BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur la croissance du module maximum des séries entières

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 45-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__45_0>

SUR LA CROISSANCE DU MODULE MAXIMUM DES SÉRIES ENTIÈRES;

PAR M. G. VALIRON.

Nous considérerons dans ce qui suit une série entière de rayon de convergence fini et non nul; nous supposerons ce rayon égal à *un* ainsi que le terme constant, ce qui ne nuira pas à la généralité. Soit

$$f(z) = \Sigma a_n z^n \tag{1}$$

cette série, nous posons

$$|a_n| = A_n = e^{g_n},$$

de sorte que l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{g_n}{n} = 0. \tag{2}$$

Nous désignerons par $M(r)$ le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$ et par $m(r)$ le module du terme (ou des termes) dont le module est pour $|z| = r$ supérieur (ou supérieur ou égal) à celui des autres, et nous appellerons ce terme (ou l'un quelconque de ces termes) *terme maximum*. La relation entre les fonctions $M(r)$ et $m(r)$ pour les valeurs de r voisines de *un* a été étudiée par M. Borel [1], qui montre, en prenant pour A_n une fonction de n à croissance régulière, et en supposant que l'on ait

$$a_n = A_n, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{g_n}{\log n} =$$

que $m(r)$ et $M(r)$ sont du même ordre de grandeur, en ce sens que l'on a

$$\lim_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log m(r)} = 1. \tag{3}$$

---

(1) BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. V.

Dans un récent Mémoire ([1]), M. Wiman a obtenu des résultats très précis, mais d'une nature différente; il montre en particulier que, sous la seule condition

$$\varlimsup_{n=\infty} \frac{\log A_n}{\log n} = \infty, \tag{4}$$

on a

$$\varliminf_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log m(r)} = 1. \tag{5}$$

Lorsque la condition (4) est remplacée par des conditions moins générales, la méthode de M. Wiman conduit à des égalités plus précises que (5), mais qui, elles aussi, ne sont valables que pour une suite infinie de valeurs tendant vers *un*. Je me propose de montrer dans ce qui suit que la méthode que j'ai employée pour les fonctions entières ([2]) peut donner aussi, dans le cas des séries entières, des résultats assez précis, valables pour toutes les valeurs de r voisines de *un*. Je montrerai notamment que, lorsque l'un des nombres

$$\varlimsup_{n=\infty} \frac{\log g_n}{\log n} \qquad \text{ou} \qquad \varlimsup_{r=1} \frac{\log_2 M(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}}$$

est fini et différent de zéro, il existe un nombre fini k tel que l'on ait l'inégalité

$$M(r) < m(r) \frac{1}{(1-r)^k} \qquad (r > r_0).$$

Dans le cas plus particulier où $M(r)$ vérifie à la fois la condition précédente et la condition

$$\lim_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \infty, \tag{6}$$

l'égalité (3) se trouvera réalisée; on obtient ainsi une classe de fonctions pour lesquelles la croissance de $M(r)$ considérée comme

---

([1]) Wiman, *Ueber dem Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe* (*Acta mathematica*, t. XXXVII, p. 305).

([2]) *Voir* Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913).

fonction de $\frac{1}{1-r}$ est assez comparable à celle du module maximum d'une fonction entière d'ordre fini; pour cette classe de fonctions, les calculs seront semblables à ceux que l'on fait pour les fonctions entières; j'indiquerai, par exemple, les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les nombres a_n pour que l'on ait

$$\log M(r) \sim \frac{A}{(1-r)^k}.$$

Lorsque $M(r)$ croît plus vite que dans les cas considérés ci-dessus, les inégalités sont moins simples; mais, en faisant une hypothèse assez large, je montrerai que l'on a

$$(7) \qquad M(r) < m(r)[\log m(r)]^{1+\varepsilon(r)} \quad (^1),$$

sauf peut-être dans des intervalles exceptionnels, la longueur totale de ceux de ces intervalles qui sont compris entre x et 1 étant infiniment petite par rapport à $1-x$.

1. Pour obtenir le terme maximum de la série (1) pour $|z| = r$, nous devons chercher le maximum de

$$g_n + n\log r = g_n - n\log\frac{1}{r}.$$

Marquons dans le plan xOy les points $B_n(n, g_n)$. Le coefficient angulaire des droites OB_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment [condition (2)]; il y a donc un nombre fini de points B_n au-dessus de la droite OX_r passant par l'origine et de coefficient angulaire égal à $\log\frac{1}{r}$, et par suite, parmi les points B_n, il y en a un ou plusieurs ayant par rapport aux axes OX_r, Oy une ordonnée supérieure ou égale à celle des autres. Ce point (ou l'un de ces points) donne le terme maximum, et la parallèle D_r à la droite OX_r passant par ce point (ou ces points) laisse tous les autres points B_n au-dessous d'elle. Lorsque r croîtra de 0 à 1, la droite D_r enveloppera un polygone de Newton π tournant sa concavité vers le bas, ayant pour sommets certains des points B_n et laissant les

