

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. HEEGAARD

Sur l'« Analysis situs »

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 161-242

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__161_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__161_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L' « ANALYSIS SITUS ».

PAR M. PAUL HEEGAARD.

« Les recherches de Poincaré sur l'*Analysis situs* sont encore peu connues bien qu'elles constituent l'une des parties les plus profondes de son Oeuvre mathématique. C'est pour aider à les faire connaître davantage et comprendre mieux que le Conseil de la Société mathématique a décidé la traduction et la publication du Mémoire de M. Heegaard.

» Ce Mémoire est intéressant à plus d'un titre. Qu'on s'occupe d'histoire et de critique des mathématiques ou qu'on s'intéresse aux faits mathématiques eux-mêmes on trouvera profit à le lire ; on y goûtera spécialement cette sorte de géométrie cotée qui permet à M. Heegaard de décrire de façon si imagée les variétés de l'espace à quatre dimensions. Mais ce qui a décidé le Conseil de la Société mathématique à publier le travail de M. Heegaard, c'est qu'il a servi à la pensée de Poincaré.

» Au cours de l'étude faite par M. Heegaard des différents travaux sur l'*Analysis situs*, le premier Mémoire de Poincaré est très soigneusement analysé. M. Heegaard y découvre diverses incorrections ou lacunes. Sa principale critique porte sur ce théorème fameux que les nombres de Betti équidistants des extrêmes sont égaux. M. Heegaard trouve la démonstration de Poincaré insuffisante ; il estime d'ailleurs que le théorème est faux. Poincaré reconnaît que sa démonstration est incomplète, mais il croit à l'exactitude du théorème.

» Une telle divergence d'opinion ne peut provenir que d'un malentendu ; en effet, la définition des nombres de Betti n'est pas la même pour Poincaré et pour M. Heegaard. C'est pour mettre clairement cela en évidence et pour établir le théorème en litige, au moins pour les variétés à trois dimensions, que Poincaré a écrit le premier supplément à l'*Analysis situs*.

» Quand, après avoir lu les explications de Poincaré, on se reporte à son premier Mémoire, tout apparaît clairement. Le

malentendu provient de la définition des homologies, antérieure à celles des nombres de Betti. Quand Poincaré écrit : « Les homologies peuvent se combiner comme les équations ordinaires », en réalité, il précise ou plutôt il étend le sens de la définition des homologies qu'il vient de formuler quelques lignes auparavant. Si l'on n'entendait pas la définition des homologies comme le fait Poincaré, bien des points de son Mémoire deviendraient incompréhensibles.

» La pensée de Poincaré n'a donc pas varié, et cependant il semble bien, quand on étudie la démonstration insuffisante qu'il a donnée, que c'est la critique de M. Heegaard qui l'a conduit à préciser nettement cette pensée, pour lui-même.

» Cela suffit à justifier la publication que nous faisons ici; mais, en un moment où les nations sont particulièrement jalouses de la renommée de leurs savants, est-il opportun de répandre le Mémoire de M. Heegaard? Poincaré n'a jamais soigné sa popularité mathématique; il a toujours cru devoir s'attaquer à des questions nouvelles, plutôt que de s'attarder à donner à ses travaux une forme parfaite et définitive; il n'essaie pas de cacher ses succès. Il a, par exemple, laissé à ses élèves le soin de publier ses admirables cours de Physique mathématique : « Il revoyait, sans doute, les épreuves de ces publications », écrit Darboux. Par exemple encore, le dernier Mémoire qu'il a publié était relatif à une question qu'il n'avait pu résoudre.

» La Société mathématique a estimé qu'elle restait fidèle à la ligne de conduite de Poincaré quand elle a publié le travail de M. Birckhoff sur le dernier théorème de Poincaré et c'est dans le même esprit qu'elle fait paraître aujourd'hui une traduction du Mémoire de M. Heegaard.

» Étudier dans tous leurs détails et prolonger les travaux de Poincaré, c'est la meilleure glorification de son Œuvre et la seule qu'il eût désirée. Peu importe qu'en étudiant les Mémoires de Poincaré sur l'*Analysis situs* nous découvrons des erreurs et des lacunes, nous savons bien que nous rencontrerons aussi des marques nombreuses de son génie.

» Le lecteur est déjà prévenu qu'il ne doit pas accepter toutes les critiques de M. Heegaard; il est nécessaire d'ajouter que la forme un peu tranchante de ces critiques peut les faire inter-

préter dans un sens plus absolu que, sans doute, ne le voudrait l'auteur. Il ne faudrait pas croire, par exemple, que la valeur des travaux sur les fonctions algébriques de plusieurs variables soit diminuée à cause des reproches que leur adresse M. Heegaard. En effet, il importe de tenir compte des Mémoires ultérieurs de Poincaré, et d'ailleurs, les auteurs auxquels sont dus les progrès les plus essentiels dans l'étude de ces fonctions ont donné à leurs travaux une base exclusivement analytique.

» C'est ainsi que si, dans son Traité, M. Picard a exposé aussi le mode d'attaque des fonctions de deux variables que fournit l'*Analysis situs*, celle-ci cependant ne joue en réalité aucun rôle dans ses travaux. On y rencontre bien le langage topologique, mais pour sa signification précise il suffit de se reporter au substratum analytique des démonstrations, où, comme on se le rappelle, une équation différentielle linéaire E joue un rôle fondamental. Pour prendre un exemple, les questions de la périodicité des intégrales de différentielles totales et des intégrales doubles sont rattachées par M. Picard à l'équation E et nullement à des problèmes d'*Analysis situs*.

» La traduction du Mémoire de M. Heegaard a été faite par M. Lycke. Avant d'être soumise à l'auteur qui, après l'avoir autorisée, a bien voulu prendre la peine de la corriger, elle a été révisée par un savant des plus compétents sur la matière, M. James Alexander, dont on a pu lire, d'autre part, une exposition concise des principes de la théorie et qui a rendu, en se chargeant de ce travail, un service à la science et un hommage à la mémoire de Poincaré. »

(N. D. L. R.)

INTRODUCTION.

On connaît bien le développement que reçut la théorie des fonctions d'une variable indépendante, lorsqu'on prit en considération les valeurs imaginaires de la variable et qu'on rattacha la théorie à une exposition géométrique des quantités imaginaires.

Pour bâtir une théorie des fonctions de deux variables indépendantes, il serait donc naturel d'essayer une exposition semblable. Si une période aussi longue a passé avant que l'on ait commencé à s'occuper de cette extension naturelle, c'est sans doute, entre autres raisons, parce que les recherches pour deux variables indépendantes sont bien plus difficiles que pour une. La variété des possibilités produit des situations sans analogie dans la théorie d'une variable indépendante. Aussi M. Picard fait-il observer : « On voit, par ce qui précède, les différences profondes qui séparent la théorie des fonctions algébriques d'une variable, de la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. L'analogie, qui souvent est un guide excellent, peut devenir ici bien trompeuse. » Une difficulté pour l'exposition intuitive se trouve aussi, naturellement, dans le fait que les constructions géométriques qui jouent le rôle de surface de Riemann doivent être à quatre dimensions.

Quoique, dans nos recherches, l'analogie puisse nous faire égarer dans les détails, un aperçu général des moyens qu'on a employés dans la théorie d'une variable indépendante donnera cependant un bon plan de travail. Reprenons donc un tel aperçu.

La théorie des fonctions d'une variable indépendante est étroitement liée à celle des courbes algébriques. La géométrie sur une telle courbe aura donc une importance fondamentale.

Les recherches sont exécutées de points de vue très différents. Les plus importantes s'appuient :

I. Sur les théories de l'Algèbre élémentaire :

α. Recherches sur les polynomes adjoints, théorie créée par Brill et Nöther dans leur Mémoire *Ueber die algebraischen Functionen* (*Math. Ann.*, Bd VII, 1873).

β. Les recherches des Italiens sur les groupes linéaires de points. Ils ont essayé de débarrasser la théorie précédente de sa forme projective, de sorte qu'ils la développent indépendamment des notions de degré, classe, etc. ; cf. un compte rendu de MM. Castelnuovo et Enriques [*Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques* (*Math. Ann.*, Bd XLVIII, 1897, p. 242)].

γ. Les recherches de géométrie énumérative, surtout une série de Mémoires de Zeuthen (parexemple, *Math. Ann.*, Bd III et IX).

II. Sur l'étude des fonctions transcendantes attachées à la courbe algébrique.

Ces recherches, qui ont, je crois, pour origine l'ouvrage initiateur de Riemann (1857), sont si généralement connues qu'il n'y a pas lieu de les mentionner de façon plus détaillée.

III. Sur l'étude *topologique* des surfaces de Riemann représentant la courbe algébrique.

α. Ou bien on détermine la connexion de la surface au moyen d'un théorème qui peut être considéré comme une généralisation du théorème d'Euler sur les polyèdres (Riemann, Neumann),

β. Ou bien on *perce* la surface ; et ensuite on la réduit par une déformation continue à une forme normale. A notre connaissance, cette méthode n'a été suivie que par M. Jul. Petersen (*Forelæsninger over Funktionsteori*, Kap. IV). Listing se sert, sans doute, d'un procédé semblable pour former le « diagramme » d'une figure dans l'espace, dans le but d'arriver ainsi à une extension du théorème d'Euler (*Census räumlicher Complexe*, 1862) et, d'une manière générale, Betti (1871) emploie des considérations analogues pour rechercher les nombres de connexion des espaces à n dimensions ; mais les deux Mémoires semblent avoir passé long-

temps inaperçus. Cette méthode donne un exposé très clair des circonstances traitées.

Pour la théorie des fonctions de deux variables, les transformations des surfaces algébriques jouent un rôle analogue. Il existe déjà un certain nombre d'ouvrages — principalement de date très récente — dans lesquels la chose est traitée en partant de points de vue semblables à ceux que nous venons d'énumérer.

I. RECHERCHES D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE. — α . *Polynômes adjoints*. — Cette théorie date de Clebsch (*Comptes rendus*, déc. 1868) et Nöther [*Zum eindeutigen Entsprechen...*, I et II (*Math. Ann.*, Bd II, 1869, et Bd VIII, 1874)].

β . *Systèmes linéaires de courbes*. — Les Italiens ont créé une théorie pour les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface, analogue à celle des groupes de points sur une courbe, que nous avons mentionnée tout à l'heure. À l'aide de celle-ci, ils déterminent des « invariants » pour les surfaces (cf. le compte rendu, ci-dessus mentionné, de MM. Castelnuovo et Enriques).

γ . Les transformations des surfaces ont aussi été examinées au point de vue de la géométrie énumérative par Zeuthen [*Études géométriques, etc.* (*Math. Ann.*, Bd IV)].

II. RECHERCHES PAR DES FONCTIONS TRANSCENDANTES. — Déjà dans son Mémoire (*Math. Ann.*, Bd II), Nöther considère des intégrales de la forme.

$$\iint \frac{Q(x, y, z) dx dy}{f'_z}.$$

Picard introduit des intégrales de la forme

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P dx + Q dy,$$

où P et Q satisfont à la condition d'intégrabilité (*Journal de Liouville*, 1885 et 1886). Enfin, M. Picard donne un exposé complet de toute cette théorie dans son Mémoire couronné : *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 4^e série, vol. V, 1889) et dans un Livre récemment paru sur le même sujet (PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions*

algébriques de deux variables indépendantes, 1897). Il faut aussi mentionner le Mémoire de Poincaré [*Sur les résidus, etc.* (*Acta mathematica*, vol. IX, 1887)].

III. RECHERCHES TOPOLOGIQUES. — Ici, on trouve peu de chose. Un certain nombre de points sont abordés dans les Ouvrages de M. Picard, sans que rien soit entièrement développé, puisque l'auteur préfère partout l'exposition analytique. La difficulté consiste en ce que la théorie de Riemann et Betti pour les nombres de connexion est très défectueuse et difficile à utiliser s'il s'agit de variétés à plus de deux dimensions. Poincaré a essayé de la compléter [*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, Cahier I, 1895)] sans que nous pensions qu'il y ait réussi. Plus tard, M. Picard a donné sa contribution; auparavant, M. W. Dyck s'était occupé de la question [*Beiträge zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, Bd XXXII et XXXVII)]; mais nulle part on en trouve une théorie entièrement satisfaisante. Les recherches dans cette direction doivent donc être précédées d'une théorie de la correspondance topologique des variétés dont le nombre de dimensions est supérieur à 2. Ce qu'on a fait de ce côté doit être coordonné à ce qui est mentionné au paragraphe III, α . Il n'existe pas de recherches analogues à celles mentionnées au paragraphe III, β .

Les pages suivantes ne contiennent pas d'ensemble achevé, mais seulement des études : cela tient à la difficulté du sujet. Pour que ces recherches puissent paraître sous leur véritable jour, il conviendra peut-être d'exposer d'abord la série d'idées qui m'a conduit dans mes recherches.

J'avais remarqué, par hasard, que l'on pouvait parvenir au théorème de Zeuthen-Halphen dans la théorie du genre des courbes algébriques (*Math. Ann.*, vol. III; *Bull. de la Soc. math. de France*, vol. V) par un raisonnement purement topologique; car on peut, sur deux surfaces de Riemann entre les points desquelles il existe une (μ, ν) correspondance, construire de nouvelles surfaces de Riemann se correspondant uniformément (point par point). L'équation qui exprime l'égalité entre les nombres de connexion des deux surfaces construites donne alors précisément la théorie mentionnée. Une lumière nouvelle est ainsi projetée sur cette cir-

constance, si importante pour la géométrie énumérative que le théorème de Zeuthen-Halphen peut être appliqué, sans faire de recherches infinitésimales aux points de coïncidence, tandis que ces recherches sont nécessaires pour les autres formules de correspondance (cf. *Acta mathematica*, vol. I, p. 171). Je n'entrerai pas ici dans les détails de cette théorie, d'autant moins que je l'ai trouvée, plus tard, dans un Mémoire de M. Hurwitz (*Math. Ann.*, vol. XXXIX).

Ensuite, j'avais pensé qu'on devrait pouvoir constituer une théorie analogue pour les surfaces algébriques, mais un grand travail était d'abord à faire : il fallait concevoir pour les surfaces algébriques des figures analogues aux surfaces de Riemann pour les courbes ; puis, il fallait déterminer des criteria topologiques pour la correspondance uniforme entre deux d'entre elles. Et, comme il a déjà été dit, les instruments de recherche qui existaient à cette époque étaient ou insuffisants ou defectueux. C'est en essayant de corriger les fautes et de combler les lacunes que le contenu des pages suivantes a pris naissance.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR UNE REPRÉSENTATION INTUITIVE DES POINTS IMAGINAIRES D'UNE SURFACE ALGÈBRIQUE ⁽¹⁾.

I. — REPRÉSENTATION INTUITIVE D'UNE VARIÉTÉ À QUATRE DIMENSIONS.

Pour bien voir la connexion des points d'une courbe algébrique $y = f(x)$, on choisit d'abord une collection doublement infinie de points (plan ou sphère) en correspondance avec les valeurs complexes de la variable indépendante. Sur celle-ci, on construit alors une surface de Riemann, sur laquelle les valeurs de la variable indépendante sont représentées uniformément. Ce qui

⁽¹⁾ Peu après l'impression de l'édition danoise (en 1898), l'auteur s'est rendu compte que les trois premiers paragraphes de cette Partie s'accordent complètement avec un Mémoire de Lie.

caractérise principalement la connexion de la courbe algébrique est alors le nombre de feuillettes et de points de ramification de la surface de Riemann correspondante, ou plutôt le genre dérivé de ces nombres.

Pour examiner d'une façon analogue la connexion d'une surface algébrique $z = f(x, y)$, il faut d'abord former une collection quatre fois infinie d'éléments, auxquels on peut faire correspondre tous les couples de valeurs (x, y) qui s'obtiennent en donnant à x et à y indépendamment toutes les valeurs complexes possibles. En couvrant plusieurs fois cette collection et en introduisant d'une façon convenable des *surfaces de ramification* réunies par des ensembles à trois dimensions le long desquels les différentes *couches* se joignent les unes aux autres, on peut créer une variété à quatre dimensions à l'aide de laquelle la connexion d'une surface algébrique peut être étudiée. Ce qui est d'importance ici pour la connexion de la surface algébrique est surtout le nombre des couches et les qualités des surfaces de ramification. On doit partir de là pour chercher à former des conceptions analogues à celle du genre de courbes algébriques.

Il s'agit maintenant de savoir comment on choisira la variété à quatre dimensions. On pourrait se servir de la collection quadruplement infinie de droites dans l'espace. Ou bien, on choisirait, par exemple, deux plans sur lesquels on représenterait comme d'habitude les valeurs de x et de y respectivement; la ligne réunissant les points (x) et (y) pourrait alors correspondre au couple de valeurs (x, y) en question. Ou bien on utiliserait la représentation par von Standt des points d'un plan imaginaire. Ceci serait une manière très élégante de traiter la question; mais je ne crois pas qu'elle soit possible, du moins au point où en est actuellement la Science.

Cependant, puisque, dans nos recherches, tout dépend de la clarté intuitive des éléments avec lesquels nous travaillons, les procédés ci-dessus mentionnés ont trop d'inconvénients. Car il n'importe pas seulement que l'élément représentant le point (x, y) soit simple, mais aussi que l'ensemble des éléments entourant un élément donné se présente aussi clairement que possible à l'intuition. Or, il me semble presque impossible que l'intuition se fasse une idée exacte et complète de l'ensemble des droites de l'espace

formant l'entourage d'une droite donnée, tandis qu'il est facile de s'imaginer clairement le voisinage d'un point d'une surface ou d'un point de l'espace. Or, nous ne connaissons pas de variété à quatre dimensions pour laquelle un point soit un simple élément. Dans nos recherches, nous userons de la représentation suivante :

Dans un plan horizontal, choisissons deux axes perpendiculaires, X_1 et X_2 , le côté positif de X_1 s'éloignant à notre droite et le côté positif de X_2 s'éloignant devant nous. Sur ce plan, nous représenterons, comme d'ordinaire, les valeurs complexes de $x = x_1 + ix_2$. Maintenant, pour représenter le y_1 et le y_2 entrant dans $y = y_1 + iy_2$, nous considérerons comme éléments non pas les points de l'espace tout simplement, mais ceux-ci investis d'une valeur réelle numérique.

