - P_2), \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial v} = n(pP_1 - P_2); \end{cases}$$

d'autre part, les formules

$$dP_1 = -\quad (a\,du + b\,dv) \quad + (h\,du + k\,dv)P_2 + \sum_{r=3}^{r=n-1} (a_r\,du + b_r\,dv)P_r - (qm\,du + pn\,dv)P_n,$$
$$dP_2 = -(pa\,du + qb\,dv) - (h\,du + k\,dv)P_1 + \sum_{r=3}^{r=n-1} (pa_r\,du + qb_r\,dv)P_r + (m\,du + n\,dv)P_n$$

montrent que

$$\frac{\partial P_2}{\partial v} - q\frac{\partial P_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial u} - p\frac{\partial P_1}{\partial u}$$

ne dépendent que de P_1, P_2, P_n, ou encore que $\dfrac{\partial^2 P_n}{\partial u\,\partial v}$ est linéaire en $\dfrac{\partial P_n}{\partial u}$, $\dfrac{\partial P_n}{\partial v}$, P_n.

La réciproque est du reste évidente.

Quant aux coefficients α, β, γ, de l'équation (29), on peut les calculer, soit en dérivant la première équation (30) par rapport à v, soit en dérivant la deuxième équation (30) par rapport à u; on obtient ainsi les relations

$$
(31)\quad \begin{cases}
\gamma - mn(1+pq) = 0, \\
m\alpha + n\beta - mkq + \dfrac{\partial m}{\partial v} = 0, \\
mq\alpha + np\beta + mk + \dfrac{\partial(mq)}{\partial v} = 0, \\
m\alpha + n\beta - nhp + \dfrac{\partial n}{\partial u} = 0, \\
mq\alpha + np\beta + nh + \dfrac{\partial(np)}{\partial u} = 0.
\end{cases}
$$

18. Arrivons maintenant au problème de la déformation de (S). Quand on passe de (S) à (Σ) les coefficients a, b, a_r, b_r, p, q de du et dv dans ω_1, ω_2, ϖ_{1r}, ϖ_{2r}, restent les mêmes; les coefficients m et n qui entrent dans ψ_1 et ψ_2 sont remplacés par d'autres μ et ν, fonctions, comme m et n, de u et v seulement, et la formule

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2]$$

devient

$$\mu\nu = mn,$$

ce qui permet de poser

$$\mu = tm, \qquad \nu = \frac{1}{t}n,$$

t étant une fonction inconnue de u, v. C'est à la recherche de cette fonction que revient le problème de la déformation, la détermination de (Σ) revenant à l'intégration du système de Pfaff

$$
(32)\quad \begin{cases}
\Omega_r = \omega_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1), \\
\Omega_n = 0, \\
\Pi_{rs} = \varpi_{rs} \qquad (r, s = 1, \ldots, n-1), \\
\Psi_i = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\
\Psi_1 = -qtm\,du - \dfrac{p}{t} n\,dv, \\
\Psi_2 = tm\,du + \dfrac{n}{t}\,dv.
\end{cases}
$$

Les covariants bilinéaires des deux membres des équations (32) sont certainement égaux en tenant compte de (32), à l'exception des deux dernières équations. Pour ces deux équations on obtient, en égalant les covariants bilinéaires des deux membres,

$$\left[\frac{\partial(mq)}{\partial v} + mk\right] t - \left[\frac{\partial(np)}{\partial u} + hn\right] \frac{1}{t} + mq\frac{\partial t}{\partial v} + np\frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial m}{\partial v} - mkq\right] t - \left[\frac{\partial n}{\partial u} - nhp\right] \frac{1}{t} + m\frac{\partial t}{\partial v} + n\frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial v} = 0.$$

Comparées aux équations (31), ces équations donnent immédiatement

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\alpha, \qquad \frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\beta,$$

ou encore, en posant $t^2 = \theta$,

$$(33) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\theta}{\theta - 1} = \theta\beta\, du + \alpha\, dv.$$

En résumé, *le problème de la déformation de l'hypersurface* (S) *enveloppe de l'hyperplan à deux paramètres* (P_n) *qui satisfait à l'équation de Laplace* (29), *se ramène à l'intégration de l'équation aux différentielles totales* (33), *où* α *et* β *sont les coefficients qui s'introduisent dans l'équation de Laplace.*

19. Cela posé, trois cas peuvent se présenter :

Ou bien l'équation (33) n'admet aucune solution (distincte de $\theta = 1$) : dans ce cas l'hypersurface (S) est indéformable.