(1) Dans tout ce travail, je désignerai par $\varepsilon(x)$ toute fonction positive de la variable positive x, qui tend vers *zéro* lorsque x tend vers *un*.

autres sur ses côtés ou au-dessous d'eux. Ce polygone π peut avoir un nombre fini de côtés; il faut et il suffit pour cela que l'un des nombres g_n soit supérieur ou égal à tous les autres; si n_0 est son rang, on a alors

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\frac{\mathrm{A}_{n_0}}{1-r},$$

$m(r)$ restant d'ailleurs fini, nous laisserons ce cas de côté. Nous désignerons par G_n l'ordonnée du point du polygone π dont l'abscisse est n; on a

$$g_n \leqq \mathrm{G}_n$$

quel que soit n, l'égalité ayant lieu pour les sommets du polygone π. La suite des nombres G_n ne va pas en décroissant, elle peut avoir une limite G; on aura alors

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\frac{e^{\mathrm{G}}}{1-r},$$

inégalité qui ne présente pas plus d'intérêt que la précédente. Nous supposons donc que l'on ait

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, g_n = \lim \mathrm{G}_n = \infty,$$

et nous poserons

$$\mathrm{G}_{n+1} - \mathrm{G}_n = \log r_{n+1},$$

ce qui donne, a_0 étant égal à *un*,

$$e^{\mathrm{G}_n} = r_1 r_2 \dots r_n.$$

Les nombres r_n ne croissent pas lorsque n croît et tendent vers *un*; l'un d'eux, r_n, est le rapport du coefficient du terme de rang $n+1$ au coefficient du terme de rang n dans la série

$$\Sigma\, e^{\mathrm{G}_n} z^n$$

dont le maximum du module majore celui de $f(z)$ et celui de la série $\Sigma \mathrm{A}_n z^n$, et qui possède, pour chaque valeur de r, un terme maximum de même valeur et de même rang que ces deux séries; nous appellerons r_n *rapport rectifié* de A_{n+1} à A_n. Nous désignerons par $n(x)$ le rang du terme maximum pour $|z| = x$ (ou, plus exactement, le rang du terme maximum de plus haut rang); $n(x)$ est déterminé par les inégalités

$$r_{n'+1}x < 1 \leqq r_{n'}x, \qquad n' = n(x);$$

et l'on voit immédiatement que l'on a

$$\log m(r) = \int_0^r n(x)\frac{dx}{x}. \tag{8}$$

2. On a évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(r) &< \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{G_n} r^n \\ &< m(r)\left[n_1 + \sum_{p=0}^{p=\infty} r_{n_1} r_{n_1+1} \ldots r_{n_1+p}\, r^p\right] \\ &< m(r)\left[n_1 + \sum_0^\infty (r r_{n_1})^p\right] \end{aligned}$$

sous la seule condition que rr_{n_1} soit plus petit que *un*, ce qui exige que n_1 soit supérieur à $n(r)$. Nous obtenons donc l'inégalité

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\left[n_1 + \frac{1}{1 - r r_{n_1}}\right] \qquad (r r_{n_1} < 1).$$

La quantité entre crochets est supérieure à $\frac{1}{1-r}$, ce qui est bien conforme à la nature des choses; d'ailleurs, dans le cas qui nous occupera et où l'on aura l'égalité (5), n_1 sera, tout au moins pour certaines valeurs de r, supérieur à $\frac{1}{1-r}$. Nous écrirons l'inégalité obtenue ci-dessus sous une autre forme, soit r' un nombre supérieur à r; pour

$$n_1 = n(r') + 1,$$

on aura

$$r_{n_1} < \frac{1}{r'};$$

donc

$$\mathrm{M}(r) < m(r)\left[n(r') + 1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}}\right] \qquad (r < r' < 1). \tag{9}$$

C'est cette inégalité que nous emploierons en prenant pour r' une fonction de r convenablement choisie.