Au point (x) , nous élevons un segment de ligne de longueur y_1 , perpendiculaire au plan $(X_1 X_2)$ (direction positive vers le haut) et nous imaginons le point final désigné par le chiffre y_2 .

Le procédé est semblable à celui qui est employé par l'arpenteur lorsque, sur une carte, il doit représenter et étudier les points de l'espace : ceux-ci sont remplacés par leurs projections sur le plan du dessin et les projections sont munies d'un chiffre de cote indiquant la hauteur au-dessus ou la profondeur au-dessous du plan ; pour le chiffre de cote 0, nous aurons le plan même du dessin.

Tout l'ensemble d'éléments ou, comme nous dirons, de points, que nous considérons, peut être obtenu si nous pensons d'abord aux points de notre espace ordinaire supposés munis du chiffre de cote 0, et si, ensuite, nous faisons parcourir à tous les chiffres de cote d'abord les valeurs de 0 à $+\infty$, puis celles de 0 à $-\infty$. Nous désignerons cet ensemble par **T**. Par analogie à ce que fait l'arpenteur, nous pouvons alors dire que les points de l'espace à quatre dimensions sont représentés par projection sur l'espace ordinaire ; nous entendons par la projection d'un point, le point obtenu en effaçant son chiffre de cote (ou, plutôt, en le remplaçant par zéro).

Pour plus de commodité, nous emploierons des noms et des désignations dont l'analogie avec quelque chose de connu est facile à voir. L'ensemble des points obtenus en munissant un point ordinaire de l'espace successivement de tous les chiffres de cote de $-\infty$ à $+\infty$ sera dit une droite *perpendiculaire* à notre espace. De façon analogue se définissent un plan perpendiculaire et un

espace plan perpendiculaire à notre espace, à l'aide, respectivement, d'une droite et d'un plan. Si une variété dans **T** est projetée sur notre espace suivant une variété ayant une dimension de moins, mais portant en revanche un nombre infini de chiffres de cote à chaque point, nous l'appelons *pseudo-verticale*. Si, au contraire, le nombre de dimensions n'a pas changé, et si le chiffre de cote est le même partout sur la variété, nous l'appelons *pseudo-horizontale*. Nous dirons que les points à chiffres de cote positifs sont situés *au-dessus* de notre espace; les points à chiffres négatifs, *au-dessous*. On dira que la projection sur notre espace d'une variété quelconque est *la porteuse* de celle-ci.

Nous désignerons dans la suite les variétés à quatre dimensions par des caractères latins gras; celle que nous venons de construire s'appelle **T**. Les espaces ou variétés à trois dimensions seront désignés par des majuscules grecques, notre espace ordinaire par **P**. Les surfaces seront désignées par des minuscules grecques (φ , π), les lignes par des majuscules latines (**L**) et les points par des minuscules latines (*p*).

Une courbe **T** se représente donc tout simplement par sa projection, sa courbe porteuse, en munissant les points de celle-ci de chiffres de cote.

La porteuse d'une surface est d'ordinaire une surface; pour se rendre compte facilement des chiffres de cote de celle-ci, on joint par des courbes les points qui ont même chiffre de cote. La surface cherchée est absolument déterminée par le système de lignes de cote qui couvrent ainsi la surface porteuse.

De même que la projection d'une surface sur un plan couvre, d'ordinaire, plusieurs fois certaines parties du plan et que ces parties sont limitées par des courbes (le contour); ainsi la projection d'un *espace* sur **P** sera, d'ordinaire, un espace couvrant plusieurs fois certaines parties de **P**, et ces parties seront limitées par des surfaces (les surfaces de contour). Les chiffres de cote seront déterminés par des surfaces de cote passant par les points à même chiffre de cote.

Quand on déforme les figures que nous venons de décrire, il faut non seulement observer ce que devient la porteuse, mais aussi examiner les déplacements subis par les chiffres de cote.

Sur la base donnée, on peut aisément définir ce qu'il faut

entendre par une droite, un plan et un espace plan dans **T**, ainsi qu'exposer les qualités descriptives générales de ceux-ci. Une collinéation de l'espace peut être réduite à des projections centrales, etc. Nous ne parlerons point de cela. La géométrie métrique dans **T** pourrait être basée, par exemple, sur une définition de la distance entre deux points

$$d = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (y_1 - \eta_1)^2 + (y_2 - \eta_2)^2}$$

ou en développant la notion de coïncidence avec, pour base, la définition donnée ci-dessous de la rotation autour d'un plan, en réduisant ainsi la question à une question concernant notre espace. Pour exposer la définition de la rotation, dont nous venons de parler, nous définirons d'abord ce qu'il faut entendre par un cercle dans un plan *pseudo-perpendiculaire*. La projection de ce cercle doit être un segment de droite *ab* sur la trace du plan dans P, et les chiffres de cote du segment doivent être déterminés par

$$y_2 = c \pm r \sin \vartheta,$$

où *c* est une constante réelle, $2r = ab$, et $r \cos \vartheta$ la distance du milieu de *ab* au point variable. Le point du milieu ayant le chiffre de cote *c* est appelé le *centre* du cercle, *r* son *rayon*. On fait tourner un point *p* dans P autour d'un plan *pseudo-horizontal* π en faisant décrire au point le cercle *pseudo-vertical* qui le traverse et qui est projeté sur P suivant un segment de droite, dont les points extrêmes sont symétriques par rapport à la projection de π sur P. Pendant la rotation, la projection fait la navette sur une droite dont les extrémités sont symétriques par rapport à la projection du plan de rotation. Le carré de la plus grande distance de cette projection est égal à la somme du carré de la distance à un instant quelconque et du carré du chiffre de cote correspondant. Le point passe alternativement *au-dessus* et *au-dessous* de P.

Un espace plan coupe P suivant un plan; toute figure de cet espace peut donc être rabattue sur P par une rotation autour de la trace.

Maintenant, il n'est plus difficile d'exposer les notions métriques fondamentales, l'angle, la distance, etc.

On voit aussi comment, par rotation, on peut transformer deux

corps symétriques l'un dans l'autre (par exemple, par rotation autour d'un plan de symétrie), et de même comment un point entouré dans P d'une surface fermée peut être amené hors de celle-ci sans passer par la frontière.

II. — LA DROITE.

Notre exposé de la planimétrie analytique a cet avantage, que les résultats intuitifs, auxquels on arrive en s'en tenant aux coordonnées réelles, se trouvent être des cas spéciaux des résultats intuitifs que nous obtenons ici. Car les points à chiffre de cote 0 situés dans le plan X, Y , sont les points réels ordinaires.

Examinons d'abord l'ensemble de points donné par l'équation

$$y = \alpha x.$$

Si l'on met

$$x = x_1 + ix_2,$$

$$y = y_1 + iy_2,$$

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,$$

et si l'on sépare les parties réelles et imaginaires, on a

$$(1) \quad y_1 = \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2,$$

$$(2) \quad y_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1.$$

(1) est l'équation d'une surface porteuse dans un système rectangulaire de coordonnées avec X_1, X_2 et Y_1 pour axes. Elle représente un plan passant par l'origine. Si l'on marque le point $x_1 + ix_2 = \frac{1}{\alpha}$ dans (X_1, X_2) , la droite joignant ce point à l'origine sera perpendiculaire à la trace du plan; la valeur de y , à ce point, est 1. Ainsi la position du plan est facilement déterminée.

(2) détermine les projections des lignes de cote sur le plan (X_1, X_2) , y_2 étant considéré comme paramètre. Ces projections étant perpendiculaires à la trace du plan (1), *les lignes de cote deviennent les lignes de pente du plan.*

La ligne de pente passant par l'origine correspond à $y_2 = 0$; elle contient le point que nous venons de construire, déterminé par

$$x_1 + ix_2 = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha_1 - i\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

D'ailleurs, les chiffres de cote des différentes lignes de pente sont proportionnels à leurs distances à la ligne de cote $y_2 = 0$. Il suffit donc de connaître le chiffre de cote pour avoir encore une ligne de pente. Le point de la trace du plan sur (X_1, X_2) portant le chiffre de cote 1 a les coordonnées

$$\xi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \eta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2};$$

on l'obtient donc (voir ci-dessus) en multipliant le point $\frac{1}{\alpha}$ par i .

Le plan qui dans P représente $y = \alpha x$ se détermine donc ainsi : au point $\frac{1}{\alpha}$ de (X_1, X_2) , on dresse une perpendiculaire de longueur 1, puis on fait passer un plan par l'extrémité de cette perpendiculaire et par le vecteur obtenu en donnant au vecteur allant de l'origine au point $\frac{1}{\alpha}$ une rotation de 90° dans le sens positif. A la ligne de pente passant par l'origine, on donne le chiffre de cote 0, et à la ligne de pente passant par l'autre extrémité du vecteur tourné, le chiffre 1.

Si, au contraire, nous avons comme donnée un plan passant par l'origine, il est facile de déterminer par cette règle non seulement le coefficient de direction de la droite dont il devient le plan porteur, mais aussi les chiffres de cote dont les lignes de pente doivent être munies. Aux coefficients de direction de même module correspondent des plans de même inclinaison et dont les distances entre les lignes de pente de même nom sont les mêmes. Plus le module est grand, plus la pente du plan porteur est grande; plus aussi deux lignes de pente à chiffres de cote donnés se rapprochent l'une de l'autre. Pour $\alpha = 0$, nous aurons l'axe des X qui, par conséquent, est représenté par le plan $X_1 X_2$ (partout avec le chiffre de cote 0); pour $\alpha = \infty$, nous aurons l'axe des Y qui est représenté par un plan passant par Y_1 , pseudo-perpendiculaire à notre espace P. (A proprement parler, on aura aussi tout l'espace muni de chiffres de cote infiniment grands, cf. § IV. Ainsi, on obtient une transition continue, partant des lignes à module fini; le plan porteur se transforme en un plan à travers l'axe Y_1 et, dans ce plan, toutes les lignes de pente à chiffres de cote limités se sont rassemblées, tandis que la ligne de cote $y_2 = \infty$ s'est étendue sur toute la partie restante du plan.)

Il est facile de voir maintenant comment la ligne

$$y = \alpha x + q \quad (q = q_1 + iq_2)$$

est représentée. Les équations (1) et (2) sont modifiées en

$$\begin{aligned} y_1 &= (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + q_1, \\ y_2 &= (\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2) + q_2, \end{aligned}$$

qui montrent que le plan porteur a été déplacé parallèlement à lui-même d'une distance q_1 et que les chiffres de cote de toutes les lignes de pente ont été augmentés de q_2 .

Les droites parallèles à l'axe des X sont représentées par des plans horizontaux à chiffres de cote constants, les droites parallèles à l'axe des Y sont représentées par des plans pseudo-perpendiculaires à P et dont les traces dans P sont parallèles à l'axe des Y .

III. — COURBES ALGÈBRIQUES.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique d'ordre n en position générale par rapport aux axes. En faisant la séparation des parties réelles et imaginaires, nous aurons deux équations de la forme

$$\begin{aligned} (1) \quad y_1 &= \varphi(x_1, x_2), \\ (2) \quad y_2 &= \psi(x_1, x_2), \end{aligned}$$

où φ et ψ sont des fonctions n -uples de x_1 et de x_2 .

(1) est l'équation de la surface porteuse. A chaque point de (X_1, X_2) doivent correspondre n valeurs réelles de y_1 ; donc la surface porteuse doit être composée de n feuillets réels s'étendant tout le long du plan illimité $X_1 X_2$; la surface ne peut évidemment pas avoir de contour sur $X_1 X_2$, mais deux valeurs de y_1 peuvent très bien coïncider sur une courbe double.

Le système de courbes (2), où y_2 est un paramètre, représente les projections des lignes de cote. Puisque y est une fonction monogène de x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que les deux systèmes de courbes (1) et (2) (avec, respectivement, γ_1 et γ_2 comme paramètres) sont des systèmes de trajectoires orthogonales. D'où résulte que *les lignes de cote sur la surface porteuse doivent être les lignes de plus grande pente.*

L'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

montre que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2$$

doit être négatif; la courbure de la surface porteuse est donc partout *hyperbolique*.

Il résulte d'un calcul très facile que la tangente en un point ordinaire de la courbe est représentée par un plan touchant la surface porteuse de la courbe algébrique au point considéré; la ligne de pente du plan au point de contact est tangente à la ligne de pente de la surface porteuse, et elle a naturellement le même chiffre de cote.

A l'aide de la règle (p. 174), on pourra facilement décider dans quelle direction sur la surface porteuse les chiffres de cote des lignes de pente augmentent. Lorsqu'on monte sur la surface, les chiffres de cote à gauche vont en augmentant.

Points singuliers. — A la substitution

$$\begin{aligned} x &= x' - a, \\ y &= y' - b, \end{aligned}$$

correspond une translation du système des axes et l'addition d'une constante aux chiffres de cote. On peut donc supposer le point singulier situé à l'origine; l'aspect de la surface porteuse et le cours des lignes de cote ne seront pas modifiés. Le voisinage du point singulier est représenté par des séries de la forme

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + \dots \quad \left(\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{r}{q}, \dots \right),$$

où les exposants vont toujours en croissant et ont tous le même dénominateur. Fixons notre attention sur une seule branche de la courbe complète. Si nous introduisons le module ρ et l'argu-

ment φ de l'abscisse, nous obtenons

$$y_1 + iy_2 = A \rho^\alpha (\cos \alpha \varphi + i \sin \alpha \varphi) \\ + B \rho^\beta (\cos \beta \varphi + i \sin \beta \varphi) + \dots$$

Si l'on pose

$$A = r(\cos \nu + i \sin \nu), \\ B = r_1(\cos \nu_1 + i \sin \nu_1), \\ \dots\dots\dots,$$

on obtient

$$(1) \quad y_1 = r \rho^\alpha \cos(\nu + \alpha \varphi) + r_1 \rho^\beta \cos(\nu_1 + \beta \varphi) + \dots,$$

$$(2) \quad y_2 = r \rho^\alpha \sin(\nu + \alpha \varphi) + r_1 \rho^\beta \sin(\nu_1 + \beta \varphi) + \dots$$

(1) est l'équation de la surface porteuse en coordonnées cylindriques, (2) détermine les projections des lignes de cote sur (X_1, X_2) . Si l'on ne considère que les premiers termes, en parlant des projections des courbes de niveau, on peut obtenir le dernier système en faisant une rotation de $\frac{\pi}{2\alpha}$ autour de l'origine.

Considérons quelques cas spéciaux :

$$1^\circ \quad q = 1, \quad \alpha = 2, \quad y = Ax^2 + Bx^3 + \dots$$

Le point est un point ordinaire avec l'axe des X pour tangente. L'aspect de la surface porteuse au voisinage de l'origine est déterminé par

$$y_1 = r \rho^2 \cos(\nu + 2\varphi).$$

Cette surface est obtenue en construisant la branche de la parabole $y_1 = rx_1^2$ correspondant à des valeurs positives de x_1 , en faisant une rotation de son plan d'angle φ autour de Y_1 et en multipliant en même temps ses ordonnées par $\cos(\nu + 2\varphi)$; toute la surface est obtenue en faisant revêtir à φ toutes les valeurs de 0 à 2π . La courbe d'intersection avec un cylindre d'axe Y_1 est une ligne onduleuse qui coupe quatre fois le plan (X_1, X_2) .

En un point d'une courbe algébrique où $\frac{dy}{dx} = 0$ (sans qu'il s'y trouve d'autres particularités) la surface porteuse sera en forme de selle avec un plan tangent horizontal coupant la surface suivant deux branches de courbe perpendiculaires l'une à l'autre. Le système de lignes de cote est du même type que le système d'hyperboles à asymptotes communes. Puisque, dans celui-ci, on traverse

les asymptotes en passant d'une hyperbole à l'hyperbole conjuguée, les lignes de pente à chiffres de cote supérieurs à ceux du point de contact sont séparés des lignes de pente à chiffres inférieurs par une courbe à point double. Les branches de celle-ci, perpendiculaires l'une à l'autre, touchent le plan tangent horizontal et se coupent à angle droit; l'une d'elles est située au-dessus, l'autre au-dessous du plan. Les tangentes au point double sont les bissectrices des angles formés par les tangentes principales de la surface porteuse.

$$2^{\circ} \quad q = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad y = Ax^{\frac{1}{2}} + \dots$$

On obtient ici

$$y_1 = r\rho^{\frac{1}{2}} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\varphi\right) + \dots,$$

$$y_2 = r\rho^{\frac{1}{2}} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\varphi\right) + \dots$$

En examinant d'une façon analogue la surface porteuse, on voit que la ligne onduleuse sur le cylindre fait deux fois le tour avant de se fermer, et que, tout en faisant cela, elle exécute une oscillation complète. L'aspect rappelle un point de ramification ordinaire sur une surface de Riemann, attendu qu'il y a une ligne double ayant un point-pince au point considéré. La partie de ligne double où elle est isolée n'a aucun intérêt pour nous.

En ne tenant compte que du premier terme, les projections des courbes de niveau deviennent un système de paraboles homofocales. On obtient les projections des lignes de pente en tournant celles-ci autour de l'origine (le foyer) d'un angle de 180° . A chaque projection correspondent deux branches, une dans chaque feuillet, se coupant sur la ligne double. La transition entre les deux séries de lignes de pente se fait par une parabole verticale.

L'aspect de la surface porteuse est ainsi décrit en un point ordinaire où $\frac{dy}{dx} = \infty$.

$$3^{\circ} \quad q = 1, \quad \alpha = 3, \quad y = Ax^3 + Bx^4 + \dots$$

Un point d'inflexion avec tangente horizontale. La ligne ondulée se ferme après une rotation à trois oscillations. La surface porteuse consiste en un seul feuillet. La ligne de cote $y_2 = 0$ a un point

triple, et les autres lignes de cote ont chacune trois branches qui entrent respectivement dans la première, troisième et cinquième ouverture comprise entre les branches de $y_2 = 0$, ou bien dans la deuxième, quatrième et sixième.