Ou bien l'équation (33) est complètement intégrable : alors l'hypersurface (S) admet une déformation continue dépendant essentiellement d'un paramètre [c'est-à-dire que les hypersurfaces (Σ) applicables sur (S) ne dépendent que d'un paramètre, abstraction faite de leur déplacement possible dans l'espace].

Ou bien l'équation (33) admet une intégrale et une seule autre que $\theta = 1$: alors l'hypersurface (S) est applicable sur une autre hypersurface particulière (S'), mais sans admettre de déformation continue.

Nous allons nous borner à étudier le cas où l'hypersurface (S) admet une déformation continue (*hypersurfaces déformables de la troisième catégorie*).

Il faut et il suffit pour cela que le covariant bilinéaire du second membre de l'équation (33) soit nul en tenant compte de cette équation elle-même, ce qui donne

$$-2(\theta-1)\alpha\beta[du\,dv]+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\theta\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)[du\,dv]=0,$$

d'où

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\beta}{\partial v}=-2\alpha\beta.$$

On voit donc déjà que l'équation de Laplace (29) est à *invariants égaux*. On trouve ensuite facilement

$$(34)\qquad \alpha=-\frac{1}{2}\frac{V'}{U-V},\qquad \beta=\frac{1}{2}\frac{U'}{U-V},$$

U et V désignant deux fonctions arbitraires, la première de u, la seconde de v. L'équation (33) s'intègre aisément et donne

$$\theta=\frac{C-V}{C-U},$$

où C est une constante arbitraire.

En résumé, *pour que l'hypersurface* (S), *enveloppe de l'hyperplan* P_n *satisfaisant à l'équation* (29), *admette une déformation continue, il faut et il suffit que les coefficients* α *et* β *de l'équation* (29) *soient de la forme*

$$\alpha=-\frac{1}{2}\frac{V'}{U-V},\qquad \beta=\frac{1}{2}\frac{U'}{U-V};$$

les composantes du déplacement instantané du n-èdre attaché à l'hypersurface déformée (Σ) *sont alors connues sans intégration : ce sont les mêmes que pour* (S), *sauf que dans* ψ_1 *et* ψ_2 *les coefficients m et n sont remplacés respectivement par*

$$m\sqrt{\frac{C-V}{C-U}},\qquad n\sqrt{\frac{C-U}{C-V}},$$

où C *désigne une constante arbitraire.* L'hypersurface (S) elle-même correspond à $C=\infty$.

En retranchant de la troisième équation (31), la deuxième multipliée par q, on voit que $\frac{n}{m}\beta$ reste invariant dans la déformation : il en est de même pour $\frac{m}{n}\alpha$. Par suite, quand on passe de (S) à (Σ), les coefficients α et β de l'équation de Laplace (29) sont remplacés par $\frac{\alpha}{\theta}$ et $\beta\theta$. Si donc l'hyperplan Q_n tangent à (Σ) satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\frac{V'_1}{U_1 - V_1}\frac{\partial Q_n}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{U'_1}{U_1 - V_1}\frac{\partial Q_n}{\partial v} + \gamma_1 f = 0,$$

on a

$$\gamma_1 = \gamma, \qquad \frac{V'_1}{U_1 - V_1} = \frac{C - U}{C - V}\frac{V'}{U - V}, \qquad \frac{U'_1}{U_1 - V_1} = \frac{C - V}{C - U}\frac{U'}{U - V},$$

d'où

$$U_1 - V_1 = \frac{C'(U - V)}{(C - U)(C - V)} = \frac{C'}{C - U} - \frac{C'}{C - V},$$

d'où enfin

$$U_1 = \frac{C'}{C - U} + C'', \qquad V_1 = \frac{C'}{C - V} + C'';$$

autrement dit *les fonctions* U_1 *et* V_1 *résultent de* U *et* V *par une même transformation homographique à coefficients constants.*