3. Nous examinerons rapidement le cas où l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{g_n}{\log n} = \mathrm{E}; \tag{10}$$

les points B_n sont à partir d'une valeur $n_0(\varepsilon)$ de n au-dessous de la courbe

$$y = (\mathrm{E} + \varepsilon) \log x,$$

dont la concavité est tournée vers le bas; le polygone π se trouve donc à partir de l'un de ses sommets au-dessous de cette courbe, et cela si petit que soit ε; on a donc, puisque $g_n \leqq \mathrm{G}_n$,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\mathrm{G}_n}{\log n} = \mathrm{E}. \tag{10'}$$

Inversement (10') entraîne l'égalité (10). De l'égalité (10') on tire, en remplaçant G_n par $n \log r_n$ qui est inférieur,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} (r_n - 1) \frac{n}{\log n} \leqq \mathrm{E},$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{n(r)(1-r)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \mathrm{E}.$$

La formule (9), dans laquelle on prendra $r' = r + \dfrac{1-r}{\log_2 \frac{1}{1-r}}$, donnera l'inégalité

$$\mathrm{M}(r) < m(r) \frac{\mathrm{E}[1 + \varepsilon(r)] \log \frac{1}{1-r}}{1-r}, \tag{11}$$

qui est la plus précise que l'on puisse obtenir lorsqu'on fait la seule hypothèse (10). En effet, prenons les sommets du polygone π sur la courbe $y = \mathrm{E} \log x$, ces sommets correspondant à une suite de valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ de n liées par la relation

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log n_{p+1}}{\log n_p} = \infty;$$

si l'on prend alors

$$g_n = \mathrm{G}_n,$$

on aura

$$\mathrm{M}(r) > m(r) \frac{\mathrm{E}[1 - \varepsilon(p)] \log \frac{1}{1-r}}{1-r}, \qquad r = \frac{1}{r_{n_p}}.$$

Mais, d'autre part, si, le polygone π étant le même que dans le cas particulier précédent, on prend $g_n = 0$, sauf pour les sommets, on verra bien facilement que l'on aura

$$M(r) = hm(r),$$

h restant fini lorsque r tend vers *un*; comme $m(r)$ est inférieur à $(1+\varepsilon)\left[\dfrac{E}{e(1-r)}\right]^{E}$, on voit que l'ordre de grandeur de $M(r)$ par rapport à $m(r)$ est mal déterminé et dépend non seulement de la fonction $m(r)$, mais de tous les coefficients a_n. Ce n'est donc qu'en faisant des hypothèses sur la forme du polygone π ou, ce qui revient au même, sur la croissance de $m(r)$, que l'on pourrait arriver à une inégalité plus précise que (11).

Les difficultés seraient encore plus grandes si l'on supposait que E fût nul; nous laisserons ces cas de côté et supposerons dorénavant que les conditions équivalentes

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{g_n}{\log n} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{G_n}{\log n} = \infty, \qquad \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log M(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \infty$$

sont réalisées.

4. Nous supposerons d'abord que l'on ait

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g_n}{\log n} = D \qquad (0 < D < 1). \tag{12}$$

On montrera comme plus haut que cette condition est équivalente à

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log G_n}{\log n} = D; \tag{12'}$$

en remplaçant dans (12') G_n par $n \log r_n$, qui est inférieur, on voit que l'on aura

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log_2 r_n}{\log n} = D' \leqq D - 1$$

et en passant de nouveau de r_n à G_n on voit que $D' = D - 1$; (12') entraîne donc l'égalité

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log_2 r_n}{\log n} = D - 1. \tag{13}$$

L'égalité (13) s'écrit aussi sous la forme

$$n(x) \leqq (1-x)^{-\frac{1+\varepsilon(x)}{1-D}}$$

et par suite, en prenant dans l'inégalité (9)

$$r' = r + \lambda(1-r) \qquad (\lambda > 1),$$

on aura l'inégalité

$$\text{(14)} \qquad M(r) < m(r)(1-r)^{-\frac{1+\varepsilon(r)}{1-D}}.$$

On montrera comme plus haut que l'inégalité (14) est la plus précise que l'on puisse obtenir lorsqu'on fait la seule hypothèse (12), c'est-à-dire qu'il existe des fonctions dont les coefficients vérifient l'égalité (12) et pour lesquelles on a

$$M(r) > m(r)(1-r)^{-\frac{1-\varepsilon(r)}{1-D}}$$

pour une infinité de valeurs de r tendant vers *un*.

L'inégalité (14) est analogue à celle que l'on obtient dans le cas des fonctions entières d'ordre fini; on a d'ailleurs, évidemment,

$$\text{(15')} \qquad \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 m(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{D}{1-D}$$

et, par suite, l'égalité

$$\text{(15)} \qquad \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \frac{D}{1-D}$$

qui, réciproquement, entraîne l'égalité (12), comme on le voit par un calcul facile. Les fonctions que nous considérons sont donc celles pour lesquelles $M(r)$ est majoré par le module maximum d'une fonction entière d'ordre fini (et ne peut l'être par le maximum du module d'une fonction entière d'ordre nul). Pour ces fonctions on a l'inégalité (14), d'où l'on déduit, au moyen de (15'), l'inégalité

$$M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{1+\varepsilon(r)}{D}},$$

valable pour une infinité de valeurs de r ayant pour limite *un*; mais l'inégalité (14) ne conduit plus à l'égalité (3) comme dans le cas des fonctions entières, puisqu'il n'est pas certain que l'on ait

$$\text{(16)} \qquad \lim_{r=1} \frac{\log m(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty.$$