Il en est de même pour

$$y = Ax^p + Bx^{p+1} + \dots$$

4° $q = 2, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad y = Ax^{\frac{3}{2}} + \dots$

Un point de rebroussement.

$$y_1 = r\rho^{\frac{3}{2}} \cos\left(\nu + \frac{3}{2}\varphi\right) + \dots,$$

$$y_2 = r\rho^{\frac{3}{2}} \sin\left(\nu + \frac{3}{2}\varphi\right) + \dots$$

La ligne ondulée circule deux fois et exécute trois oscillations. On décrit la surface (approximativement) en employant, de la même manière que tout à l'heure, la ligne ondulée comme ligne directrice pour la branche positive de la courbe $y_1 = rx_1^{\frac{3}{2}}$ que l'on fait tourner autour de Y_1 . (X_1, X_2) est couvert deux fois, et l'on obtient trois lignes de ramification formant des angles de 120° à l'origine. Le cours ultérieur de ces lignes doubles, en tant que lignes isolées, ne nous intéresse pas.

5° De la même manière, on peut examiner une branche de courbe complète quelconque. On obtient la forme de la surface et le nombre des lignes de ramification en examinant la ligne ondulée le long de laquelle elle coupe le cylindre d'axe Y_1 . Elle fait p oscillations et tourne q fois autour du cylindre; il y a $p(q-1)$ lignes de ramification émanant du point, car un arc de la ligne ondulée entre un maximum et un minimum (ou *vice versa*) est traversé une fois à chacune des $q-1$ rotations suivantes, si bien qu'en tout il y aura $p(q-1)$ points d'intersection. Si le premier exposant peut être réduit, la situation devient un peu plus compliquée; mais n'allons pas plus loin dans cette direction (1).

Sections coniques. — Si, dans l'équation d'une section conique, on fait, à la manière habituelle, la séparation des parties

(1) Ces dernières lignes contiennent une erreur d'ailleurs sans importance pour la suite. (*Note de l'Auteur.*)

réelles et imaginaires, on parvient à deux équations de la forme

$$\begin{aligned} y_2^2 + a_1 y_2 + a_2 &= 0, \\ y_2^2 + b_1 y_2 + b_2 &= 0, \end{aligned}$$

où les coefficients sont des polynômes en x_1 , x_2 et y_1 de degrés indiqués par les indices. Par soustraction, on obtient une équation de la forme

$$(1) \quad c_1 y_2 + c_2 = 0,$$

et l'élimination de y_2 donne

$$(2) \quad c_2^2 - c_1 a_1 c_2 + c_1^2 a_2 = 0.$$

La surface porteuse est donc une surface algébrique du quatrième ordre. (1) donne, en chaque point de celle-ci, une valeur correspondante de y_2 , sauf lorsque le point est situé sur la conique le long de laquelle le plan $c_1 = 0$ est coupé par $c_2 = 0$. La surface porteuse a deux points-pince correspondant aux deux points où $\frac{dy}{dx} = \infty$; lorsqu'on s'approche de l'infini, son cours coïncide essentiellement avec celui des asymptotes.

De tout ceci, on peut conclure que les deux feuillets de la surface porteuse se coupent suivant deux lignes doubles qui, venant de l'infini, aboutissent à deux points-pince, et que ces lignes font partie d'une hyperbole. Dans des cas particuliers, celle-ci peut se décomposer en deux droites sécantes. Les lignes de ramification de la surface porteuse peuvent alors ou bien n'être que des parties d'une de celles-ci, ou bien être composées d'un segment limité d'une des lignes et de l'autre ligne tout entière, laquelle doit alors couper le segment limité. Pour une courbe algébrique quelconque, un point double est obtenu sur la ligne de ramification chaque fois que les tangentes en deux points ayant la même abscisse sont parallèles et que, en même temps, les parties réelles de leurs ordonnées sont égales: c'est le cas, par exemple, d'une hyperbole, lorsque les tangentes parallèles à l'axe des X sont imaginaires. Les courbes $y^2 = \pm x^2 \pm 1$, dont les surfaces porteuses sont faciles à étudier, peuvent servir comme exemple de ce que nous venons d'avancer. $xy = a$ peut servir comme exemple d'une courbe à asymptote parallèle à l'axe des Y. La projection des

courbes de niveau et des lignes de cote est formée de deux systèmes de cercles tangents à X_1 et X_2 à l'origine.

Si la section conique se décompose en deux droites, la surface porteuse vient coïncider avec deux plans, la ligne de ramification est la ligne d'intersection de ceux-ci, et les deux points-pince ont coïncidé au point d'intersection des deux droites. Par le procédé inverse, il se détache donc deux points-pince du point d'intersection et, dans l'espace entre les deux, les deux feuillets se permutent.

La surface porteuse dans le cas général. — Considérons une courbe ordinaire d'ordre n ayant n tangentes parallèles à l'axe des Y , d points doubles et c points de rebroussement, et supposons qu'elle n'occupe pas une position spéciale par rapport aux axes et à la droite à l'infini. Le cours des n feuillets lorsqu'on s'approche de l'infini est déterminé par les asymptotes. Il y a donc $n(n-1)$ lignes de ramification allant à l'infini. Les points de ramification qui correspondent à $\frac{dy}{dx} = \infty$ sont dits de *première espèce*; de chacun d'entre eux part une ligne de ramification. Les points de ramification qui correspondent aux c points de rebroussement sont dits de *deuxième espèce*; de ceux-ci partent trois lignes de ramification. Aux points doubles ne correspond aucune particularité sur la surface porteuse; les points correspondants se trouvent sur la ligne de ramification, et ce qu'il y a de remarquable en un tel point est uniquement ceci : le chiffre de cote est le même dans les deux feuillets. D'ordinaire, on ne trouve pas de points doubles sur la ligne de ramification, comme nous l'avons dit ci-dessus, tandis qu'il y a bien des points triples où trois feuillets s'entrecroisent.

Supposons que la courbe soit sans point double ni point de rebroussement et soit infiniment près de se décomposer en n droites; il est alors facile de se représenter le cours des lignes de ramification : de chacun des $n(n-1)$ points de ramification de première espèce rayonne une ligne de ramification allant à l'infini, et *vice versa*, chaque ligne de ramification venant de l'infini aboutit à un point de ramification. Il y a $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ points triples sur les lignes de ramification. Si, par des déformations

continues, il naît un point double, c'est par l'union de deux points de ramification que cela se fait; s'il naît un point de rebroussement sur la courbe, il se formera sur la surface porteuse un point de ramification de deuxième espèce par la réunion de trois points de ramification de première espèce. On pourrait croire à la possibilité de traiter l'aspect de la surface porteuse pour le cas général par « la méthode des déformations continues », mais cela n'est pas sans rencontrer des obstacles. D'abord rien, sans doute, ne s'oppose à ce que le nombre des points triples puisse être modifié; ensuite, le cours des lignes de ramification peut être modifié par la formation sur elles de points doubles, comme il est décrit ci-dessus. Ceci cependant ne peut pas produire une modification essentielle de leurs cours, puisqu'il est facile de prouver qu'une ligne de ramification rayonnant d'un point de ramification ne peut, en général, pas se terminer en un autre point, mais doit s'étendre à l'infini. Car, si une ligne de ramification unit deux de tels points, on voit aisément, en se servant de la règle (p. 176) de l'augmentation des chiffres de cote, que la ligne de ramification doit être coupée par une autre ligne de ramification (pour que les feuilletts puissent être échangés); mais, en décomposant ce point double, on rompt la jonction entre les deux points de ramification.

IV. — LE PLAN.

Examinons maintenant comment il faut concevoir les éléments à l'infini de **T** pour que celle-ci puisse correspondre au plan (X, Y) défini au point de vue projectif (pour d'autres points de vue, voir plus loin). Dans celui-ci : 1° toutes les droites ont un point à l'infini; 2° les droites parallèles passent par le même point à l'infini; 3° l'ensemble des points à l'infini forme une droite.

L'ensemble des points à l'infini de notre espace **P** sera désigné par **U**. Toute direction dans **P** détermine un point de **U**.

Les éléments de **T** correspondant aux points à l'infini du plan sont déduits, d'une part, des points à l'infini de notre espace, en munissant ceux-ci de chiffres de cote arbitraires; d'autre part, des points de l'espace à distance finie, en munissant ceux-ci de chiffres de cote infiniment grands. Les choses se passent cependant d'une

manière assez compliquée. Tous les points à l'infini d'un plan porteur, munis de leurs chiffres de cote, doivent représenter le même point, à savoir, le point à l'infini de la droite lui appartenant. D'où il résulte que le point de U, déterminé par les lignes de pente situées dans des plans parallèles, représente le même point de (X, Y), quel que soit son chiffre de cote, pourvu qu'il soit fini. Et *vice versa*, un point dans U, déterminé par une direction qui n'est ni horizontale ni verticale, correspond au point à l'infini d'une droite dont les lignes de chute du plan porteur ont la direction du point donné, quel que soit le chiffre de cote du point, pourvu qu'il soit fini.

Tous les points à l'infini du plan porteur dont on approche le long de lignes autres que les lignes de pente ont des chiffres de cote infiniment élevés. Et *vice versa*, un point quelconque de U avec un chiffre de cote infini correspond à toute une collection de points à l'infini de (X, Y), c'est-à-dire à ceux qui appartiennent à des lignes telles que leurs plans porteurs soient parallèles à la direction de P par laquelle on approche du point de U sans que les lignes de pente aient cette direction.

Les points à l'infini des plans horizontaux représentent, si le chiffre de cote est fini, le point à l'infini de l'axe des X; si le chiffre de cote est infini, la représentation est indéterminée. Les points de U déterminés par la direction verticale avec chiffre de cote arbitraire correspondent au point à l'infini de l'axe des Y, et il en est de même des points de P à distance finie et à chiffres de cote infiniment élevés. Comme on le voit, les résultats sont assez compliqués.

Pour plus de clarté, nous imaginerons le plan (X, Y) découpé en parties qui pourront être représentées séparément sans difficulté. Ensuite, nous assemblerons les variétés à quatre dimensions représentant les parties, ou bien nous indiquerons seulement comment les points des espaces frontières se correspondent.

Espaces sphériques. — Examinons d'abord la variété à trois dimensions déterminée par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = r^2,$$

que nous appellerons un *espace sphérique*. $y_2 = 0$ détermine une

surface sphérique de contour dont la partie intérieure est la porteuse de deux espaces, un situé *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de P. Pour ces deux espaces, les lignes de cote deviennent des surfaces sphériques qui, pour $r_2 = \pm r$, se réduisent à un point, le centre. (A comparer avec la représentation d'une surface sphérique par la projection de ses courbes de niveau sur un plan diamétral horizontal.)

L'espace sphérique divise **T** en deux parties contenant les points dont les distances à l'origine sont respectivement plus petites et plus grandes que r^2 . Les premiers points sont projetés sur P à l'intérieur du contour, et les valeurs de leurs chiffres de cote sont comprises entre les chiffres de cote des points situés sur l'espace sphérique verticalement *au-dessus* et *au-dessous* du point.

La ligne d'intersection de l'espace sphérique et du plan qui représente $y = \alpha x$ est déterminée par

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \\ y_2 &= \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 &= r^2. \end{aligned}$$

L'équation de la projection de la courbe porteuse sur (X_1, X_2) est

$$(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = r^2.$$

La courbe porteuse est donc une ellipse dont le grand axe est le diamètre de la sphère de contour qui coïncide avec la ligne de pente du plan passant par l'origine; le petit axe est obtenu en faisant tourner la projection du grand axe sur (X_1, X_2) d'un angle de 90° . Les extrémités du grand axe divisent l'ellipse en deux parties dont les chiffres de cote ont des signes opposés, si bien que l'une des parties est *au-dessus*, l'autre *au-dessous* de P; aux extrémités du petit axe, les chiffres de cote atteignent leur valeur numérique la plus élevée.

Pour α infiniment grand, la ligne d'intersection devient le cercle pseudo-vertical

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ y_1^2 + y_2^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Toute droite passant par l'origine est ainsi divisée par l'espace

sphérique en deux portions de surface simplement connexes. L'une d'elles contient le point à l'infini sur la ligne; elle est définie par l'inégalité

$$|x| \geq \frac{r}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$$

(pour α infiniment grand, $|y| \geq r$).

Tout le plan (X, Y) est décrit par la ligne $y = \alpha x$ lorsqu'on donne à α toutes les valeurs complexes. Nous découpons d'abord la variété à quatre dimensions **A** qui se trouve à l'intérieur de l'espace sphérique Σ , dont le centre est à l'origine et dont le rayon est r . La partie qui reste de (X, Y) contient complètement la ligne à l'infini; on la coupe en deux morceaux de la façon suivante :

Toute droite $y = \alpha x$ pour laquelle $|\alpha| = 1$ contient une portion de surface extérieure à Σ , laquelle est définie par $|x| \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$. Toutes ces portions de surface déterminent un espace **T** coupant la partie mentionnée de (X, Y) en deux parties que nous désignerons par **B'** et **C'**; **B'** sera la partie qui contient le point à l'infini de l'axe des X . **C'** sera celle qui contient celui de l'axe des Y . L'espace **T** part d'une surface τ dans Σ décrite par les bords des éléments de surface mentionnés. **T** était déterminé par

$$|\alpha| = 1, \quad |x| \geq \frac{r}{\sqrt{2}};$$

τ est déterminé par

$$|\alpha| = 1, \quad |x| = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

ou, puisque $y = \alpha x$, par

$$|x| = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad |y| = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

La projection de τ sur **P** est une surface cylindrique dont l'axe est Y et le rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$, et qui est limitée par deux cercles sur le contour de Σ . τ peut être décrit par des cercles pseudo-verticaux portés par les génératrices du cylindre.

Σ est divisé par τ en deux parties, Σ_1 et Σ_2 , par lesquelles **A** est rattaché respectivement à **B'** et à **C'**.

Transformons maintenant $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{C}'$ de façon que leurs points viennent à distance finie.

$\mathbf{B}'$ est déterminé par

$$(1) \quad |\alpha| \leq 1, \quad |x| \geq \frac{r}{\sqrt{1+|\alpha|^2}};$$

donc α et $\frac{1}{x}$ sont partout limités dans $\mathbf{B}'$.

De façon pareille, $\mathbf{C}'$ est déterminé par

$$|\alpha| \geq 1, \quad |y| \geq \frac{|\alpha| r}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}$$

ou, si l'on pose, $\alpha\beta = 1$, par

$$(2) \quad |\beta| \leq 1, \quad |y| \geq \frac{r}{\sqrt{1+|\beta|^2}},$$

et dans $\mathbf{C}'$, β et $\frac{1}{y}$ sont partout limités.

On transforme maintenant $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{C}'$ respectivement par

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \alpha, \\ \eta = \frac{r}{\sqrt{1+|\alpha|^2}} \frac{1}{x} \end{cases}$$

et par

$$(4) \quad \begin{cases} \xi' = \beta, \\ \eta' = \frac{r}{\sqrt{1+|\beta|^2}} \frac{1}{y}, \end{cases}$$

en deux variétés $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ qui sont définies respectivement par

$$|\xi| \leq 1, \quad |\eta| \leq 1$$

et par

$$|\xi'| \leq 1, \quad |\eta'| \leq 1.$$

En représentant, comme d'habitude, ξ et η sur une variété à quatre dimensions, et de même ξ' et η' , nous obtenons que $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{C}'$ se changent en deux variétés simples à quatre dimensions situées entièrement dans une région finie. La première est décrite par des surfaces de cercle pseudo-verticales de rayon 1 dont le centre est dans l'aire du cercle $|\xi| \leq 1$, $\eta = 0$, et dont la projection sur P est formée de segments de droite verticaux. La projection de toute la variété sur P est un cylindre droit et circulaire. La frontière se compose tant d'un espace pseudo-vertical $T(\mathbf{B})$ correspondant à T , qui est projeté sur la surface courbée du cylindre

sus-mentionné et qui est déterminé par

$$|\xi| = 1, \quad |\eta| \leq 1,$$

que d'un espace $\Sigma_1(\mathbf{B})$ correspondant à Σ_1 , dont la projection couvre doublement la partie de P contenue dans le cylindre; cet espace est déterminé par

$$|\xi| \leq 1, \quad |\eta| = 1.$$

Ces deux frontières sont séparées l'une de l'autre par une surface $\tau(\mathbf{A})$ correspondant à τ , décrite par les cercles pseudo-verticaux

$$|\xi| = 1, \quad |\eta| = 1.$$

Il en est de même pour $\mathbf{B}$.

La ligne à l'infini dans (X, Y) est représentée par deux surfaces de cercle pseudo-horizontales, l'une dans $\mathbf{B}$, l'autre dans $\mathbf{C}$, définies respectivement par $\eta = 0$ et $\eta' = 0$. Leurs bords

$$|\xi| = 1, \quad \eta = 0 \quad \text{et} \quad |\xi'| = 1, \quad \eta' = 0$$

sont le lieu géométrique des centres des cercles verticaux qui constituent $T(\mathbf{A})$ et $T(\mathbf{B})$.

Nous terminerons par un bref aperçu de la manière dont les frontières des trois variétés $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ se correspondent entre elles.

$\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ doivent être jointes le long des espaces $T(\mathbf{B})$ et $T(\mathbf{C})$ selon les formules

$$(5) \quad \begin{cases} \xi\xi' = 1, \\ \frac{\eta}{\eta'} = \alpha, \end{cases}$$

comme on le voit par les formules (3) et (4). La variété réunie $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ est limitée par $\Sigma_1(\mathbf{B})$ et $\Sigma_2(\mathbf{C})$ et cette frontière doit être, au point de vue de la topologie, équivalente à l'espace sphérique Σ . (Nous y reviendrons plus tard.) Les formules (3) et (4) représentent la correspondance.

V. — SURFACES ALGÈBRIQUES.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique d'ordre n , et supposons que celle-ci, considérée comme un

ensemble de points, soit une surface ordinaire (sans courbes doubles, arêtes cuspidales et points multiples) et qu'elle occupe une position générale par rapport au système de coordonnées et au plan à l'infini.