20. Ce qui précède suppose connus les paramètres u et v ainsi que les fonctions U et V. Il est facile de voir que si l'hypersurface (S) est donnée d'une manière quelconque, on peut connaître U et V par de simples quadratures. En effet, on a d'abord p et q par la résolution d'une équation du second degré; le calcul de

$$\psi_1 + p\psi_2 \quad \text{et} \quad \psi_1 + q\psi_2$$

fait alors connaître les expressions

$$m\,du, \quad n\,dv;$$

la formule

$$\varpi_{12} = h\,du + k\,dv = \frac{h}{m}m\,du + \frac{k}{n}n\,dv$$

nous permet de calculer immédiatement $\frac{h}{m}$ et $\frac{k}{n}$.

Connaissant $m\,du$, $n\,dv$, on en déduit par des opérations élémentaires les trois expressions bilinéaires

$$mn[du\,dv], \quad \frac{\partial m}{\partial v}[du\,dv], \quad \frac{\partial n}{\partial u}[du\,dv]$$

et par suite les deux fonctions

$$\frac{1}{mn}\frac{\partial m}{\partial v}, \quad \frac{1}{mn}\frac{\partial n}{\partial u};$$

on a de la même manière

$$\frac{1}{mn}\frac{\partial(mq)}{\partial v}, \qquad \frac{1}{mn}\frac{\partial(np)}{\partial u}.$$

D'après cela les équations (31) montrent que

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{m} \quad \text{et} \quad q\frac{\alpha}{n}+p\frac{\beta}{m}$$

sont connus et par suite $\frac{\alpha}{n}$ et $\frac{\beta}{m}$; on en déduit enfin

$$\frac{\alpha}{n}\,n\,dv = \alpha\,dv,$$

$$\frac{\beta}{m}\,m\,du = \beta\,du.$$

Cela posé, on a

$$\alpha\,dv + \beta\,du = \frac{1}{2}\,\frac{U'\,du - V'\,dv}{U - V};$$

on a donc par une quadrature

$$U - V = e^{2\int \alpha\,dv + \beta\,du}$$

On a ensuite

$$U'\,du = 2\beta\,du(U - V) = 2\beta\,du\,e^{2\int \alpha\,dv+\beta\,du}$$

d'où

$$U = 2\int \beta\,du\,e^{2\int \alpha\,dv+\beta\,du}$$

par une nouvelle quadrature.

Si α et β ne sont nuls ni l'un ni l'autre, U et V sont de vraies fonctions et, en les égalant à des constantes, on a les intégrales de l'équation (23). Si α n'est pas nul, mais si β l'est, on a V par une quadrature, mais aucune simplification n'est apportée dans la recherche de u.

21. On peut exprimer sous une forme encore plus simple les résultats du n° **19**. Posons

$$P_n = \frac{P'_n}{\sqrt{U - V}}.$$

On obtient par un calcul facile

$$\frac{\partial^2 P'_n}{\partial u\,\partial v}+\left[\gamma-\frac{1}{4}\frac{U'V'}{(U-V)^2}\right]P'_n=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 P'_n}{\partial u\,\partial v}+\gamma' P'_n=0.$$

L'équation correspondante pour (Σ) est *la même*.