On peut d'ailleurs construire effectivement des fonctions pour lesquelles l'égalité (3) n'est pas vérifiée; construisons, par exemple, le polygone π de la façon suivante : traçons la courbe (C)

$$y = x^{\alpha} \qquad (\alpha < 1)$$

et la courbe (C′)

$$y = \beta \log x;$$

prenons B_1 sur (C) et menons par ce point la tangente à (C′) ayant un coefficient angulaire positif; ce sera le second côté de π, le second sommet situé sur ce côté étant le premier point B_{n_2} situé au-dessus ou sur (C). Par B_{n_2} nous menons la deuxième tangente à (C′); ce sera le troisième côté de π, le second sommet situé sur ce côté étant le premier point B_{n_3} situé au-dessus de (C), et ainsi de suite. On voit alors immédiatement que l'on a

$$m(r) = \frac{1}{(1-r)^{\beta+\eta(r)}}, \qquad r = r_{n_p}, \qquad |\eta(r)| = \varepsilon(r),$$

et

$$m(r) = e^{\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\eta(r)}}}, \qquad r = e^{-\alpha_{n_p}}, \qquad |\eta(r)| = \varepsilon(r),$$

α_{n_p} étant le coefficient angulaire d'une tangente à (C) menée par B_{n_p}. Les valeurs $e^{-\alpha_{n_p}}$ sont donc parmi celles donnant lieu à l'égalité (15), tandis qu'un calcul facile montre que, si l'on prend $g_n = G_n$, on a, pour $r = r_{n_p}$,

$$M(r) = m(r) \frac{1}{(1-r)^{\frac{1+\eta(r)}{1-\alpha}}}$$

et, par suite,

$$M(r) = [m(r)]^{1+\frac{1-\alpha}{\beta}[1+\eta(r)]}, \qquad |\eta(r)| = \varepsilon(r).$$

On voit également que si l'on prend $g_n = 0$, sauf pour les valeurs n_p, on aura

$$M(r) = h\, m(r),$$

h restant fini. Ainsi, lorsque l'égalité (16) n'est pas réalisée, la correspondance entre $M(r)$ et $m(r)$ peut être compliquée et dépendre d'autres éléments que de ceux qui déterminent $m(r)$. La condition (16) est d'ailleurs une condition nécessaire pour que l'égalité (3) ait lieu pour toutes les séries entières ayant $m(r)$ pour terme maximum, car il est bien évident que, si l'on prend $g_n = G_n$, on aura pour toute valeur de r

$$M(r) > m(r)\frac{1}{1-r}$$

et, par suite, l'égalité (3) ne peut avoir lieu que si (16) n'est pas réalisée. Dans le cas actuel, cette condition nécessaire est suffisante; elle entraîne l'égalité (6), qui exige que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{G_n}{\log n} = \infty. \tag{17}$$

Réciproquement, cette égalité (17) entraîne l'égalité (16) et, par suite, l'égalité (3).

5. Pour les fonctions satisfaisant aux conditions (17) et (12) ou (6) et (15), la relation entre $M(r)$ et $\mathfrak{m}(r)$, c'est-à-dire entre $M(r)$ et la fonction $n(r)$, est la même que dans le cas des fonctions entières; on a

$$\log M(r) \sim \log m(r) \sim \int_0^r n(x)\,dx; \tag{8'}$$

on pourra donc résoudre les mêmes problèmes, et en particulier le problème qui consiste à déduire d'une valeur approchée de $\log M(r)$ les propriétés des coefficients a_n. Cherchons, par exemple, les conditions pour que l'on ait

$$\log M(r) \sim A \frac{1}{(1-r)^k}; \tag{18}$$

on aura, d'après (8'),

$$\left.\begin{aligned} n(r')(r-r') &\leqq \frac{A+\varepsilon}{(1-r)^k} - \frac{A-\varepsilon}{(1-r')^k} \\ n(r)(r-r') &\geqq \frac{A-\varepsilon}{(1-r)^k} - \frac{A+\varepsilon}{(1-r')^k} \end{aligned}\right\} \quad (r'<r,\ \varepsilon>0).$$

La première de ces inégalités donne

$$n(r') \leqq \frac{(A+\varepsilon)k}{(1-r'')^{k+1}} - \frac{2\varepsilon}{(r-r')(1-r')^k} \qquad (r'<r''<r);$$

en prenant

$$r' = r - \sqrt{\varepsilon}(1-r),$$

on aura

$$n(r') \leqq \frac{(A+\varepsilon')k}{(1-r')^{k+1}}, \qquad \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 1.$$