De même qu'une fonction algébrique d'une variable indépendante peut être représentée par une correspondance n à 1 sur une surface sphérique représentant les points d'une droite, ainsi la fonction algébrique $z = f(x, y)$, définie par l'équation ci-dessus, doit pouvoir être étendue par une correspondance n à 1 sur la variété à quatre dimensions représentant le plan (X, Y) . A chaque point du plan correspondent n valeurs de Z ; celles-ci seront toutes différentes lorsque la droite passant par le point et parallèle à l'axe des Z coupe la surface en n points séparés. L'ensemble des points de **T** pour lesquels ceci n'a pas lieu est appelé *la surface de ramification*. Celle-ci sera la surface représentant le contour de la surface algébrique sur le plan (X, Y) . Le contour est une courbe algébrique d'ordre $n(n-1)$ et de classe $n(n-1)^2$. Cette courbe a autant de points de rebroussement qu'il y a de tangentes principales de la surface parallèle à l'axe des Z ; ce nombre est $n(n-1)(n-2)$. Le nombre des points doubles égale celui des tangentes doubles de la surface parallèle à l'axe des Z , c'est-à-dire

$$n(n-1)(n-2)(n-3).$$

La surface de ramification, que nous désignerons par φ , est donc formée de $n(n-1)$ *feuillet*s le long de (X_1, X_2) avec $n(n-1)^2$ *points de ramification du premier type* et $n(n-1)(n-2)$ *points de ramification du second*.

Considérons maintenant chacune des parties **A**, **B** et **C** séparément. Nous nous imaginerons le rayon r de Σ comme suffisamment grand pour que **A** contienne tous les points de ramification de la surface de ramification. La partie de φ située dans **A** est désignée par $\varphi(\mathbf{A})$; elle est limitée par $n(n-1)$ courbes fermées qui peuvent être, approximativement, découpées sur Σ à l'aide des asymptotes du contour. Nous pouvons supposer sans restriction essentielle que ces courbes sont situées entièrement dans la partie de Σ que nous avons appelée Σ_1 ; — en d'autres termes : nous pouvons supposer que les parties infiniment lointaines du contour prennent leur cours entièrement dans **B**. Car aucune modification

essentielle de la division du plan exposée au paragraphe IV n'en résultera si, au lieu de déterminer $\mathbf{T}$ par $|\alpha| = 1$, on le détermine par $|\alpha| = k$, où k est un nombre positif quelconque.

Les parties de φ situées dans $\mathbf{B}$ sont représentées (approximativement) par $n(n-1)$ surfaces de cercle pseudo-verticales

$$\begin{array}{ll} \xi = \alpha_1, & |\eta| \leq 1, \\ \xi = \alpha_2, & |\eta| \leq 1, \\ \dots\dots, & \dots\dots, \\ \xi = \alpha_{n(n-1)}, & |\eta| \leq 1, \end{array}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n(n-1)}$ sont les coefficients de direction des asymptotes du contour. Nous désignerons ces surfaces par $\varphi_1(\mathbf{B})$, $\varphi_2(\mathbf{B})$, ..., $\varphi_{n(n-1)}(\mathbf{B})$.

Maintenant, pour représenter les valeurs de z sur $\mathbf{A}$, nous sectionnons cette variété par un espace pseudo-vertical Φ dont la projection sur $\mathbf{P}$ est $\varphi(\mathbf{A})$ et qui d'ailleurs est déterminé par cette condition : que chaque point de la projection doive être donné par tous les chiffres de cote dont la valeur est entre celle dont le point doit être muni pour appartenir à φ et celle dont le point doit être muni pour appartenir à la partie supérieure de Σ ; en d'autres termes, l'espace est la partie de $\mathbf{A}$ située pseudo-verticalement « *au-dessus* » de $\varphi(\mathbf{A})$.

Deux segments dans $\mathbf{A}$ ayant les mêmes extrémités et ne coupant pas Φ peuvent être rattachés à une portion de surface qui, elle non plus, ne coupe pas Φ . Car nous n'avons qu'à joindre la projection des segments sur $\mathbf{P}$ à une portion de surface dont nous munissons les points d'un chiffre de cote arbitraire qui, si la portion de surface coupe la projection de φ , a seulement besoin d'être inférieur au chiffre de cote le moins élevé sur la ligne d'intersection. Les bords de cette portion de surface sont facilement rattachés aux lignes données à l'aide de fragments pseudo-verticaux, et l'on a ainsi construit une surface ayant les propriétés voulues.

D'une manière analogue, on voit que deux points quelconques dans $\mathbf{A}$ peuvent toujours être reliés par des lignes qui ne coupent pas Φ .

En un point a de $\mathbf{A}$, fixons une des n valeurs de z correspondant à ce point. Si a se meut jusqu'à un point b par deux voies différentes qui ne coupent pas Φ , et si la valeur de z varie d'une

façon continue conformément à l'équation $F(x, y, z) = 0$, nous finirons toutes les deux fois par la même valeur; ceci résulte de ce que les deux chemins ensemble forment la frontière d'une surface qui ne coupe pas Φ .

A tout point de la variété $\mathbf{A}$ sectionnée par Φ , on peut donc associer une valeur bien déterminée de z en partant de la valeur donnée. De même, en partant des $n - 1$ autres valeurs de z , on obtient n couches répandues sur $\mathbf{A}$. Deux points situés l'un en face de l'autre près de la frontière Φ portent les mêmes n valeurs (mais non pas dans le même ordre); conformément à cela, les couches sont jointes.

La variété à quatre dimensions étendue ainsi en n couches sur $\mathbf{A}$ est désignée par $\mathbf{A}'$; elle est limitée par un espace Σ' . Tout fragment de surface dans $\mathbf{A}$ devient le porteur d'un fragment d'une surface de Riemann dans $\mathbf{A}'$, et les points de ramification sont situés aux points d'intersection du fragment avec $\varphi(\mathbf{A})$.

Il n'y a aucune difficulté à attacher les valeurs de z aux points de $\mathbf{C}$, puisque, dans celle-ci, il n'y a pas de points de la surface de ramification; on obtient n variétés $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$, tout à fait analogues à $\mathbf{C}$.

La surface de ramification envoie, comme nous l'avons indiqué, $n(n - 1)$ portions de surface dans $\mathbf{B}$. On associe aisément les valeurs de z ici; par exemple, à l'aide de $n(n - 1)$ espaces de ramification rayonnant de l'une des surfaces de cercle pseudo-verticales de $\mathbf{B}$ et aboutissant dans $\varphi_1(\mathbf{B}), \dots, \varphi_{2(n-1)}(\mathbf{B})$. Le fait que toute cette variété $\mathbf{B}'$ forme un seul ensemble résulte de ce que le plan à l'infini coupe $F(x, y, z) = 0$ le long d'une courbe algébrique φ , qui, comme nous l'avons supposé, est irréductible. La partie $\psi(\mathbf{B}')$ de cette courbe située dans $\mathbf{B}'$ est portée par la surface de cercle $|\xi| \leq 1, \eta = 0$. Le reste se compose de n surfaces élémentaires portées dans $\mathbf{C}$ par $|\xi'| \leq 1, \eta' = 0$. $\mathbf{B}'$ peut être décrit tout entier par des surfaces de cercle pseudo-verticales avec centres dans le fragment de surface de Riemann $\psi(\mathbf{B}')$.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES NOMBRES TOPOLOGIQUES DE CONNEXION.

VI. — TOPOLOGIE.

La méthode analytique de Descartes est, sans doute, une méthode universelle pour résoudre les problèmes géométriques; mais elle donne, d'ordinaire, des constructions bien inférieures à celles des Grecs en simplicité et en élégance. En essayant de pénétrer les principes de l'Analyse géométrique spéciale employée par ceux-ci, Leibnitz formula une série d'observations qu'il appelait *Analysis situs* ou *Geometria situs* [*Leibnitzens gesammelte Werke*, herausg. von G.-H. PERTZ, 1858 (*Mathematische Schriften*, Bd I, p. 118 : *De Analysis situs*)]. Pour cette raison, on a quelquefois appelé Leibnitz « le père de la Topologie moderne », c'est-à-dire de cette branche de la Mathématique qui vise les propriétés qualitatives des choses sans s'occuper des propriétés quantitatives, métriques. Leibnitz remarque quelque part, concernant sa théorie : « *Figura in universum præter quantitatem continet qualitatem seu formam* »; mais en réalité sa théorie ne ressemble en rien à ce qu'on entend maintenant par « la Topologie ».

Dans les temps modernes, les mathématiciens ont commencé à s'intéresser à un grand nombre de questions topologiques. Qu'on se rappelle les recherches de Tait, Simony et d'autres sur les nœuds, les réseaux, etc.; les graphes; l'aspect des courbes graphiques; le problème de peindre et ainsi séparer les différents pays d'une carte géographique au moyen de quatre couleurs différentes; le problème de plier les timbres-poste; et, « last but not least », les multiples essais pour formuler une théorie des nombres de connexion pour les variétés à n dimensions et pour généraliser le théorème du polyèdre d'Euler, deux questions étroitement rattachées l'une à l'autre. [Voir le tableau de la littérature dans W. DECK, *Beitrag zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, Bd XXXII).]

L'usage est incertain, mais il serait juste de réserver à cette dernière espèce de recherches le nom d'*Analysis situs*, tandis qu'on pourrait appeler *Topologie* toutes les recherches de nature qualitative, comme Listing l'a proposé (*Vorstudien der Topologie*).

VII. — ANALYSIS SITUS.

Il sera, je pense, très difficile de formuler d'une façon inattaquable une théorie générale de la connexion d'une variété à n dimensions; en tout cas, il vaut mieux, sans doute, étudier plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici des cas concrets, au lieu de s'attaquer tout de suite aux généralités. En théorie, la logique devrait suffire pour une exposition mathématique, mais la pratique démontre combien puissant est le levier de cette vision qui se développe lorsqu'on applique la théorie à un grand nombre de cas concrets; même la théorie qui a l'air la plus logique et vraisemblable peut cacher des erreurs qui ne paraissent que quand elle est contrôlée à l'aide de l'intuition.

Riemann et Betti ont été les premiers à chercher à généraliser la théorie de la connexion des surfaces, employée avec tant de succès par Riemann lui-même dans la théorie des intégrales abéliennes. Après la mort de Riemann, Betti publia un Mémoire à ce sujet [*Sugli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Ann. di Mat.*, 2^e série, vol. IV, 1871)]. Il ne parle pas de collaboration avec Riemann; mais, à juger par les fragments d'une théorie, réunis par Weber d'après les notes écrites par Riemann (RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, 2. Aufl., Fragment XXIX), Riemann a, pendant son séjour en Italie (*Ges. Werke*, p. 555), essentiellement contribué aux pensées exprimées dans le Mémoire de Betti. Dans celui-ci, on trouve pour la première fois la définition des nombres de connexion pour les variétés dont le nombre de dimensions dépasse 2. Plus tard, d'autres ont cherché à perfectionner et compléter la théorie: M. W. Dyck, dans *Beitrag zur Analysis situs* (*Math. Ann.*, Bd XXXII et XXXVII), Poincaré dans son Mémoire sur l'*Analysis situs* et M. Picard dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables (p. 5).

Déjà, avant de connaître ces derniers Ouvrages, j'avais décidé d'essayer une autre voie que celle de Riemann et de Betti; je

voulais essayer de généraliser la méthode de perçement de Jul. Petersen que je me rappelais d'après ses cours. (Ce n'est que beaucoup plus tard que j'ai connu *Diagram* et *Trema* de Listing, ainsi que les recherches de Betti s'y rattachant et que je ne connaissais jusqu'à ce moment que par le résumé succinct des *Fortschritte der Mathematik*.) En particulier, je trouvai déplorable que les $n - 1$ nombres de connexion ne fussent pas, topologiquement parlant, à caractériser une variété quand $n > 2$. Lorsque j'ai connu les autres Mémoires mentionnés ci-dessus, surtout celui de Poincaré, j'ai failli regretter mon choix en comparant les méthodes élégantes rencontrées ici avec la théorie un peu lourde que j'employais; mais, comme je croyais voir que la voie choisie par moi éclaircissait des points non élucidés par l'autre méthode, et puisque, de plus, j'obtins le moyen de trouver des *criteria suffisants* pour que deux variétés à n dimensions soient équivalentes, je me décidai à continuer en dépit de toutes les difficultés. Par l'expression « deux variétés sont équivalentes », je veux dire qu'elles correspondent l'une à l'autre point pour point, de façon que deux points quelconques de l'une tendent à coïncider quand les deux points correspondants de l'autre variété en font autant. [La relation entre l'homéomorphisme de Poincaré (*Analysis situs*, § 2) et l'équivalence ainsi définie sera mentionnée plus tard.]

La question que nous rencontrons d'abord est celle-ci : quelles sont les coupures que l'on doit faire pour rendre une variété fermée (POINCARÉ, *loc. cit.*, § 1) simplement connexe? Pour résoudre cette question nous ferons usage du procédé suivant : on perce la variété, c'est-à-dire on enlève la variété élémentaire qui forme le voisinage d'un point. On crée ainsi une frontière que l'on élargit par une déformation continue de façon à enlever de plus en plus de la variété donnée. On continue ainsi jusqu'à ce que certaines parties de la frontière se rapprochent d'autres, en arrêtant la déformation en ces endroits lorsque la distance entre les parties qui se rencontrent est devenue infiniment petite. En poursuivant ainsi, on est conduit à un *diagramme* formé d'un système de variétés de dimensions inférieures à celle de la variété donnée, ou plutôt formé par le voisinage de ce système, c'est-à-dire par une variété qui, dans la $n^{\text{ième}}$ dimension, est infiniment petite. Le sys-

tème de variétés à dimension inférieure qui constitue la frontière du diagramme est appelé son *noyau*.

Ce diagramme a une signification double. *D'abord, il représente une variété qui est équivalente à la variété donnée lorsque celle-ci a été percée.* Si l'on réussit à établir des formes normales auxquelles les diagrammes peuvent être réduits, la condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés fermées soient équivalentes devient celle-ci : que les formes normales de leurs diagrammes soient identiques. Car les variétés élémentaires enlevées par le perçement sont toujours équivalentes. Mais *le noyau du diagramme indique aussi les coupures qu'il faut faire pour rendre la variété donnée simplement connexe*; car, si l'on opère le procès d'élargissement mentionné dans l'ordre rétrograde, la variété qui reste quand on fait les coupures indiquées par le diagramme se réduira à la variété élémentaire enlevée par le perçement. Nous ferons plus tard une comparaison entre les résultats ainsi obtenus et la théorie des nombres de connexion de Riemann et Betti.

VIII. — LE DIAGRAMME DES SURFACES DE RIEMANN.

Bien que la théorie des ordres de connexion des surfaces de Riemann soit bien connue et, de plus, se trouve traitée, d'une façon assez semblable à celle que nous venons d'employer, chez Jul. Petersen (*Funktionstheorie*, Kap. IV), nous indiquerons cependant brièvement cette théorie, à cause de la suite, surtout pour montrer qu'elle peut être basée exclusivement sur le diagramme, sans utiliser la généralisation du théorème d'Euler (le théorème de l'invariance de $t - f$ pour une surface).

Envisageons la surface de Riemann comme portée par une surface sphérique. D'un point a de celle-ci nous décrivons des arcs de grand cercle joignant ce point aux f points qui définissent les points de ramification de la surface et que nous supposons d'ordres $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_f - 1$. Nous perçons quelque part chacun des n feuillets et, par un élargissement des trous ainsi formés, nous déplaçons leurs contours jusqu'à ce qu'ils s'approchent des points de ramification, en leur faisant suivre les arcs de grand cercle que nous avons tracés, jusqu'au point a . Si nous reti-

rons de la surface quelques bandes se terminant à faux, il nous restera : 1° f éléments de surface autour des points de ramification; 2° n éléments de surface superposés au point a ; 3° $k_1 + k_2 + \dots + k_f$ bandes reliant ceux-ci avec ceux-là. Nous coupons $n-1$ de ces bandes telles que les frontières appartiennent à différentes courbes du contour et nous retirons les fragments. La surface représente maintenant un diagramme correspondant à un percement. Elle contient en tout $f+n$ éléments de surface reliés par $\Sigma(k) - n + 1$ bandes. De ces bandes, nous en utilisons $f+n-1$ pour relier les $f+n$ éléments, de sorte que le tout forme un seul élément. Du bord de celui-ci partent

$$\sum_1^f (k) - n + 1 - f - n + 1 = \sum_1^f (k-1) - 2n + 2$$

anses qui s'accouplent facilement deux à deux, de façon à former des anses doubles. En désignant par m le degré d'une quelconque des branches complètes de la courbe, on aura, sur la courbe algébrique correspondant à la surface,

$$\Sigma(k-1) = \Sigma(m-1) + n'$$

(la sommation étant étendue à toutes les branches de la courbe où $m > 1$). Le nombre d'anses constitue donc le chiffre géométrique bien connu

$$\Sigma(m-1) + n' - 2n + 2 = 2p.$$

Nous arrivons donc à une forme normale à p anses doubles. La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces de Riemann soient équivalentes, topologiquement parlant, est donc qu'elles aient le même p .

Si nous désirons une forme normale pour la surface de Riemann fermée, nous pourrons, à chaque anse double, faire glisser les deux embouchures de l'une des anses jusqu'au milieu de l'autre et puis, en élargissant la première, nous ferons croître ses embouchures jusqu'à ce qu'elles coïncident avec les bords de l'autre. En fermant ensuite la surface par l'adjonction d'un morceau simplement connexe, on arrive à la forme normale de Klein : une surface sphérique à p anses en forme de tuyaux.

Ce que je viens d'exposer peut servir comme une sorte de programme pour les recherches que nous allons faire. Je mentionnerai encore une méthode pour traiter cette question qui est susceptible d'être étendue aux surfaces algébriques. Supposons donnée une courbe algébrique φ_n sans points singuliers. (S'il y a de ces points, on peut se rendre compte de la situation en opérant un passage à la limite en partant de la courbe envisagée ici.) Si l'on fait varier la courbe d'une façon continue sans introduire de points singuliers et sans altérer son degré, la surface de Riemann correspondante restera toujours équivalente à elle-même.