Par suite, *les hypersurfaces* (S) *admettant une déformation continue s'obtiennent comme enveloppe d'hyperplans dépendant de deux paramètres, lorsque les coordonnées tangentielles de ces hyperplans satisfont à une même équation de la forme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+\gamma' f=0,$$

et que de plus la somme des carrés des n premières coordonnées tangentielles est la différence $U-V$ *entre une fonction* U *de* u *seul et une fonction* V *de* v *seul. Pour toute hypersurface* (Σ) *résultant de la déformation de* (S), *l'équation aux dérivées partielles est la même, mais les deux fonctions* U *et* V *subissent une même transformation homographique à coefficients constants.*

22. Un cas particulièrement simple est celui où γ' est nul. On obtient alors l'hypersurface (S) déformable comme enveloppe de l'hyperplan

$$(U_1-V_1)x_1+(U_2-V_2)x_2+\ldots+(U_n-V_n)x_n+U_{n+1}-V_{n+1}=0,$$

les fonctions U_i, V_i satisfaisant à l'identité

$$U'_1V'_1+U'_2V'_2+\ldots+U'_nV'_n=0;$$

on voit alors sans peine que ces hypersurfaces sont les enveloppes des hyperplans

$$(35) \qquad U_1x_1+\ldots+U_px_p+V_1y_1+\ldots+V_qy_q=U_{p+1}+V_{q+1},$$

où $U_1, \ldots, U_{p+1}$ sont des fonctions arbitraires de u et $V_1, \ldots, V_{q+1}$ des fonctions arbitraires de v. On a de plus $p+q\leqq n$ et $x_1, \ldots, y_q$ sont $p+q$ coordonnées rectangulaires dans l'espace à n dimensions.

Nous pouvons écrire l'équation (35) sous la forme

$$\frac{Q}{r} + \frac{R}{s} = 0, \tag{36}$$

où Q désigne un hyperplan (à coordonnées normales) de l'espace à p dimensions $(x_1, \ldots, x_p)$, fonction de u seul, et R un hyperplan (à coordonnées normales) de l'espace à q dimensions $(y_1, \ldots, y_q)$ fonction de v seul. Les quantités r et s sont des fonctions, la première de u, la seconde de v.

Il existe dans l'espace à p dimensions une courbe dont Q est l'hyperplan osculateur ; on peut adjoindre à l'hyperplan Q d'autres hyperplans rectangulaires $Q_1, \ldots, Q_{p-1}$ de manière à avoir les formules suivantes (formules de Frenet)

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dQ}{du} &= Q_1, \\
\frac{dQ_1}{du} &= - \quad Q + \alpha_1 Q_2, \\
\frac{dQ_2}{du} &= -\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dQ_{p-1}}{du} &= -\alpha_{p-2} Q_{p-2} + \alpha_{p-1},
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

où du est l'angle de l'hyperplan Q avec l'hyperplan infiniment voisin, $\alpha_{p-1}\,du$ l'élément d'arc de la courbe, $\frac{\alpha_{p-2}}{\alpha_{p-1}}, \ldots, \frac{\alpha_1}{\alpha_{p-1}}, \frac{1}{\alpha_{p-1}}$ les courbures successives de cette courbe.

On a, de même, dans l'espace à q dimensions,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dR}{dv} &= R_1, \\
\frac{dR_1}{dv} &= -R + \beta_1 R_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dR_{q-1}}{dv} &= -\beta_{q-2} R_{p-2} + \beta_{q-1}.
\end{aligned}\right. \tag{38}$$

L'enveloppe du plan (36) s'obtient en adjoignant à (36) les deux équations

$$\frac{1}{r}\frac{dQ}{du} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{du} Q = 0 \qquad \text{ou} \qquad Q_1 - \frac{1}{r}\frac{dr}{du} Q = 0,$$

$$\frac{1}{s}\frac{dR}{dv} - \frac{1}{s^2}\frac{ds}{dv} R = 0 \qquad \text{ou} \qquad R_1 - \frac{1}{s}\frac{ds}{dv} R = 0.$$

Considérons $n - 1$ hyperplans passant par M, rectangulaires entre eux et sur l'hyperplan tangent. On peut prendre pour ces $n - 1$ hyperplans, en s'appuyant sur les formules précédentes, les hyperplans suivants :

$$Q_1 - w\frac{dr}{du}, \qquad Q_i - \xi_i \qquad (i = 2, \ldots, p-1),$$

$$R_1 + w\frac{ds}{dv}, \qquad R_i - \eta_i \qquad (i = 2, \ldots, q-1),$$

$$\frac{r(Q - rw) - s(R + sw)}{\sqrt{r^2 + s^2}} \equiv \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}Q - \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}R - \sqrt{r^2+s^2}\,w,$$

où w, ξ_i, η_j sont des variables auxiliaires.