En opérant de même avec la deuxième inégalité, on aura

$$n(r) \sim \frac{Ak}{(1-r)^{k+1}}$$

ou encore

$$n \sim \frac{Ak}{(r_n-1)^{k+1}};$$

il résulte de cette égalité que l'on aura

$$r_{n(1+\varepsilon)} > r_n$$

quelque petit que soit ε, pourvu que n soit assez grand; on a donc

$$g_n = G_n$$

pour une suite de valeurs de n : $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telles que

$$\lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1.$$

On a, d'autre part,

$$G_n = \frac{A + \eta}{(1-r)^k} - n \log r, \qquad |\eta| = \varepsilon(r),$$
$$n = \frac{Ak + \eta'}{(1-r)^{k+1}}, \qquad |\eta'| = \varepsilon(r),$$

ce qui donne

$$G_n \sim (1+k) A^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}},$$

condition qui entraîne, d'ailleurs, l'égalité (18). On obtient ainsi le résultat suivant : *la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'égalité* (18) *est que*

$$\log A_n < (1+\varepsilon)(1+k) A^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}}, \qquad n > n_0(\varepsilon);$$

$$\log A_{n_p} > (1-\varepsilon_p)(1+k) A^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{n_p}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}}, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1, \qquad \lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0.$$

6. Lorsque les coefficients a_n satisfont à la condition (4) et à l'égalité

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g_n}{\log n} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log G_n}{\log n} = 0,$$

la formule (9) conduira à l'inégalité

$$M(r) < m(r)(1-r)^{-[1+\varepsilon(r)]},$$

qui est évidemment la plus précise que l'on puisse obtenir.

Les fonctions de cette catégorie ont une croissance en quelque sorte comparable à celle d'une fonction entière d'ordre nul pour laquelle $\frac{1}{1-r}$ serait le module de la variable, les restrictions étant les mêmes qu'au n° 4. Lorsque l'égalité (17) est réalisée, on aura l'égalité (3) pour toutes les fonctions pour lesquelles les nombres G_n auront la même valeur; les calculs pourront se faire comme dans la théorie des fonctions entières.

7. Pour toutes les fonctions pour lesquelles on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{G_n}{\log n} = \infty, \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g_n}{\log n} = D_1 \qquad (D_1 \geqq 0),$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\lim_{r=1} \frac{\log M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty, \qquad \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = E_1 \qquad \left(E_1 = \frac{D_1}{1-D_1}\right),$$

la relation entre $M(r)$ et la fonction $n(x)$ est donnée par la formule

$$\log M(r) \sim \int_0^r n(x)\, dx.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{1-r} = X, \qquad \log M(r) = U(X), \qquad n(r) = N(X),$$

on aura la nouvelle égalité asymptotique

$$U(X) \sim \int_{X_0}^{X} N(x) \frac{dx}{x^2} \tag{19}$$

qui est plus générale que celle que l'on obtient dans le cas des fonctions entières d'une variable de module X. L'égalité (19) peut servir à chercher des fonctions pour lesquelles le module maximum est une fonction simple du rang du terme maximum et de X. Dans le cas considéré au n° 5, on a

$$U(X) \sim \frac{N(X) \log X}{X \log \frac{N(X)}{X}}; \tag{20}$$

nous allons chercher, d'une façon générale, à quelles conditions la relation (20) est réalisée; on obtiendra ainsi des séries entières pour lesquelles *la correspondance d'ordre zéro* [1] *entre* $M(r)$ *et* $n(r)$ *est parfaitement régulière.* En posant

$$V(X) = \int_{X_0}^{X} N(x) \frac{dx}{x^2}$$

[1] J'emploie ici la terminologie que j'ai adoptée dans le travail cité plus haut.

et en désignant par $V'(X)$ la dérivée ou la dérivée à droite ou à gauche de $V(X)$, on aura

$$V \sim \frac{V'X \log X}{\log(V'X)},$$

d'où l'on déduit, puisque $\frac{V}{\log X}$ devient infini,

$$V'X \sim \frac{V}{\log X} \log\left(\frac{V}{\log X}\right);$$

cette dernière égalité montre que

$$\lim_{X=\infty} \frac{\log V}{\log_2 X} = \infty$$

et peut, par suite, s'écrire

$$V'X \sim \frac{V \log V}{\log X}.$$

On arrive ainsi aux résultats suivants :