Nous transformerons la courbe φ_n en une courbe ψ_n qui est sur le point de se décomposer en n lignes droites situées d'une façon quelconque. Pour voir que ceci peut toujours se faire, il suffit de considérer le faisceau linéaire $\varphi_n + \lambda\psi_n = 0$. Les courbes de ce faisceau qui ont des points singuliers correspondent à un nombre fini et bien déterminé de valeurs de λ ; donc on pourra toujours faire varier λ de 0 à ∞ sans passer par aucune de ces valeurs. Représentons les droites par n surfaces sphériques concentriques de même rayon; alors, pour représenter ψ_n , nous devons remplacer chacun des $\frac{n(n-1)}{2}$ points doubles (points d'intersection des droites) par un couple de points de ramification infiniment voisins et que l'on rattachera par une ligne de ramification. En faisant une coupure le long de deux cercles, un dans chaque feuillet, autour de deux points de ramification accouplés, on détache ceux-ci de la surface et l'on déforme en un tuyau la partie détachée. De même pour les autres couples. Après avoir détaché les unes des autres les n surfaces sphériques qui restent, on applique de nouveau chaque tuyau à son trou. Or, on a besoin de $n-1$ tuyaux pour rattacher les n surfaces sphériques de façon à en former une seule; de celle-ci sortent donc

$$\frac{1}{2}(n)(n-1) - n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = p$$

anses en forme de tuyaux; c'est-à-dire que nous voilà de nouveau arrivés à la forme normale de Klein.

Si une surface fermée était unilatère, son diagramme contien-

draît, à côté des anses doubles, un certain nombre d'anses simples, chacune à une torsion ⁽¹⁾.

IX. — LE DIAGRAMME D'UNE VARIÉTÉ À 3 DIMENSIONS.

Supposons qu'une variété à 3 dimensions soit définie par

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, y_3) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

et par un certain nombre d'inégalités de la forme $\psi(y_1, y_2, y_3) > 0$ plus le prolongement analytique de cette partie (*voir* POINCARÉ, *Analysis situs*, § 3), ou bien, pour mieux conformer le langage au caractère de la topologie, supposons-la définie par le fait qu'elle doit naître de l'assemblage d'espaces élémentaires dont les frontières sont divisées par un réseau de lignes, en portions de surface qui sont accouplées par paires d'une façon déterminée. Cet accouplement doit être fait de façon que, dans la variété fermée, le voisinage de chaque point sur une des lignes du réseau soit un espace élémentaire. Si l'on veut que la variété ainsi définie soit d'un seul tenant, il faut que ces espaces puissent, au début, être réunis en un espace élémentaire dont la superficie satisfait alors aux mêmes conditions. Il n'y a pas de difficultés à suivre par l'intuition l'élargissement d'un percement.

Le noyau du diagramme sera formé par des portions de surface se rencontrant suivant des arcs de courbes; ceux-ci se rencontrant en des points, les points de jonction du noyau du diagramme. Nous supposerons que les portions de surface soient simplement connexes; car, dans le cas contraire, on pourrait ajouter des arcs de courbe aboutissant sur les arcs du diagramme et qui diviseraient les portions de surface en morceaux simplement connexes. Les arcs de courbe ainsi ajoutés seraient alors comptés avec les autres.

Considérons maintenant le diagramme lui-même. Chaque point de jonction est entouré d'une variété élémentaire (un élément de volume) à laquelle nous pourrions donner par exemple la forme sphérique; les arcs de courbe reliant les sphères sont entourés

⁽¹⁾ Il faut remarquer, cependant, qu'il n'existe qu'une surface unilatère ayant une connexion donnée et qu'il faudrait donc aller plus loin pour obtenir la forme canonique par ce moyen.

(Note du Traducteur.)

d'espaces filiformes attachés aux surfaces sphériques par des petits éléments de surface. Appelons ces espaces *fils* ; ils peuvent être tracés par un élément de surface se déplaçant d'une des surfaces sphériques à l'autre; ceci peut se faire, d'ailleurs, de deux façons essentiellement différentes (*voir* ci-dessous, § XI).

L'espace entourant un élément de surface du diagramme est un espace en forme de plaque limité par deux éléments de surface formant les côtés de la plaque et par une surface en forme de bande de même connexion qu'un anneau circulaire, et qui forme le bord de la plaque. Cet espace, que nous appellerons une *plaque* , est attaché le long de son bord à une bande appartenant à la surface de la variété formée par les fils et les sphères aux points de jonction des fils. Supposons que le diagramme ait en tout a sphères correspondant aux points de jonction, b fils et c plaques. À l'aide de $a - 1$ des fils, les sphères peuvent être réunies en un seul espace élémentaire auquel on peut donner la forme sphérique, et de cette sphère centrale sortiront alors $b - a + 1 = p$ fils. Sur cette surface, dont la connexion est $2p + 1$, se trouvent c courbes fermées le long desquelles les bords des plaques doivent être attachés.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel système de fils, avec des courbes d'attachement pour des plaques, puisse représenter le diagramme d'un espace fermé est celle-ci : que les courbes d'attachement soient formées par p coupures fermées qui laissent la surface du système de fils connexe.

Car la condition nécessaire et suffisante exige que la surface, après l'addition des plaques, soit équivalente à la surface k de l'espace élémentaire enlevé par le percement, c'est-à-dire soit de la même connexion qu'une surface sphérique.

Si le diagramme correspond véritablement à une variété fermée, les deux côtés d'une plaque quelconque correspondront à deux portions simplement connexes de la surface k . Si l'on enlève la plaque du diagramme, la connexion de la surface de celui-ci se modifie en tant que les deux côtés de la plaque sont remplacés par la bande le long de laquelle la plaque était attachée, et qui est équivalente à une circonférence. Pour faire subir à k la même modification de connexion, on découpe les deux éléments de

surface correspondants et l'on relie les trous par un tuyau. Si l'on continue ainsi jusqu'à ce que toutes les plaques soient enlevées, k est remplacé par une surface sphérique munie d'autant d'anses en forme de tuyaux qu'il y avait de plaques. Cette surface doit avoir la même connexion que la surface du système de fils. (Il ne s'ensuit *nullement* que l'espace limité par elle doit être de la même connexion que le système de fils lui-même.) Nous pouvons en conclure que le *nombre des plaques doit être p* . La relation entre les deux surfaces est telle que les lignes qui, sur la surface du système de fils, passent par l'une des p bandes d'attachement correspondent aux lignes qui, sur l'autre surface, coupent l'une des p anses (courbes méridiennes). La surface du système de fils ne cesse donc pas d'être connexe lorsqu'on enlève les bandes d'attachement.

On voit clairement que la condition énoncée est suffisante si l'on observe qu'en partant de deux surfaces fermées et équivalentes et en faisant sur chacune (d'une manière quelconque) autant de coupures fermées que possible sans séparer la surface en morceaux, il restera deux surfaces équivalentes. La surface qui reste, quand on a enlevé de la surface du système de fils les p bandes d'attachement, est donc équivalente à une surface sphérique à $2p$ trous. La surface de la région qu'on obtient en attachant les plaques est donc équivalente à la surface sphérique qu'on peut obtenir en fermant les $2p$ trous par l'adjonction d'éléments de surface.

X. — VARIÉTÉS ORIENTÉES.

L'indicatrice. — Avant de continuer l'examen du diagramme, il faut intercaler quelques remarques. Trois points (a , b et c) sur une courbe fermée suffisent pour déterminer un sens positif sur la courbe ; sur une surface, on peut fixer un sens positif de rotation en fixant un sens positif sur une petite courbe fermée de la surface ne se coupant pas elle-même. Or, on peut ainsi déterminer un côté positif et un autre négatif de la surface dans la partie de l'espace entourant de plus près la petite courbe fermée. Si l'on étend cette détermination à toute la surface, il faudra distinguer entre surfaces unilatérales et bilatères. Et voilà un champ de recherches à étendre aux variétés de dimensions plus élevées ; les

directions de circulation sur les courbes et la notion des côtés positifs et négatifs des surfaces sont des notions fondamentales de la topologie.

Le voisinage d'un point sur une courbe est un petit arc dont nous désignerons les extrémités par 1 et 2, de sorte que 1, 2 indique le sens positif sur l'arc ; nous appellerons ι_2 une indicatrice de premier ordre (cf. ДУСК, *Math. Ann.*, Bd 32, p. 473) et nous dirons qu'une courbe munie d'une indicatrice est orientée. Le voisinage d'un point d'une surface est un élément limité par une petite courbe fermée ; si la courbe est orientée, l'élément de surface qu'elle limite est appelé une *indicatrice de deuxième ordre*. Dans une variété à 3 dimensions définie de la façon susmentionnée le voisinage d'un point sera limité par une surface de type sphérique ; si l'on munit celle-ci d'une indicatrice de deuxième ordre, on arrive à l'indicatrice de troisième ordre de la variété. De façon tout à fait parallèle, nous pourrions former une indicatrice de quatrième ordre dans **T** ou dans une variété à 4 dimensions que nous obtenons en joignant des variétés élémentaires dans **T**. La définition peut être étendue aux variétés analytiquement définies à dimensions quelconques, mais elle sera difficile à employer sous cette forme si la variété ne s'offre pas à l'intuition. Pour nous, les recherches n'ont donc d'importance que lorsque le nombre de dimensions est inférieur à 5. L'*indicatrice de $n^{\text{ième}}$ ordre* contient une série d'indicatrices successives des ordres $n - 1$, $n - 2$, ..., 1, cette dernière étant l'arc ι_2 . L'indicatrice peut être déplacée dans la variété ; alors, si elle est ramenée à sa position initiale, on peut toujours s'arranger de sorte que les indicatrices successives jusqu'à celle de deuxième ordre reviennent aussi. Il existe alors deux possibilités : *ou bien* ι_2 peut être ramené à sa position ancienne ι_2 , *ou bien* ι_2 peut être placé dans la position ι_1 . Si le premier cas se présente pour tout déplacement de l'indicatrice dans la variété, celle-ci est appelée *bilatère* ; sinon, *unilatère*. Une variété bilatère peut être orientée de deux manières ; les deux variétés sont dites *opposées*.

J'avais déjà utilisé ces définitions quand je vis la méthode de Poincaré (*Analysis situs*, § 4 et 8) ; j'ai continué cependant à me servir de mes propres définitions, puisque celles de Poincaré visent surtout les recherches topologiques sous forme analytique.

J'ai remarqué que la définition qui se trouve dans le Livre de MM. Picard et Simart (p. 23) concorde essentiellement avec la mienne ; mais j'ai préféré suivre ici ma forme primitive qui offre à l'intuition un appui plus solide.

Considérons la frontière d'une variété $\mathbf{M}$ à n dimensions, bilatérale et orientée, et supposons qu'elle soit orientée à l'aide de l'indicatrice de la variété elle-même. Ceci se fait en déplaçant par déformation continue l'indicatrice de la variété, de façon que sa frontière, une indicatrice d'ordre $n - 1$, se trouve placée sur la frontière de $\mathbf{M}$, et alors l'indicatrice d'ordre $n - 1$ (avec toutes celles d'ordre inférieur qu'elle contient) peut être employée pour orienter la frontière. Inversement, on peut d'une manière semblable orienter la variété elle-même à l'aide de l'indicatrice de la frontière. Dans la suite, nous exigerons toujours que la frontière soit orientée conformément à l'indicatrice de la variété.

(La définition usuelle du côté positif et négatif d'une surface, sur la base de sa direction positive de rotation, suppose qu'on ait choisi l'indicatrice de l'espace ou un équivalent de celle-ci, la main droite, une montre, ou un moyen analogue.)

Coins orientés. — Envisageons une variété à m dimensions définie par l'ensemble des points

$$(x) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

où les x sont des variables réelles qui ne sont assujetties à aucune condition dans leur variation. Le point $(0, 0, \dots, 0)$ est appelé (o) . De ce point, on trace vers chacun des m points $(a), (b), \dots, (k)$ les demi-droites A, B, ..., K [c'est-à-dire les segments allant de (o) aux autres points et sur chacun desquels on prend pour direction positive la direction de (o) à l'autre extrémité]. Il est supposé que les m points aient une disposition générale telle que le déterminant

$$\Delta = |a, b, c, \dots, k|$$

soit différent de zéro. Dans ce cas, si p désigne un nombre entier compris entre 1 et m , on peut être certain de ne jamais pouvoir faire passer une variété plane de $p - 1$ dimensions à travers p des lignes. A chaque demi-ligne correspond une variété plane à $m - 1$ dimensions passant par les autres demi-lignes. Les m variétés

planes, avec les demi-lignes, forment ce que nous appellerons un *coin* à m dimensions ayant (o) pour sommet et les demi-lignes pour arêtes; nous l'appelons *orienté* si l'ordre par lequel les arêtes sont nommées est déterminé. $m - 1$ des demi-lignes déterminent maintenant dans la variété plane où elles se trouvent un coin à $m - 1$ dimensions, et ainsi de suite; en général, p arêtes quelconques se trouvent dans une variété à p dimensions contenues dans le coin donné et orienté conformément à l'orientation de celui-ci.

Nous pouvons facilement établir une liaison entre l'ordre dans lequel les arêtes sont nommées, et la détermination de l'indicatrice dans la variété (γ). Comme frontière de l'indicatrice, choisissons par exemple la variété sphérique $\Sigma(\gamma^2) = r^2$. Celle-ci est coupée par l'arête A en un point a' ; on prend le voisinage de a' , dans la frontière de l'indicatrice d'ordre m , comme indicatrice d'ordre $m - 1$ et on l'imagine limitée par la variété définie par l'intersection de $\Sigma(\gamma^2) = r^2$ avec la variété plane à $(m - 1)$ dimensions contenant B, ..., K. Cette variété est traitée de la même manière : dans la frontière de l'indicatrice d'ordre $m - 1$, le voisinage du point b' où B coupe la variété sphérique est pris comme indicatrice d'ordre $m - 2$ et limité à l'aide de la variété plane contenant C, ..., K. En continuant ainsi suivant l'ordre des arêtes déterminé par l'orientation du coin, on finit par une courbe fermée [intersection de $\Sigma(\gamma^2) = r^2$ et de la surface qui contient les deux dernières arêtes I et K]. Le point d'intersection de I est appelé i' , celui de K est appelé 1; la prolongation négative de K coupe en un point appelé 2. Comme indicatrice d'ordre 1, nous prenons l'arc $i'2$; et, ainsi, l'indicatrice d'ordre n est déterminée. La relation entre celle-ci et le coin peut être brièvement indiquée ainsi : la première arête du coin rencontre la frontière de l'indicatrice en un point de l'indicatrice d'ordre $m - 1$; sa deuxième arête, en un point de l'indicatrice d'ordre $m - 2$, ...; sa $(m - 1)^{\text{ième}}$ arête en un point de l'indicatrice d'ordre 1; et, enfin, sa $m^{\text{ième}}$ arête au point 1 et au prolongement négatif de celle-ci au point 2.

Lorsque nous déplaçons le coin d'une façon continue, nous exigeons que p arêtes ne doivent jamais se trouver dans la même variété plane à $p - 1$ dimensions. Si le sommet du coin est

déplacé de (o) à (t) , et si les arêtes du coin sont déterminées par les points (a') , (b') , ..., (k') , le déterminant

$$\Delta = |a' - t, b' - t, \dots, k' - t|$$

aura le même signe que Δ pour la position de départ.

Le coin peut être déplacé de manière que les $m - 1$ premières arêtes coïncident avec les arêtes correspondantes d'un coin donné à m dimensions. Suivant que la $m^{\text{ième}}$ arête peut être amenée à coïncider avec la $m^{\text{ième}}$ ou non, on dit que les coins sont de même genre ou de genre opposé.

Supposons que l'indicatrice au point (y) soit déterminée conformément au coin de coordonnées, c'est-à-dire au coin dont le sommet est en (o) et dont les arêtes passent par les points

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, \dots, 0), \\ &(0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots, \\ &(0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Ici, $\Delta = 1$; donc, pour tous les coins orientés conformément à l'indicatrice de (y) , Δ' sera positif, et *vice versa*.

Comparaison avec la théorie de Poincaré (*Analysis situs*, § 8). — Une variété élémentaire déterminée (*Analysis situs*, § 3) par

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

conjointement avec des inégalités de la forme

$$\psi(y_1, y_2, \dots, y_m) > 0$$

peut être considérée comme l'image d'une variété élémentaire en (y) déterminée par les inégalités $\psi(y) > 0$. Nous l'orienterons par une indicatrice qui est l'image de celle prise dans (y) .

Nous allons indiquer comment on peut voir que notre exposition concorde avec celle de Poincaré. Le problème se pose ainsi :

Nous nous sommes donné deux variétés élémentaires de $m^{\text{ième}}$ ordre, v_1 déterminé par

$$\begin{aligned} (1) \quad &x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_m), \\ &|y_k| < \beta_k, \end{aligned}$$

et v_2 déterminé par

$$(2) \quad \begin{aligned} x_i &= \theta_i(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ |z_k| &< \gamma_k, \end{aligned}$$

et nous supposons que v_1 et v_2 ont une variété élémentaire v' en commun. Poincaré définit alors l'ordre des paramètres z par l'ordre des paramètres y — ou ce qui est essentiellement la même chose : l'ordre des y par l'ordre des z — en exigeant que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)}$$

soit positif pour les points de v' .

Nous définissons l'ordre des z en exigeant que les indicatrices dans v' qui correspondent aux coins de coordonnées dans (y) et (z) soient de même genre.