Les formules $(1')$ montrent que $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ s'obtiennent en calculant les différentielles de ces $n - 1$ hyperplans et en donnant aux seconds membres les valeurs qu'elles prennent au point M. On a ainsi, au point M, d'après (37) et (38),

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
d\left(Q_1 - w\frac{dr}{du}\right) &= -\frac{dr}{du}\,dw + \left(\alpha_1\xi_2 - \overline{wr + \frac{d^2r}{du^2}}\right)du,\\
d(Q_2 - \xi_2) &= -\quad d\xi_2 \quad + \left(\alpha_2\xi_3 - \alpha_1 w\frac{dr}{du}\right)du,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d(Q_{p-1} - \xi_{p-1}) &= -\quad d\xi_{p-1} + (\alpha_{p-1} - \alpha_{p-2}\,\xi_{p-2})\,du,\\
d\left(R_1 + w\frac{ds}{dv}\right) &= \quad\frac{ds}{dv}\,dw + \left(\beta_1\eta_2 + \overline{ws + \frac{d^2s}{dv^2}}\right)dv,\\
d(R_1 - \eta_2) &= -\quad d\eta_2 \quad + \left(\beta_2\eta_3 + \beta_1 w\frac{ds}{dv}\right)dv,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d(R_{q-1} - \eta_{q-1}) &= -\quad d\eta_{q-1} + (\beta_{q-1} - \beta_{q-2}\eta_{q-2})\,dv,\\
d\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}Q - \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}R - \sqrt{r^2+s^2}\,w\right) &= w\,d\left(\sqrt{r^2+s^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de ces équations restent invariants si l'on pose

$$w' = w,$$

$$\xi'_2 = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad \xi'_{p-1} = \xi_{p-1},$$

$$\eta'_2 = \eta_2, \qquad \ldots, \qquad \eta'_{q-1} = \eta_{q-1}$$

et

$$r\,du = r'\,du', \quad \frac{dr}{du} = \frac{dr'}{du'}, \quad \text{d'où} \quad r' = \sqrt{r^2 + C}, \quad du' = \frac{r}{\sqrt{r^2 + C}}\,du,$$

$$s\,dv = s'\,dv', \quad \frac{ds}{dv} = \frac{ds'}{dv'}, \quad \text{d'où} \quad s' = \sqrt{s^2 + C'}, \quad dv' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + C'}}\,dv,$$

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\alpha'_{p-1}}{\alpha_{p-1}} = \frac{du}{du'} = \frac{r'}{r},$$

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} = \frac{\beta'_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\beta'_{q-1}}{\beta_{q-1}} = \frac{dv}{dv'} = \frac{s'}{s},$$

$$r'^2 + s'^2 = r^2 + s^2, \qquad \text{d'où} \qquad C' = -C.$$

Il s'introduit ainsi une constante arbitraire C : cette constante étant donnée, l'élément d'arc et les courbures de la courbe dont l'hyperplan Q' (qui remplace l'hyperplan Q dans la déformation) est l'hyperplan osculateur sont connus; il en est de même pour la courbe dont R' est l'hyperplan osculateur; enfin r' et s' sont connus également. On est ainsi ramené à déterminer dans deux espaces, l'un à p dimensions, l'autre à q dimensions, deux courbes connaissant leur élément d'arc et leurs courbures.

Le cas particulier où q par exemple serait égal à 1 se traite sans difficulté.