1° *L'égalité* (20) *est équivalente à*

$$N(X) \sim \frac{U(X) X \log U(X)}{\log X}; \tag{21}$$

2° *Une condition nécessaire pour que l'égalité* (21) *ait lieu est que* $U(X)$ *soit asymptotiquement égale à une fonction* $W(X)$ *vérifiant les inégalités*

$$\left(\frac{\log X'}{\log X}\right)^{1-\varepsilon} < \frac{\log W(X')}{\log W(X)} < \left(\frac{\log X'}{\log X}\right)^{1+\varepsilon} \qquad [X' > X > X_0(\varepsilon)], \tag{22}$$

où ε *est aussi petit que l'on veut.*

On vérifiera aisément que cette condition est suffisante; les calculs sont semblables à ceux que l'on fait dans la théorie des fonctions entières. On voit, en particulier, que les conditions (22) sont remplies lorsque $W(X)$ est dérivable et que l'on a

$$W'X \log X \sim W \log W;$$

on voit également que ces conditions (22) exigent que l'on ait

$$\lim_{X=\infty} \frac{\log_2 U(X)}{\log_2 X} = 1.$$

Les conditions relatives à la fonction $N(X)$ et aux coefficients A_n

s'obtiendront également comme dans le Mémoire cité; les formules seront les généralisations de celles trouvées au n° 5.

8. Les fonctions qui vérifient les conditions indiquées au début du n° 7 ont une dérivée dont le maximum du module $M_1(r)$ est de l'ordre de $M(r)$ en ce sens que

$$\lim_{r=1} \frac{\log M_1(r)}{\log M(r)} = 1. \tag{23}$$

En effet, si l'on pose

$$g'_n = g_{n+1} + \log(n+1),$$

on voit que l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g'_n}{\log n} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g_n}{\log n} = D_1.$$

Par suite, $m_1(r)$ étant le terme maximum de la dérivée, on aura

$$M_1(r) < m_1(r)(1-r)^{-\frac{1+\varepsilon(r)}{1-D_1}},$$

et comme

$$m_1(r) = n_1(r) a_{n_1(r)} r^{n_1(r)-1} \leqq n_1(r) m(r) \frac{1}{r}$$

[$n_1(r)$ désignant le rang du terme maximum de la dérivée], on obtiendra l'inégalité

$$M_1(r) < M(r)(1-r)^{-\frac{2+\varepsilon(r)}{1-D_1}} \tag{24}$$

qui démontre la propriété énoncée, puisque l'on a évidemment

$$M_1(r) > M(r).$$

La relation (24) est d'ailleurs applicable à toutes les fonctions pour lesquelles on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g_n}{\log n} = D_1,$$

ce qui montre que l'on a pour toutes ces fonctions

$$\underline{\lim_{r=1}} \frac{\log M_1(r)}{\log M(r)} = 1;$$

mais l'égalité (23) peut n'être pas réalisée, c'est ce qui a lieu pour les fonctions particulières considérées au n° 4.

9. Nous considérerons maintenant les fonctions pour lesquelles les nombres

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log g_n}{\log n}, \qquad \overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 M(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

sont infinis, c'est-à-dire les fonctions dont le module maximum ne peut être majoré que par le module maximum d'une fonction entière d'ordre infini de $z\left(|z| = \frac{1}{1-r}\right)$. Nous obtiendrons pour ces fonctions le même résultat que pour les fonctions entières en faisant une hypothèse destinée à simplifier l'inégalité (9) et à la rendre analogue à celle que l'on trouve dans la théorie des fonctions entières. Nous supposerons que l'on ait

$$(25) \qquad \lim_{x=1} \frac{\log n(x)}{\log \frac{1}{1-x}} = \infty$$

et nous prendrons dans l'inégalité (9)

$$r' = r + \frac{1}{n(r)},$$

ce qui est possible à partir d'une certaine valeur r_0 de r; nous aurons alors

$$(26) \qquad M(r) < 2m(r)\left\{ n\left[r + \frac{1}{n(r)}\right] + 1\right\},$$

$$\log m(r) \sim \int_0^r n(x)\,dx.$$

Soit r un nombre plus petit que un, on a

$$\int_0^r n(x)\,dx > n\left(r - \frac{1}{[n(r)]^\alpha}\right) \frac{1}{[n(r)]^\alpha};$$

soit, d'autre part, un nombre $\beta\,(\beta < 1)$; les propriétés des fonctions croissantes mises en évidence par M. Borel montrent que l'on a

$$n\left(r - \frac{1}{[n(r)]^\alpha}\right) > \left[n\left(r + \frac{1}{[n(r)]^\alpha}\right)\right]^{1-\beta},$$

sauf peut-être dans un ensemble dénombrable d'intervalles dont la longueur totale pour $r_0 < r < 1$ est au plus égale à

$$\frac{k(\alpha, \beta)}{[n(r_0)]^\alpha},$$

$$k(\alpha, \beta) = 1 + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{[n(r_0)]^{\alpha(1+\beta)^p}}.$$