Nous démontrerons que ces deux définitions donnent le même résultat. Soient

$$(y^0) \equiv (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$$

et

$$(z^0) \equiv (z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$$

deux points de (y) et de (z) correspondant au même point de v' . Considérons le coin dans (z) dont le centre est en (z^0) et dont les arêtes passent par les points

$$\begin{aligned} &(z_1^0 + dr, z_2^0, \dots, z_m^0), \\ &(z_1^0, z_2^0 + dr, \dots, z_m^0), \\ &\dots\dots\dots, \\ &(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0 + dr), \end{aligned}$$

où dr est une quantité positive infiniment petite. Le déterminant Δ' étant ici $(dr)^m$, ce coin est du même genre que le coin de coordonnées dans (z) ; l'indicatrice déterminée par lui est donc d'accord avec l'orientation de (z) . D'après *notre* définition, on peut déterminer l'indicatrice de (y) en représentant dans (y) , à l'aide des équations (1) et (2), la partie de (z) qui correspond à v' et en représentant en même temps l'indicatrice de (z) . Il s'agit maintenant de démontrer qu'un coin correspondant à l'indicatrice ainsi construite est du même genre que le coin des coordonnées lorsque celui-ci est orienté selon la définition de Poincaré. Or, ce

coin-là est défini par le fait d'avoir le sommet en (y^0) et les arêtes passant par les points

$$\begin{aligned} & \left[y_1^0 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial z_1} \right)_0 dr, y_2^0 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial z_1} \right)_0 dr, \dots, y_m^0 + \left(\frac{\partial y_m}{\partial z_1} \right)_0 dr \right], \\ & \left[y_1^0 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial z_2} \right)_0 dr, y_2^0 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial z_2} \right)_0 dr, \dots, y_m^0 + \left(\frac{\partial y_m}{\partial z_2} \right)_0 dr \right], \\ & \dots\dots\dots, \\ & \left[y_1^0 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial z_m} \right)_0 dr, y_2^0 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial z_m} \right)_0 dr, \dots, y_m^0 + \left(\frac{\partial y_m}{\partial z_m} \right)_0 dr \right], \end{aligned}$$

où les indices des quotients différentiels partiels indiquent qu'il faut prendre leurs valeurs au point (z_0) . Δ' a, pour ce coin, la valeur

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)} (dr)^m,$$

qui, en suivant la définition de Poincaré, est positive. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Un échange de deux arêtes du coin où un changement de la direction positive sur une arête changent le genre du coin.

XI. — SUITE DE L'EXAMEN DU DIAGRAMME D'UNE VARIÉTÉ A 3 DIMENSIONS.

Retournons au diagramme. Le problème à résoudre était celui de le réduire à une forme normale; je n'ai pas réussi à en trouver une, mais je ferai pourtant quelques remarques sur la résolution du problème.

Premièrement, quelle est la condition pour que la variété fermée à 3 dimensions définie par le diagramme soit bilatère? D'abord, toute courbe fermée qu'elle renferme peut être déformée en une courbe complètement contenue dans le diagramme, et son parcours dans celui-ci peut encore être réduit au système de fils. La condition nécessaire et suffisante sera donc que, en parcourant une ligne par un *quelconque* des fils, on revienne à la sphère centrale sans que l'indicatrice ait changé de genre. Les deux embouchures d'un fil sont des éléments de surface sur la sphère centrale. Sur le contour de l'une d'elles, nous fixons une

direction positive, par exemple, celle des aiguilles d'une montre (vue du dehors). En déplaçant la courbe fermée le long de la surface du fil, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec le contour de l'autre embouchure, on fixe sur celui-ci une direction positive qui est ou bien celle des aiguilles de la montre, ou bien celle contraire. (On suppose toujours que la sphère centrale se trouve dans notre espace. Dans le premier des deux cas, les jonctions des bouts de fil avec la sphère centrale ne peuvent être réellement établies dans notre espace; mais elles peuvent l'être dans **T**.) *Dans le premier cas, la variété est évidemment unilatère; si le second cas est réalisé pour tous les fils, la variété est bilatère.*

On peut toujours se représenter le système de fils pour une variété bilatère comme situé dans notre espace; en coupant un fil, en le tordant, et ensuite en rejoignant les deux bouts convenablement, on peut obtenir que les bandes d'attachement courent le long de la surface du fil sans s'enrouler autour de celui-ci.

Le diagramme peut être transformé en formes équivalentes par déformations continues; mentionnons en particulier :

1. Les bandes d'attachement peuvent être déplacées arbitrairement sur la surface du système de fils, pourvu que les bandes ne se touchent jamais les unes avec les autres.

2. Chacune des embouchures de fils peut être déplacée le long de la surface formée par la sphère centrale et les $p - 1$ fils, pourvu que, en se mouvant, elle ne passe à travers aucune bande; les bandes qui passent par l'embouchure de fil en question doivent la suivre et se déplacer, d'ailleurs, conformément à 1.

3. Les bandes d'attachement peuvent, en dehors du déplacement mentionné, en 1, en subir un autre par-dessus un des côtés d'une plaque. L'effet d'un tel déplacement peut être réalisé par l'opération suivante : sur la bande que l'on veut déplacer, on introduit un coude que l'on allonge vers un point de la bande correspondant à la plaque; puis on coupe la première bande à l'extrémité du coude et l'on intercale une courbe qui suit la seconde bande dans toute sa longueur.

A l'aide de ces déplacements, on peut opérer un grand nombre

de simplifications sur le diagramme. Si, par exemple, une bande revient d'une embouchure de fil à la même sans avoir, entre temps, passé par d'autres fils, le coude ainsi formé par la bande peut être enlevé. Si, parmi les fils parcourus par une bande, il y en a un qui est parcouru une seule fois, on peut, par les déplacements 2, obtenir que cette bande parcoure une seule fois le fil en question sans en parcourir d'autres. De plus, on peut obtenir (par les déplacements 3) que toutes les autres bandes soient enlevées du fil. Ceci fait, le fil peut évidemment être déformé (avec la plaque qui correspond à la bande) de façon à rentrer dans la sphère centrale; il est désormais sans intérêt. Je crois que la condition mentionnée pour qu'un fragment de bande puisse être enlevé du diagramme est aussi une condition nécessaire, mais je n'ai pas réussi à le prouver d'une façon tout à fait incontestable.

On pourrait être tenté de croire que, par déformation continue, on réussirait à séparer les p bandes de manière que chacune parcoure à elle seule un des p fils. Mais on peut prouver que cela est impossible; et c'est pourquoi le problème de réduire le diagramme à une forme normale est probablement très difficile. Nous nous bornerons à considérer des cas où la séparation peut être opérée, mais, préalablement, nous mentionnerons brièvement *les différentes classes de courbes* qui peuvent être tracées sur un tore dans l'espace ordinaire sans le diviser en parties; nous compterons dans une classe toutes les courbes qui puissent, par déplacements continus, être transformées les unes dans les autres.

La première classe comprend *les courbes méridiennes* qui parcourent la surface du tore; elles peuvent servir de frontières à des fragments de surface simplement connexes situés entièrement dans l'espace intérieur à la surface; nulle autre parmi les courbes considérées n'a cette propriété. Une autre classe est formée par *les courbes de latitude* définies par le fait qu'elles peuvent constituer la frontière de fragments de surface simplement connexes situés dans l'espace extérieur à la surface du tore. En traçant une courbe méridienne λ et une courbe de latitude β (sur chacune desquelles un sens positif a été déterminé), on peut construire de nouvelles classes de coupures en rond; on circule, par exemple, n fois le long de β en direction positive; ensuite on ferme la courbe

par une ligne le long de λ , en direction ou positive ou négative ; désignons une telle courbe par $[n\beta \pm \lambda]$. De façon parallèle, $[\beta \pm n\lambda]$ signifie une classe de courbes représentée par une courbe circulant une fois le long de β , mais qui, avant d'être fermée, effectue n circulations le long de λ . En coupant le tore par une coupure à travers une courbe méridienne, on peut le tordre de façon à donner n tours à l'une des extrémités dans une direction convenable ; et en assemblant de nouveau les bouts de juste façon, on pourra réduire la courbe à une courbe de latitude (la courbe de latitude primitive cesse naturellement d'en être une). La classification complète est assez difficile, et il n'y a aucune raison de poursuivre en cet endroit notre étude de plus près.

Un fil sur le diagramme peut être transformé en un tore rattaché à la sphère centrale par un cylindre. Sur la surface de celui-ci court la bande d'attachement qui y appartient ; elle suit une des courbes qui viennent d'être mentionnées. Car, selon nos données, chaque bande pouvait être amenée à parcourir chacune son propre fil. Si la bande est une *courbe de latitude*, le tore et la plaque peuvent, comme il a été déjà mentionné, être rentrés dans la sphère centrale et *ne jouent alors aucun rôle*. Le cas où toutes les bandes sont des *courbes méridiennes* est particulièrement simple, et la situation est tout à fait analogue à celle rencontrée dans notre examen des surfaces. Figurons-nous le diagramme placé dans notre espace et celui-ci placé dans **T** ; on forme facilement un espace fermé qui a pour diagramme le diagramme donné. Si une plaque doit être attachée à une bande, nous la plaçons dans **T** *au-dessus* de notre espace P, de sorte que sa projection sur P coïncide avec un des éléments de surface limités par la bande et intérieurs au diagramme. Le bord de la surface est recourbé vers notre espace et attaché au diagramme le long de la bande. Maintenant, figurons-nous chaque tore transformé en un fil et rendons la plaque plus épaisse, de sorte que la bande d'attachement occupe toute la surface du fil. La variété ainsi construite peut être fermée en ajoutant une variété élémentaire dont la projection est la sphère centrale. Nous sommes ainsi arrivés à une forme qui correspond exactement à la forme normale de Klein pour les surfaces. Le contour sur P de la variété à 3 dimensions est formé précisément par une telle surface et la variété consiste en outre en deux parties

dont les projections sont toutes deux le solide de P limité par le contour; l'une des parties est située, par exemple, au-dessus de P , l'autre au-dessous. On peut dire que cette variété est construite en ajoutant un certain nombre d'anses à un espace sphérique. Une telle anse est formée en retirant deux variétés élémentaires de l'espace sphérique; la frontière de l'une d'entre elles étant déplacée hors de l'espace sphérique et ensuite ramenée de façon à coïncider avec la frontière de l'autre, de manière que, bien entendu, la variété devienne bilatère. Le voisinage d'une courbe fermée dans T est limité par un espace du genre que nous venons de décrire.

Toute surface fermée dans T est entourée d'une variété à 4 dimensions, limitée par une variété à 3 dimensions que nous appellerons l'*enveloppe* de la surface. (De pareille manière, on détermine l'enveloppe d'une variété fermée quelconque ou d'un point situé dans une variété donnée.) Déterminons maintenant le diagramme de l'enveloppe d'une surface de tore dans T . Elle se compose de 3 fils; chacune des trois bandes parcourt deux d'entre les fils deux fois en directions opposées. On peut s'en figurer l'aspect en plaçant le centre de la sphère centrale à l'origine des coordonnées d'un système rectangulaire dans notre espace, et en faisant suivre au fil les trois axes qu'on s'imagine prolongés à travers l'infini. Les lignes d'intersection des fils avec les trois surfaces de coordonnées indiquent alors le cours des bandes. Voilà un exemple de diagramme où les bandes ne peuvent être amenées à parcourir chacune son fil. Ce diagramme est du même genre que l'exemple mentionné par MM. Picard et Simart (Chap. II, n° 18). On obtient, d'ailleurs, de pareils diagrammes pour les enveloppes de surfaces fermées dans T . Cependant la variété des diagrammes n'est pas épuisée par ces exemples.

Nous avons considéré un diagramme formé d'un tore sur la surface duquel la ligne d'attachement décrivait une courbe méridienne; mais son parcours peut se faire d'une infinité de manières. Considérons seulement un exemple (auquel nous reviendrons plus tard) où la *ligne d'attachement est une courbe* $[2\beta + \lambda]$; en aplatisant le tore de sorte que la bande en détermine le bord, on obtient la surface unilatère bien connue de Möbius.

Comme il a été déjà dit, le noyau du diagramme indique les cou-

pures (lignes et éléments de surface) qu'il faut tracer pour rendre la variété simplement connexe. Pour déterminer ces coupures, nous pouvons d'ailleurs suivre un chemin un peu différent en nous rappelant que le diagramme est équivalent à la variété percée. Car pour rendre celle-ci simplement connexe, on peut d'abord percer un canal à travers chacune des p plaques; ensuite, on coupe les fils par des éléments de surface ayant chacun pour frontière une courbe méridienne, et, pour que celles-ci deviennent des coupures du diagramme, on doit à chaque point d'intersection d'une bande avec une courbe méridienne ajouter à la surface correspondant à celle-ci une sorte de langue allant dans la plaque jusqu'au canal qui perce la plaque.

Donc, en un pareil point d'intersection, le bord de la surface de coupure passe de la courbe méridienne jusqu'au canal le long d'un côté de la plaque; il entre le long du canal et revient à la courbe méridienne le long de l'autre côté de la plaque. Inversement, ce système de coupures peut être considéré comme un diagramme de la variété primitive si l'on se figure comme restantes les parties enlevées. Les canaux deviennent alors des fils sortant de la variété enlevée par le pointage primitif; les coupures de surfaces deviennent des plaques. Il y a une sorte de dualité entre les deux diagrammes: les fils de l'un correspondent aux plaques de l'autre et *vice versa*; si un certain nombre de bandes parcourent un fil, autant de fragments de bandes limitent la plaque qui y appartient; si un certain nombre de plaques définissent des bandes sur un certain fil, autant de fils auront des bandes d'une certaine plaque, etc. Cette dernière méthode pour construire le diagramme a été employée par Betti.

Si l'on ferme le diagramme en rattachant sa surface à celle d'une sphère, on obtient, comme nous l'avons dit, une variété équivalente à la variété donnée. Les parties peuvent d'ailleurs être séparées d'une façon un peu différente; au lieu de joindre les plaques au système de fils, on peut les joindre de leurs deux côtés à la surface de la sphère. On obtient ainsi un corps à p anses, tout à fait semblable au système de fils. La surface de ce corps se joint à la surface du système de fils; il suffit de connaître sur la surface du corps le système de coupures annulaires (ne morcelant pas la surface) correspondant aux courbes β sur la surface du système de fils, et le

système correspondant aux courbes λ . Par exemple, deux tores dont les frontières sont jointes, de sorte que les courbes méridiennes couvrent les courbes de latitude et *vice versa*, correspondront à un diagramme dont le fil a pour bande une courbe de latitude. La variété elle-même est équivalente à un espace sphérique. Ceci concorde avec le fait que l'espace à l'intérieur d'un tore peut être transformé en l'espace extérieur, de manière que les courbes de latitude sur la surface deviennent les courbes méridiennes et *vice versa*, le tout sous la condition que la région à l'infini soit considérée comme un point, de sorte que tout ce qui tombe hors d'une certaine surface sphérique puisse être imagé par inversion à l'intérieur de celle-ci. Autre exemple : deux espaces intérieurs à des tores dont les frontières sont jointes de façon que les courbes de latitude couvrent les courbes de latitude, et les courbes méridiennes, les courbes méridiennes ; nous avons alors la variété équivalente à l'enveloppe d'une courbe fermée dans **T**. Choisissons enfin deux tores, où les courbes de latitude et méridiennes de l'un correspondent aux courbes $[2\beta + \lambda]$ et β de l'autre ; ceci correspond au diagramme sus-mentionné avec la bande d'attachement $[2\beta + \lambda]$.

Mentionnons aussi une circonstance qui rend la théorie plus difficile dans le cas où le nombre des dimensions dépasse 2. Si sur le diagramme d'une surface fermée bilatérale on tranche une anse, la jonction après coup ne peut se faire essentiellement que d'une seule façon si la surface doit rester bilatère ; on revient donc, sans doute, en refaisant la jonction, à un diagramme équivalent au premier. Si, par contre, on a une variété à 3 dimensions, comme celle qui constitue la frontière du voisinage d'un tore dans **T**, cette variété pourra être tranchée par un tore (correspondant à une courbe méridienne sur la surface dont on examine l'enveloppe). *Cependant, la jonction peut se refaire de façons infiniment nombreuses et essentiellement différentes* : β et λ sur l'une des frontières peuvent être jointes à deux quelconques des coupures annulaires sus-mentionnées, pourvu seulement que celles-ci se coupent en un point.

XII. — COMPARAISON AVEC DES EXPOSITIONS ANTÉRIEURES.

En comparant les résultats ainsi obtenus avec les expositions antérieures, nous nous bornerons principalement aux Ouvrages suivants (que nous désignerons pour plus de commodité par des abréviations) :

1. RIEMANN, *Fragment aus der Analysis situs* (Fragm. XXIX) (*Gesammelte mathematische Werke*, 2^{me} édition, par H. Weber, 1892). — Désigné par R., *Fr.*

2. BETTI, *Sugli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (*Annali di Matematica*, 2^{me} série, vol. IV, 1871). — B., *Spz.*

3. POINCARÉ, *Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^{me} série, Cah. I, 1895). — POINC., *A. S.*

4. PICARD, *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 4^{me} série, vol. V, 1889). — PIC., *Mém.*

5. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, vol. I, 1897; surtout Chap. 2. — P. et S.

Les Ouvrages de W. Dyck dans les *Math. Ann.*, vol. XXXII et XXXVII (*Beiträge zur Analysis situs*, 1888 et 1890) suivent une autre direction que celle de nos recherches ici; il n'y a donc pas de raison pour faire ici une comparaison.

Une critique du fragment de Riemann serait injuste, puisqu'il ne contient que des esquisses provisoires qui n'ont pas été destinées à la publication. D'ailleurs, à propos d'erreurs chez Riemann et Betti, on peut souvent se borner à mettre en parallèle les recherches en question et celles qui y correspondent modifiées chez MM. Picard et Poincaré; en de tels points, une critique détaillée serait donc superflue et, de plus, difficile, les définitions étant souvent très vagues chez eux.