23. Nous ne nous sommes pas préoccupés dans ce qui précède de la réalité des racines p et q de l'équation (20). Si elles sont imaginaires, les paramètres u et v peuvent être supposés imaginaires conjugués. Si l'on ne veut conserver que des paramètres réels, l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + \gamma' f = 0$$

doit être remplacée par une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \gamma' f = 0. \tag{40}$$

Il est facile de voir que *ce cas ne peut se présenter que si la fonction γ' est essentiellemnt positive*. Soient en effet

$$c_1, \quad \ldots, \quad c_n$$

les n premières coordonnées tangentielles qui satisfont à l'équation (40), la somme de leurs carrés satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0.$$

On a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)(c_1^2+\ldots+c_n^2)=2\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{\partial c_i}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial c_i}{\partial v}\right)^2\right]-2\gamma'\sum_{i=1}^{i=n}c_i^2,$$

ce qui met la proposition en évidence.

24. Un cas particulier est à signaler ici, c'est celui où l'équation (23) se réduit à

$$\omega_1^2+\omega_2^2=0;$$

dans ce cas, les hyperplans $\frac{\partial P_n}{\partial u}$, $\frac{\partial P_n}{\partial v}$ sont *isotropes*. L'équation

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial u\,\partial v}+\alpha\frac{\partial P_n}{\partial v}+\beta\frac{\partial P_n}{\partial v}+\gamma P_n=0$$

exige alors que $\alpha=\beta=0$; en effet, de

$$\frac{\partial P_n}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial P_n}{\partial u}=0 \quad (^1),$$

on déduit

$$\frac{\partial P_n}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial^2 P_n}{\partial u\,\partial v}=0,$$

c'est-à-dire

$$\beta\frac{\partial P_n}{\partial u}\,\Big|\,\frac{\partial P_n}{\partial v}=0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta=0,$$

et l'on a de même $\alpha=0$.

Les conditions de déformabilité de l'hypersurface, à savoir

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\beta}{\partial v}=-2\alpha\beta,$$

---

(1) Le symbole P | Q, où P désigne l'expression

$$\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n+\alpha$$

et Q l'expression

$$\beta_1 x_1+\ldots+\beta_n x_n+\beta,$$

est employé pour désigner la quantité $\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$, c'est-à-dire le produit géométrique des vecteurs normaux $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

sont donc vérifiées d'elles-mêmes, l'équation (33) se réduisant à

$$d\theta = 0.$$

Si l'on conserve des paramètres réels, l'hyperplan tangent satisfera à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial v^2} + \gamma P_n = 0$$

avec la double condition

$$\frac{\partial P_n}{\partial u}\left|\frac{\partial P_n}{\partial u}\right. = \frac{\partial P_n}{\partial v}\left|\frac{\partial P_n}{\partial v}\right., \qquad \frac{\partial P_n}{\partial u}\left|\frac{\partial P_n}{\partial v}\right. = 0.$$

25. Prenons comme exemple, dans l'espace à quatre dimensions, l'enveloppe (S) de l'hyperplan

$$P_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[x_1 \cos u + x_2 \sin u + x_3 \cos v + x_4 \sin v - f(u, v)] = 0,$$

où f satisfait à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + f = 0.$$

On obtient une hypersurface (Σ) applicable sur (S) en prenant l'enveloppe de l'hyperplan

$$Q_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[(x'_1 \cos u_1 + x'_2 \sin u_1 + x'_3 \cos v_1 + x'_4 \sin v_1 - f_1(u_1, v_1)] = 0,$$

où l'on a posé

$$u_1 = u \cos\frac{\alpha}{2} - v \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$v_1 = u \sin\frac{\alpha}{2} + v \cos\frac{\alpha}{2},$$

α étant une constante arbitraire et où f_1 est choisie de manière qu'il existe une solution H de l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + H \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v_1^2} + H = 0,$$

satisfaisant à la fois à

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1\, \partial v_1} = f(u, v), \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial u\, \partial v} = f_1(u_1, v_1).$$