A l'extérieur des intervalles d'exclusion, on aura

$$\mathrm{M}(r) < 3\, m(r) [\log m(r)]^{\frac{1}{1-\beta-\alpha}},$$

et comme on peut prendre pour α et β des nombres tendant vers zéro avec $1 - r_0$, mais assez lentement pour que le produit

$$\frac{k(\alpha, \beta)}{[n(r_0)]^\alpha} \frac{1}{1 - r_0}$$

tende vers zéro, on obtient le résultat suivant :

Lorsque l'égalité (25) *est réalisée*, $\mathrm{M}(r)$ *vérifie la relation*

$$\mathrm{M}(r) < m(r) [\log m(r)]^{1+\varepsilon(r)} \tag{7}$$

à l'extérieur d'un ensemble dénombrable d'intervalles dont la longueur pour $r > r_0$ *est infiniment petite par rapport à* $1 - r_0$ [1].

On voit que l'hypothèse (25) entraîne l'égalité

$$\lim_{r=1} \frac{\log_2 \mathrm{M}(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty; \tag{27}$$

réciproquement, de l'égalité (27) on déduit (25); en effet, si (25) n'a pas lieu, il existe un nombre A et une suite infinie de valeurs de x tendant vers *un* pour lesquelles on a

$$n(x) < \frac{1}{(1-x)^{\mathrm{A}}};$$

---

[1] Pour les fonctions entières, l'hypothèse (25) n'est pas utile puisque l'inégalité correspondant à la formule (9) est de la forme (26); on a alors un résultat valable pour toutes les fonctions; l'inégalité (7) a lieu, sauf dans des intervalles à l'intérieur desquels $\log r$ varie pour $r > r_0$ de moins de $\frac{k}{[n(r_0)]^{\varepsilon(r_0)}}$, $\varepsilon(r_0)$ tendant vers zéro lorsque r_0 croît indéfiniment.

soit x' une de ces valeurs de x; en prenant dans l'inégalité (9)

$$r' = x' \qquad \text{et} \qquad r = x' - (1 - x')^2,$$

on aura

$$\log M(r) < \frac{1+\varepsilon(r)}{(1-r)^A}$$

et par suite l'égalité (27) ne sera pas vérifiée.

Relativement aux coefficients, la condition (27) est évidemment équivalente à la condition

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log G_n}{\log n} = 1$$

qui entraîne par suite l'égalité (7) dans les conditions indiquées ci-dessus. Il semble difficile de voir si la condition (25) [ou (27) ou (28)] est nécessaire pour que l'inégalité (7) ait lieu dans les conditions indiquées; il est d'ailleurs probable que, dans l'inégalité (7), l'exposant $1 + \varepsilon(r)$ peut être remplacé par $\frac{1+\varepsilon(r)}{2}$.

10. Lorsque l'égalité (25) n'est pas réalisée, on a toutefois

$$\overline{\lim_{x=1}} \frac{\log n(x)}{\log \frac{1}{1-x}} = \infty;$$

soit alors un nombre r_0 pour lequel on a

$$n(r_0) > \frac{1}{(1-r_0)^A} \qquad (A > 1);$$

dans l'intervalle r_0, $1 - (1 - r_0)^A$, on pourra encore prendre

$$r' = r + \frac{1}{n(r)}$$

et l'on aura

$$M(r) < 3m(r)[\log m(r)]^{1-\alpha-\beta},$$

sauf dans des intervalles de longueur totale inférieure à

$$\frac{k(\alpha, \beta)}{n(r_0)^\alpha}.$$

Comme A peut être pris aussi grand que l'on veut, α et β pourront être pris aussi voisins de zéro que l'on voudra et l'on a encore l'égalité (7), mais dans des conditions moins larges : il peut exister une suite infinie de nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ tendant vers *un* et tels que, dans une fraction finie de l'intervalle r_p, 1, on ait

$$M(r) > m(r)[\log m(r)]^k \qquad (k > 1)$$

ou même

$$M(r) \gtrless [m(r)]^{1+k'}.$$

Pour obtenir un exemple de ce dernier cas, on pourra prendre $g_n = G_n$ et définir les nombres G_n de la façon suivante : traçons les courbes (C) et (C′)

(C) $$y = k \log x,$$

(C′) $$y = \frac{x}{\log x},$$

et prenons les points B_n sur (C) pour $n = 1, 2, \ldots, n_0$; puis sur la tangente à (C) au point B_{n_0} jusqu'à ce qu'on obtienne un point B_{n_1} au-dessus de (C′). Par B_{n_1} nous menons la deuxième tangente à la courbe (C) et prenons sur elle les points $B_{n_1+1}, \ldots$ jusqu'à B_{n_2}, point dont l'abscisse est inférieure à celle du point de contact de moins d'une unité; nous prenons ensuite $B_{n_2+1}, \ldots$ sur (C) jusqu'à un point B_{n_3} en lequel la tangente aît un coefficient angulaire inférieur ou égal à la moitié de celui de la droite $B_{n_1}B_{n_2}$. A partir de B_{n_3} nous procédons comme nous l'avons fait en partant de B_1, et ainsi de suite. On voit alors immédiatement que l'on se trouve dans le deuxième des cas d'exceptions signalés.