Il faut d'abord examiner la question de la *définition des variétés*. Dans Riemann, aucune définition ne se trouve donnée. Betti a compris qu'il faut se placer sur une base analytique pour

pouvoir définir une variété à n dimensions (B., *Spz.*, 1^{re} Partie); la pensée est capable de généraliser la notion de fonction à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais la faculté d'intuition n'est pas en état de généraliser également la notion de l'espace à 3 dimensions. Cependant, la définition est donnée d'une façon un peu trop vague pour que les recherches suivantes puissent devenir exactes. Pour voir quels développements et quelle précision il faut donner à la définition, on peut la comparer à la belle exposition donnée par Poincaré (POINC., *A. S.*, § 1, 2, 3, 4 et 8), laquelle constitue le véritable modèle de la méthode à employer dans les recherches de ce genre, travaillées jusqu'à la clarté et dont l'utilité pour la Science est prouvée.

Chez Riemann ainsi que chez Betti, la définition des *nombres de connexion* s'appuie sur une idée analogue à celle sur laquelle Riemann lui-même appuie sa définition des *nombres de connexion* d'une surface (R., *Fr.*: Es sara $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$; et B., *Spz.*, 3^e Partie : Per giustificare...). On peut s'étonner que Poincaré expose la définition des nombres de connexion sans cette justification (*A. S.*, § 5 et 6), mais chez MM. Picard et Simart, la question se trouve traitée au Chapitre 2, n^{os} 12 et 13. Au n^o 12, on trouve le « lemme » de Riemann sous une forme précisée (chez Poincaré, cela se trouve principalement sous la forme de l'assertion que les homologies peuvent être additionnées comme des équations). Si l'exposition du n^o 13 diffère de celle de Riemann-Betti, c'est qu'il y a une lacune dans le raisonnement de celle-ci. Car pour pouvoir vraiment, de la manière décrite (B., *Spz.*, 3^e Partie : Le t spazi chiusi...), remplacer successivement les A par les B, il faut être sûr que les A et les B peuvent être accouplés par deux, de sorte que les couples constituent chacun une partie de la frontière (ou toute la frontière) de la variété de $(m+1)^{\text{ième}}$ dimension. La possibilité de ceci peut être prouvée par les homologies de Poincaré; cependant il n'y a pas lieu d'exposer cela plus longuement, puisque l'idée fondamentale d'une telle démonstration coïncide essentiellement avec l'exposition chez P. et S., Chap. II, n^o 13.

Il faut remarquer, au demeurant, que la définition n'est justifiée que quand on aura, en outre, prouvé qu'un système de variétés comme celui qui est mentionné dans la définition *existe vérita-*

blement. Ici les expositions modernes (P. et S., Chap. II, n° 11 et POINC., *A. S.*, § 5 et 6) ne semblent pas suffisamment claires. La définition du nombre de connexion p dépend et de la manière dont on définit les variétés $V_1, V_2, \dots$ y mentionnées, et de l'importance accordée aux mots : « former frontière ». $V_1, V_2, \dots$ doivent être, entre autres, *bilatères*; de plus, elles doivent être ce que nous appelons *orientées*, et il est exigé que ces orientations *concordent* (comme nous disons) avec l'orientation de la variété limitée par elles (P. et S., Chap. II, n° 8). Si l'on maintient ces exigences à la lettre, on rencontrera des difficultés. Sur la surface d'un tore, une courbe méridienne λ et une courbe de latitude β (toutes deux munies d'un sens positif) *ne forment pas* frontière, comme on le suppose généralement, avec toute courbe fermée de la surface ne formant pas frontière à elle seule, même pas s'il est permis de compter β, k_1 fois et λ, k_2 fois. Elles ne peuvent par exemple former avec $[\beta + \lambda]$ la frontière d'aucun fragment de surface si l'on persiste à exiger la dépendance entre l'indicatrice du fragment de surface et celle de la frontière. En général, on ne voit pas tout à fait clairement ce que signifie l'expression : les courbes sur une surface forment frontière lorsque celles-ci se coupent. Une petite courbe fermée et plane, de la forme du chiffre 8, forme-t-elle frontière avec aucune partie de la surface ? La réponse : oui, ne pourra en tout cas être obtenue que par des adjonctions artificielles. Si nous dessinons un cercle autour de la courbe, on pourra fixer sur celle-ci deux directions positives différentes. Laquelle d'entre celles-ci formera frontière avec la courbe donnée ? Nous rencontrons exactement les mêmes difficultés avec les homologies de Poincaré (POINC., *A. S.*, § 5). Nous croyons pouvoir les écarter par la définition suivante ⁽¹⁾ :

(1) Je n'ai pas pu suivre les objections de M. Heegaard, peut-être à cause d'une conception différente du mot « forme frontière ». Quant à l'exemple des courbes sur le tore, il est vrai que $\beta + \lambda$ ne forme pas frontière avec β et λ et, par conséquent, que nous n'avons pas l'homologie

$$\beta + \lambda + [\beta + \lambda] \sim 0.$$

Mais $\beta + \lambda$ forme frontière avec $-\beta$ et $-\lambda$; donc, nous avons

$$[\beta + \lambda] - \beta - \lambda \sim 0$$

Un système de variétés à m dimensions $V_1, V_2, \dots$ est considéré comme homologue à un autre système de variétés à m dimensions $W_1, W_2, \dots$, toutes situées dans une variété S_n :

$$V_1 + V_2 + \dots \sim W_1 + W_2 + \dots$$

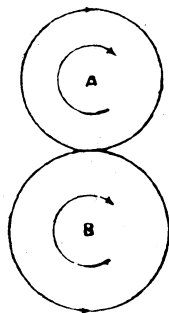
si, par déformation continue dans S_n du premier système, on peut réduire celui-ci soit tout simplement au dernier système (avec les indicatrices correctes), soit à un système qui peut être dérivé de l'autre par les deux espèces de modifications suivantes : ou bien on trace dans la variété à m dimensions quelques coupures fermées à $m - 1$ dimensions, on écarte les frontières ainsi créées en les rattachant (bilatéralement) à des variétés à m dimensions qui peuvent être divisées en deux groupes ; les parties de l'un des groupes se trouvent toujours infiniment près de celles de l'autre et sont orientées de la façon opposée ; ou bien on enlève le voisinage de quelques variétés dont le nombre de dimensions est inférieur à $m - 1$, et l'on écarte les frontières ainsi créées en les rattachant à des variétés qui sont infiniment près de coïncider avec des variétés d'un nombre de dimensions inférieur à m . Si $V_1, V_2 \dots$ sont homologues à l'enveloppe d'un point, on les dit

ou

$$[\beta + \lambda] \sim \beta + \lambda,$$

ce qui est bien ce qu'il faut.

La petite courbe en forme du chiffre 8 est bien homologue à 0 puisqu'elle est



la frontière de la région A — B (voir la figure) où les sens de A et B sont déterminés comme dans la figure. (Note du Traducteur.)

homologues à 0 : $V_1 + V_2 + \dots \sim 0$. (Les variétés ajoutées n'auront pas d'importance pour les intégrales leur appartenant.)

Donnons avec des explications plus détaillées quelques exemples : Une surface sphérique enfermant deux surfaces sphériques (toutes orientées de telle manière que leurs indicatrices aient le même genre) peut être réduite à celles-ci réunies par un tuyau infiniment mince. Ces dernières peuvent de leur côté être réduites à la première lorsque, après l'avoir coupée le long d'un grand cercle, on a rattaché les bords à deux plaques circulaires.

Il en est de même pour une surface sphérique enfermant la surface d'un tore convenablement orientée.

Les courbes $[\beta + \lambda]$ sur la surface d'un tore peuvent être réduites aux courbes $[\beta]$ et $[\lambda]$ lorsqu'on a tranché celles-ci en leur point de rencontre et rejoint les bouts par deux petits arcs, l'un à côté de l'autre.

Dans B., *Spz.*, 4^e et 5^e Partie, on trouve des recherches qui ne se retrouvent pas chez les auteurs postérieurs, aussi ne faut-il pas, comme nous allons le voir, trop s'y fier. Cependant, le théorème plusieurs fois proposé $p_m = p_{n-m}$ (voir ci-dessous) est probablement inspiré par ces recherches (Cf. B., *Spz.*, 5^e Partie : « Ora ciascuno degli spazi A sarà intersecato da una e da una soltanto delle sezioni trasverse di $n - m$ dimensioni che fanno parte di quelle che rendono R semplicemente connesso ».) Dans la 4^e Partie se trouve la définition de coupes transversales (sezione trasversa) en variétés à frontière; on exige que la frontière de la coupe transversale tombe entièrement sur celle de la variété. Ensuite on expose comment une variété (si elle est fermée, il faut d'abord la percer) peut par définition continue perdre une dimension, c'est-à-dire que Betti expose ce que nous avons appelé le *diagramme* tout en le considérant seulement comme équivalent à la variété donnée (percée); mais sans remarquer que le diagramme fournit des coupures rendant la variété simplement connexe. Il avance le théorème suivant : « Aucun des nombres de connexion d'une variété fermée n'est modifié par un percement, sauf celui d'ordre le plus élevé, qui est augmenté de s par $s + 1$ percements. »

Dans la 5^e Partie, le théorème suivant est avancé. « Pour rendre simplement connexe au moyen de coupes transversales un

espace R à n dimensions et ayant une frontière, il est nécessaire et suffisant de tracer p_{n-1} coupes transversales à 1 dimension, p_{n-2} à 2, p_{n-3} à 3, ..., et p_1 à $n-1$ dimensions, où $p_1+1, p_2+1, \dots, p_{n-1}+1$ sont les nombres de connexion respectivement d'ordres 1, 2, 3, ..., $n-1$. »

Il faut se rappeler ici la définition d'une coupe transversale : sa frontière doit être située entièrement dans la frontière *primitive* de la variété, c'est-à-dire ne doit pas tomber sur la frontière nouvelle produite par les coupes transversales déjà tracées ; ceci n'est évidemment pas d'un formalisme sans intérêt, car si l'on ne maintient pas cette exigence, il serait absurde de parler d'une condition nécessaire puisque, dans le cas contraire, on peut tracer un nombre infini de coupes la rendant simplement connexe. Si, par exemple, on trace dans la région intérieure à une sphère un canal allant d'un point de la frontière à un autre, l'espace peut être de nouveau rendu simplement connexe par une coupe dont la frontière suit en partie la frontière du canal ; et cette opération peut être renouvelée aussi souvent que l'on voudra.

Bornons-nous pour le moment aux variétés à 3 dimensions, et considérons, par exemple, celle que nous avons désignée comme un espace sphérique à p anses. Ici $p_1 = p_2 = p$. Le diagramme se compose de fils, chacun parcourant son anse et sortant d'une sphère centrale dans l'espace sphérique ; les plaques sont attachées aux fils par des coupes méridiennes, et chacune tranche son anse. Les plaques sont facilement déformées si bien que les bandes se glissent jusqu'à la sphère centrale, et l'on a réellement rendu simplement connexe la variété au moyen de p_2 coupes transversales à 1 dimension et p_1 coupes transversales à 2 dimensions. Prenons ensuite la variété percée ayant comme diagramme un fil sur lequel la bande d'attachement de la plaque parcourt la courbe $[2\beta + \lambda]$; elle peut évidemment être rendue simplement connexe par une certaine coupure linéaire, partant du point percé et y retournant, et par une coupure superficielle dont la frontière parcourt la surface de la ligne de coupure le long d'une ligne $[2\beta + \lambda]$; mais cette coupure superficielle ne peut pas être transformée en une coupe transversale puisque la bande d'attachement ne peut pas être ramenée à la surface de percement seulement. Dans ce cas, comme nous le dirons plus tard, $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$ (avec les dési-

gnations de Betti; avec les dernières désignations de M. Picard $p_1 = 2$, $p_2 = 1$). Ainsi, le théorème ne s'applique pas ici.

Il n'est pas difficile de trouver des fautes dans le raisonnement de Betti. D'abord, il n'est pas prouvé qu'on puisse réduire toute la variété donnée au système A (*voir* les notations de Betti) réuni à des variétés à $n - 2$ dimensions; cela peut se faire dans le premier de nos exemples, mais non pas dans le second. Il ne va pas de soi non plus que les nombres de connexion d'ordres $n - 2$, $n - 3$, ... ne se modifient pas si, de la façon indiquée, on trace une coupure linéaire aboutissant à la frontière primitive; sans doute, ils ne peuvent pas devenir plus petits, mais la coupure linéaire pourrait peut-être les rendre plus grands en empêchant, par exemple, une ligne, formant auparavant frontière, de le faire maintenant. Enfin, il a échappé à son attention qu'il se peut qu'une partie des frontières des coupes suivantes à dimensions plus élevées viennent à parcourir des coupes antérieurement tracées, de sorte que ces coupes-là ne deviennent pas des coupes transversales (au sens de Betti).

Considérons maintenant le théorème souvent mentionné $p_m = p_{n-m}$. Il a été plusieurs fois avancé et employé, mais le premier essai publié pour le prouver se trouve, je crois, chez Poincaré (*A. S.*, p. 33-46). MM. Picard et Simart ont senti avec raison que « peut-être plusieurs points auraient-ils besoin d'être complétés » et se bornent à considérer le cas $m = 1$. Mais ils ne nous semblent même pas avoir réussi à prouver le théorème dans ce cas spécial, et, chose remarquable, la supposition erronée dans le raisonnement paraît être la même que chez Poincaré.

Poincaré définit d'abord un chiffre $N(V, V')$ pour chaque point d'intersection entre deux variétés orientées V à p dimensions et V' à $k - p$ dimensions, lesquelles se trouvent toutes deux dans une variété U à h dimensions. Ces variétés, comme celles qui vont suivre, sont supposées fermées et bilatères. En supposant tout d'abord que V soit à 1 dimension et $V_1, V_2, \dots, V_k$ à $h - 1$ dimensions, on prouve que :

$$1^\circ \text{ Si } \Sigma V_i \sim 0,$$

$$\Sigma N(V, V_i) = 0;$$

2° Si l'homologie

$$\Sigma V_i \sim 0$$

n'a pas lieu, on peut toujours trouver une variété V pour laquelle

$$\Sigma N(V, V_i) \leq 0.$$

Ensuite, on essaie de prouver la même chose si V est à p dimensions et $V_1, V_2, \dots, V_k$ à $h - p$ dimensions (*A. S.*, p. 43). On commence par avancer, comme évident, le théorème suivant : « Quant à $V_1, V_2, \dots, V_k$, nous les définissons de la manière suivante. Nous pourrons toujours trouver $p - 1$ équations

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0,$$

auxquelles satisfont tous les points de $V_1, V_2, \dots, V_k$; pour définir V_i , nous y adjoindrons une $p^{\text{ième}}$ égalité

$$F_i' = 0. »$$

Chacune des variétés $V_1, V_2, \dots, V_k$ pourrait donc être l'intersection complète entre p variétés à $k - 1$ dimensions dans U . Pour $h = n, p = -1$, cette hypothèse coïncide avec celle-ci de MM. Picard et Simart (Chap. II, n° 24) : « Nous admettons que, dans une variété E_n , on puisse toujours, en outre de la continuité et de la connexion linéaire, considérer une variété V_i comme l'intersection commune unique de $n + 1$ variétés V_{n-1} contenues dans E_n . »

Cependant, le commencement du raisonnement peut être fait sans employer l'hypothèse tout entière.

1. Si $\Sigma V_i \sim 0$, cela signifie que dans U peut être tracée une variété U' à $h - p + 1$ dimensions sur laquelle $V_1, V_2, \dots, V_k$ forment frontière. V coupe U' le long d'une courbe fermée V' (ou suivant un système de telles courbes). On a

$$N(V', V_i) = N(V, V_i)$$

et

$$\Sigma N(V', V_i) = 0;$$

donc

$$N(V, V_i) = 0.$$

2. Si, au contraire, l'homologie

$$\sum V_i \sim 0$$

n'a pas lieu, il n'est d'abord pas prouvé qu'une variété U' à $h - p + 1$ dimensions déterminée par $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0$ puisse être tracée par $V_1, V_2, \dots, V_k$; si, cependant, nous considérons ceci comme exact (car il en est probablement ainsi), nous savons sans doute qu'une courbe fermée V peut être tracée dans U' de sorte que

$$\sum N(V', V_i) \geq 0,$$

mais il n'est pas certain que cette courbe puisse être découpée dans aucune variété V . Ici il faudrait donc se servir du théorème mentionné. Si, par exemple, $p = 2$, U' serait de dimension $h - 1$ et pourrait peut-être diviser U en deux parties U_1 et U_2 dont les frontières sont par conséquent U' . Dans celle-ci se trouve V' , et V serait alors divisé en deux parties, chacune dans une partie de U et ayant V' pour frontière. Mais rien ne s'oppose à ce que V' soit précisément une de ces courbes de la frontière qui ne forment frontière avec aucun fragment de surface ni dans U_1 ni dans U_2 .

Le raisonnement pour le théorème $P_p = P_{p-1}$ (p. 44) n'est donc même pas exact pour $h = 1$. Dans ce cas, l'inégalité

$$\mu \leq \lambda$$

est prouvée, sans doute (cf. le théorème analogue $p_1 \geq p_{n-1}$ chez P. et S., Chap. II, n° 26); mais le théorème

$$\mu \geq \lambda$$

n'est par conséquent pas prouvé. Considérons maintenant le raisonnement chez MM. Picard et Simart (Chap. II, n°s 24-27). Nous rencontrons ici, comme nous l'avons dit, la même hypothèse singulière. Le raisonnement du n° 26, où il est prouvé que $p_1 \geq p_{n-1}$, est, comme nous l'avons mentionné, sans doute exact; mais lorsqu'on essaie au n° 27 de prouver le théorème complémentaire, on s'appuie sur l'hypothèse mentionnée. Mais non seulement le théorème n'est pas prouvé : *il ne peut pas être exact*. Nous avons déjà, à plusieurs reprises, considéré une variété à 3 dimensions,

fermée et bilatérale, pour laquelle $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$; attendons cependant un moment plus favorable pour l'examiner ⁽¹⁾.

XIII. — LES ESPACES DE RIEMANN.

Dans la suite, nous considérerons l'infini de notre espace comme un point. Un espace sphérique Σ peut alors être transformé en notre espace P par le procédé suivant : la partie de Σ située *au-dessous* de P est projetée sur celui-ci et transformée par inversion relativement à la sphère de contour; ensuite, la partie restante de Σ , qui se trouve *au-dessus* de notre espace, est projetée sur celui-ci.