11. Il est clair que, dans les cas les plus simples, l'inégalité (7) doit avoir lieu sans restrictions, et *a fortiori* l'égalité (3); on peut d'ailleurs indiquer des conditions qui entraînent sinon l'inégalité (7), mais au moins l'égalité (3); c'est ce qui a lieu lorsqu'il existe un nombre entier k fini et plus grand que *un* et tel que

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_{k+1} M(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = F \qquad (F \geqq 0)$$

et

$$\underline{\lim_{r=1}} \frac{\log_k M(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} > F.$$

Les conditions relatives aux nombres G_n s'obtiennent facilement.

12. En terminant, je montrerai que l'approximation obtenue au moyen de l'inégalité (9) est, à un facteur fini près, la même que celle que donne la méthode employée par M. Hadamard [1].

La méthode de M. Hadamard découle de la propriété suivante : Si l'on pose

$$\varphi(r)=\sum_0^\infty A_n r^n,$$

$$\psi(X)=\log\varphi(r) \qquad (X=\log r),$$

la courbe

$$y=\psi(X) \qquad (-\infty<X<0)$$

tourne sa concavité vers le haut. En effet,

$$\frac{d^2y}{dX^2}=\frac{r}{[\varphi(r)]^2}\{\varphi(r)[\varphi''(r)r+\varphi'(r)]-r[\varphi'(r)]^2\}$$

$$=\frac{r}{[\varphi(r)]^2}\sum_0^\infty \alpha_n r^n$$

et l'on a

$$\alpha_0=A_0A_1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_n=\sum A_i A_{n-i+1}(n-2i+1)^2 \qquad (i=0,1,\dots,p_n),$$

où p_n est la partie entière de $\frac{n+1}{2}$: la propriété énoncée est ainsi établie. Or, nous avons

$$\psi(X)>\log m(r)=\mu(X),$$

la courbe $y=\mu(X)$ est un polygone de Newton π' de sommets $B'_0B'_1\dots B'_n\dots$, l'équation du côté $B'_{n-1}B'_n$ étant $y=nX+G_n$. Soit X_n l'abscisse de B'_n, on a pour $X<X_n$

$$\varphi(e^X)=e^{\mu(X_n)}\sum_{p=0}^{p=\infty}e^{p(X-X_n)+G_p-G_n+(p-n)X_n},$$

et comme l'on a

$$G_p-G_n+(p-n)X_n\leqq 0,$$

on obtient l'inégalité

$$\psi(X)<\psi(X_n)+\chi(X-X_n),$$

$$\chi(u)=\log\frac{1}{1-e^u}.$$

---

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, p. 186.

La courbe $y = \psi(X)$ est donc au-dessous des courbes C_n,

$$y - y_n = \chi(X - X_n)$$

et par suite, à cause de la direction de sa concavité, au-dessous du contour π'' formé par les segments de droite $D_0 D'_0, \ldots, D_n D'_n, \ldots$ et par les segments de courbe $D'_0 D_1, \ldots, D'_{n-1} D_n, \ldots$, où D_n désigne le point de la courbe C_n où la tangente est parallèle à $B'_n B'_{n+1}$, D'_{n-1} le point de C_n où la tangente est parallèle à $B'_{n-1} B'_n$. De même la courbe

$$y = \log M(e^X)$$

reste comprise entre π' et π'', de sorte que l'on a

$$M(r) < m(r)\, e^{\nu(r)},$$

$\nu(r)$ étant la différence des ordonnées de π' et π'' pour l'abscisse $X = \log r$. Nous allons montrer que l'on a

$$e^{\nu(r)} = \left[n(r') + \frac{1}{r' - r} \right] h \qquad (r' > r);$$

r' étant convenablement choisi, et h étant fini. En effet, soit $\log r$ l'abscisse du sommet de π' pour lequel il existe une tangente à π' parallèle à la tangente à π'' au point d'abscisse $X = \log r$, on aura

$$\chi(\log r - \log r') < \nu(r) < \chi(\log r - \log r') + 1 + \varepsilon(r),$$

c'est-à-dire

$$e^{\nu(r)} = h \frac{1}{r' - r}, \qquad 1 - \varepsilon(r) < h < e[1 + \varepsilon(r)];$$

d'autre part, on a

$$\chi'(u) \sim \frac{1}{u},$$

donc

$$n(r' - 0) < \frac{1 + \varepsilon(r)}{r' - r}$$

et la propriété indiquée est par suite démontrée.