Examinons les variétés à 3 dimensions qui naissent lorsqu'on représente sur Σ les valeurs d'une fonction continue des points de celle-ci prenant n valeurs à chaque point. Une telle variété est analogue aux surfaces de Riemann, et c'est pourquoi nous l'appellerons un *espace de Riemann*, P_n . Les n valeurs de la fonction sont supposées différentes, sauf sur certaines courbes fermées (*les lignes de ramification*), sur lesquelles nous supposerons que deux valeurs deviennent les mêmes. Si Σ est transformé en P , celles-ci représentent des courbes fermées que nous restreindrons à rester dans l'espace fini. D'ailleurs nous admettons que P_n forme un ensemble connexe.

Construisons maintenant sur P un espace à n couches, sur lequel les valeurs de la fonction peuvent être représentées uniformément. Traçons une surface conique avec le sommet en un point arbitraire O et avec la ligne de ramification F pour directrice; des génératrices du cône, nous n'emploierons que la partie située entre O et la ligne de ramification. La surface conique aura des génératrices doubles si la ligne de ramification, vue de O , a des points doubles apparents; elles s'étendent de O à la branche de courbe la plus proche. Imaginons qu'il y ait, sur P , n espaces séparés par la surface conique indiquée (*la coupure de ramification*) et que ceux-ci soient numérotés et appelés : 1^{re} couche, 2^e couche, ..., $n^{\text{ième}}$ couche. Sur les n points correspondants

⁽¹⁾ Voir la note, page 234.

(Note du Traducteur.)

à un point arbitraire de P sont placées les n valeurs $z_1, z_2, \dots, z_n$ de la fonction; en partant de ces valeurs, nous pouvons maintenant faire correspondre d'une façon unique et continue les valeurs de la fonction aux points des n couches. Ces dernières sont alors rejointes selon les valeurs que z prend des deux côtés de la coupure. La variété fermée ainsi construite est appelée P_n . (La fonction potentielle d'un courant électrique offre quelques ressemblances avec les fonctions mentionnées; seulement, là, n est infiniment grand. La coupure de ramification peut être formée par la couche magnétique qui peut remplacer le courant électrique.)

Si, lorsqu'on décrit une courbe fermée autour de l'une des courbes de ramification, chaque valeur de z revient à sa valeur primitive; alors cette courbe peut être laissée entièrement hors de considération (*cf.* Points doubles sur les courbes algébriques). Toutes les autres courbes de ramification sont supposées simples, c'est-à-dire que deux, et deux seulement, des valeurs de z se permutent autour de chacune d'elles.

Quelquefois, on joint deux faces de coupure appartenant à la même couche; c'est le cas de toutes les faces à proximité d'un point de la courbe de ramification, sauf celles qui appartiennent aux couches qui se permutent lorsqu'on fait le tour de la courbe de ramification près du point considéré. Supposons qu'au point déterminé, les coupures de la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ couche se joignent alternativement; si de ce point on pénètre sur la surface de la coupe de ramification, ce sera toujours, forcément, les mêmes deux couches qui se relient alternativement jusqu'à ce qu'on rencontre l'un des générateurs doubles mentionnés. On peut alors délimiter une partie de la surface conique pour les points de laquelle la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ couche, et celles-ci seulement, sont reliées alternativement. Cette partie de la surface conique est limitée par *un arc ab de la courbe de ramification et par deux génératrices doubles Oa et Ob* , et dans cette partie pénètrent peut-être sous forme de rayons une ou plusieurs génératrices doubles qui n'atteignent pas tout à fait ab . Il existe autant de parties de cette espèce que la surface conique possède de génératrices doubles (h).

Aux point a et b , la courbe de ramification est arrêtée par des

surfaces venant l'une d'une branche A de la courbe de ramification, l'autre d'une branche B; nous disons que l'arc ab est arrêté par les branches A et B. Chaque arc ab est marqué avec les numéros des deux couches r et s qui sont reliées l'une avec l'autre par la partie de la surface conique limitée par l'arc ab ; r et s sont appelées les *caractéristiques* de l'arc.

Pour illustrer d'une façon schématique ce qui se passe le long d'une ligne double, nous traçons sur le papier deux lignes perpendiculaires qui représenteront deux branches de F; l'une est supposée au-dessus de l'autre et O est supposé situé derrière le point d'intersection apparent des lignes. La coupure de ramification s'étend jusqu'au-dessous du papier, de sorte que la coupure pour la ligne inférieure perce celle de la ligne supérieure; celle-ci arrête donc les deux branches de l'autre. Soient r et s les caractéristiques de la ligne supérieure. Trois cas peuvent alors se présenter :

Premier type. — L'une des branches de la ligne inférieure a les mêmes caractéristiques, r et s .

Deuxième type. — Une de ses caractéristiques est r , mais l'autre est t différente de s .

Troisième type. — Les deux caractéristiques t et u sont différentes de r et s .

Déterminons les caractéristiques pour l'autre branche de la ligne inférieure. Une circulation autour de cette branche peut être modifiée de façon qu'on perce d'abord la coupure de ramification de la ligne supérieure, ensuite celle de la première branche et, enfin de nouveau, celle de la ligne supérieure en direction opposée. En partant de la $r^{\text{ième}}$ couche, on pénétrera, si le point est du premier type, successivement dans la $s^{\text{ième}}$ et la $r^{\text{ième}}$, finissant dans la $s^{\text{ième}}$. De cette façon les caractéristiques sont déterminées comme le montrent les tableaux suivants.

Premier type.

	On commence dans	parcourt	fini dans	Carac- téristique.
$ \begin{array}{c} rs \\ \\ rs \text{ --- } \text{ --- } rs \\ \\ rs \end{array} $	r	s, r	s	$\left. \begin{array}{c} s \\ r \\ t \\ u \end{array} \right\} rs$
	s	r, s	r	
	t	t, t	t	
	u	u, u	u	

Deuxième type.

$ \begin{array}{c} rs \\ \\ rt \text{ --- } \text{ --- } st \\ \\ rs \end{array} $	r	s, s	r	$\left. \begin{array}{c} s \\ t \\ s \\ u \end{array} \right\} st$
	s	r, t	t	
	t	t, r	s	
	u	u, u	u	

Troisième type.

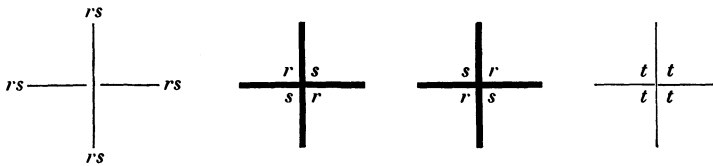
$ \begin{array}{c} rs \\ \\ tu \text{ --- } \text{ --- } tu \\ \\ rs \end{array} $	r	s, s	r	$\left. \begin{array}{c} s \\ s \\ u \\ t \end{array} \right\} tu$
	s	r, r	s	
	t	t, u	u	
	u	u, t	t	

Traçons une petite surface sphérique α autour de O ; elle rencontre la coupure de ramification suivant une courbe C qui devient ainsi la projection centrale de F sur α et qui divise α en ω régions; elle a h points doubles. (Puisque le nombre d'arcs de ab est $2h$, nous avons par le théorème d'Euler $\omega = h + 2$, dans le cas où la ligne de ramification ne contient qu'une courbe.) Le système de surfaces de P_n découpé par α doit se composer de n surfaces sphériques simples séparées les unes des autres. Sur n surfaces sphériques de même rayon que α , nous tracerons des lignes correspondant au système C ; dans n des régions correspondantes, une sur sphère, nous écrivons les nombres $1, 2, \dots, n$ et nous donnons à chacune des sphères elles-mêmes des désignations conformes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; nous appelons les n systèmes de lignes $C_1, C_2, \dots, C_n$.

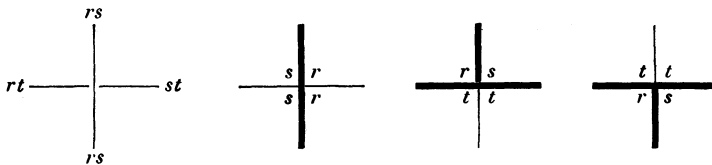
Les caractéristiques sur F sont projetées sur les arcs correspon-

dants de C. Supposons maintenant que les n sphères dans P_n entourant le point O soient enlevées et représentées chacune sur l'une des sphères $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Le numérotage peut être effectué de façon que α_i soit la sphère pour laquelle la région marquée i corresponde à des points de P_n de la $i^{\text{ème}}$ couche. A l'aide des caractéristiques, il est maintenant facile d'introduire dans toutes les régions sur les sphères des chiffres indiquant à quelle couche la région en question appartient. Les arcs de $C_1, C_2, \dots, C_n$ séparant des champs différemment marqués sont tracés en gros; les chiffres qui se trouvent dans les régions séparées par elles sont alors les caractéristiques. Si l'on place les n sphères de façon qu'elles se couvrent, les lignes tracées en gros composeront la ligne C comptée deux fois.

Examinons sur chaque surface sphérique la frontière des quatre régions se rencontrant au point qui correspond à un point déterminé des points doubles de C. Des tableaux ci-dessus, nous tirons la conclusion que, si le point est du *premier type*, alors, sur deux des sphères, on sera alternativement dans la $r^{\text{ème}}$ et dans la $s^{\text{ème}}$ couche, tandis que sur les autres sphères on reste dans la même couche :

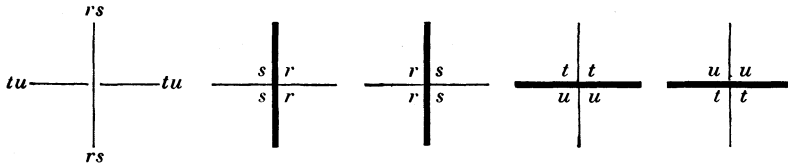


Si le point est du *deuxième type*, on reste sur $n-3$ sphères dans la même couche; les autres ont l'aspect suivant :



Si, enfin, le point est du *troisième type*, on restera sur $n-4$ sphères dans la même couche, tandis que les autres auront l'aspect

suivant :



Dans tous les cas, dans la série de points doubles correspondant à un point double déterminé sur α , il y aura *deux points et deux seulement pour lesquels la branche qui traverse le point et qui correspond à la branche inférieure sur F est marquée en gros*. Par un des autres $n-2$ points doubles ne passe aucune branche marquée en gros, ou bien il en passe une seule correspondant à la partie supérieure de la ligne de ramification.

Essayons, après ces préliminaires, de former le diagramme de P_n . Pour commencer, nous perçons *toutes* les n couches, par exemple aux points à l'infini. P_n est maintenant limité par n surfaces sphériques de rayons très grands. Nous ferons varier ces surfaces de façon qu'elles correspondent toujours à la même surface de P ; celle-ci peut être supposée déformée en une surface construite de la manière suivante : dans les régions de α on trace des courbes fermées qui suivent de près les branches de C et qui passent d'une branche à l'autre aux points doubles. α est ainsi divisé en ω éléments simplement connexes et en un système de bandes enfermant C . Ensuite, nous enfermons la coupure de ramification dans une surface partant des courbes fermées et la serrant comme un capuchon, une surface qui se recourbe le long du bord de la coupe de ramification et qui revient sur elle-même. On construit alors la surface mentionnée en fermant le capuchon par les ω éléments de surface de α . Le cours de la surface à travers une ligne double peut être clairement réalisé si l'on dresse, par exemple, sur une table, un livre in-quarto, le dos en haut, en dressant des deux côtés deux autres livres in-octavo et pareils entre eux. Ceux-là doivent également avoir les dos en haut et doivent former un angle droit avec le premier de façon que l'un semble être la continuation de l'autre. La surface de la table correspond alors à une partie de α .

Après les n percements, P_n peut être réduit à une variété com-

posée des n couches correspondant à la partie de P limitée par la surface mentionnée. De cette variété nous avons déjà retiré n sphères que nous avons placées dans les positions $x_1, x_2, \dots, x_n$; il s'agit maintenant de réduire la partie qui reste à une forme simple et de la rattacher à ces sphères.

Autour de chaque ligne double, nous déterminons dans P un solide en forme de prisme; c'est dans l'exemple cité le solide découpé du livre in-quarto si l'on s'imagine les livres in-octavo continués à travers celui-ci. Si la courbe C a en tout h points doubles, l'espace Λ limité par la surface du capuchon et par le système de bandes de k renfermera h prismes pareils. Le reste de Λ se compose de h solides en forme de plaques. Ceux-ci doivent être attachés aux branches et de haut en bas le long de deux côtés de certains prismes; enfin, ils sont limités par deux prismes, tandis que le reste du bord court librement le long d'une partie de F .

La portion de P_n qui correspond à l'un des prismes se compose de $n - 2$ prismes coïncidents séparés les uns des autres et d'un prisme double (à double couche) traversé par une ligne de ramification; ce dernier se transforme facilement en un prisme simple (à une seule couche). Ces prismes doivent maintenant être rattachés aux sphères; pour trouver commodément les points auxquels ils doivent être attachés, nous adjoindrons de chaque côté de C , à côté des caractéristiques primitives, deux caractéristiques nouvelles indiquant les courbes des deux sphères sur lesquelles l'arc est tracé en gros; nous appellerons celle-ci *les caractéristiques dérivées*. Pour les déterminer sur une branche donnée, on passe par un chemin quelconque d'un point de la branche jusqu'à un point de la région au moyen de laquelle les sphères ont été numérotées. On commence le parcours en emportant les caractéristiques de la branche, et chaque fois que l'on passe par une branche où une caractéristique concorde avec l'un des deux chiffres qu'en ce moment on porte avec soi, celui-ci est échangé avec l'autre caractéristique de la branche. Les caractéristiques dérivées doivent alors être les deux chiffres avec lesquels on entre dans la région fondamentale. Conformément aux idées que nous venons de développer, les caractéristiques dérivées doivent être égales sur les deux branches passant par un point double qui correspondent à la

branche inférieure de F. Prenons maintenant les $(n - 2) + 1$ prismes qui correspondent à une ligne double déterminée; ils doivent être joints aux sphères $x_1, x_2, \dots, x_n$ aux n points doubles correspondant à la ligne double. Chaque bout du prisme simple provenant d'un prisme double doit être joint à une sphère, c'est-à-dire doit réunir les deux sphères dont les numéros sont indiqués par les caractéristiques dérivées correspondant à la branche inférieure de F. Les autres $n - 2$ prismes sont rejoints, chacun par un de ses bouts, au point double de l'une des sphères restantes, et ainsi de suite.

Il ne nous manque maintenant que les portions de P_n correspondant aux h plaques dans P. A chacune de celles-ci correspondent dans P_n , $n - 2$ plaques simples séparées les unes des autres et une plaque double avec une branche ab de F pour ligne de ramification. Celle-ci peut être transformée en une plaque simple (à une couche). Le premier groupe de plaques doit être attaché aux sphères le long des bandes correspondant aux arcs qui ne sont pas tracés en gros, et pour ce qui reste, aux prismes. Puisqu'elles ont toutes un bord libre, elles peuvent être entièrement retirées et ne jouent plus aucun rôle. Les plaques de l'autre groupe, au nombre de h , doivent être attachées par leurs bords : 1° le long des bords tracés en gros ; 2° de haut en bas, le long de deux côtés des prismes qui ont un bout de libre ; 3° le long des prismes qui réunissent les sphères, elles n'auront pas de bords libres. Les prismes mentionnés sous 2° peuvent être incorporés dans les plaques.

Pour former le diagramme (correspondant d'abord à n perçements), on peut donc procéder comme suit : d'abord on note les arcs de C munis d'une caractéristique déterminée; ils vont d'un point double où la branche correspondante de F est la branche inférieure jusqu'au point double où la même chose arrive la prochaine fois. Sur les n sphères $x_1, x_2, \dots, x_n$, on trace alors les lignes fortes à l'aide des caractéristiques dérivées. (Comparer les dessins schématiques, p. 225, et le passage en italique p. 226.) Ces deux caractéristiques indiquent les numéros des deux sphères sur lesquelles se trouvent les points doubles auxquels les bouts du fil leur appartenant doivent être attachés; nous appellerons ces deux points : *les points de jonction* appartenant au point double. Les dessins schématiques montrent le cours de la ligne tracée en gros aux points

de jonction pareils suivant que le point double est du premier, du deuxième, ou du troisième type. A chaque arc de la ligne ab correspond une plaque ; il est facile de déterminer sur les sphères et sur les fils (les prismes), la ligne le long de laquelle le bord de la plaque doit être attaché. Sur ab nous fixons une direction positive de a à b , et alors sur tous les arcs tracés en gros qui correspondent en leur ensemble à ab pris deux fois, une direction positive se trouvera fixée. Partons maintenant d'un des points de jonction correspondant à a et parcourons la branche correspondant à ab qui part de ce point ; suivons celle-ci jusqu'à ce que, allant toujours dans la direction positive, nous rencontrions un point de jonction correspondant à b ; cependant, chaque fois qu'auparavant nous rencontrons un point de jonction, nous passerons le long du fil à l'autre sphère. Au point de jonction qui correspond à b , nous passerons le long du fil à l'autre point de jonction, et nous parcourons de même que tout à l'heure, mais cette fois en direction négative, les arcs qui restent, jusqu'à ce que nous arrivions à l'autre point de jonction correspondant à a . On ferme la courbe en parcourant le fil qui aboutit à ce point.

Pour obtenir que le diagramme corresponde à un seul perçement, on n'a qu'à percer et ensuite enlever $n - 1$ plaques convenablement choisies ; le diagramme qui consiste maintenant en n sphères réunies par h fils et $h - n + 1$ plaques est réduit de la manière ordinaire à un diagramme à une sphère centrale, $h - n + 1$ fils, et $h - n + 1$ plaques.

Jusqu'à ce point, l'examen a pu être effectué d'une façon tout à fait analogue à celui des surfaces de Riemann (p. 194 et suiv.). Pour ces dernières, le nombre de connexion pouvait être déterminé sur la base des éléments trouvés ; mais pareille chose ne peut pas être faite ici. Une des causes a déjà été mentionnée ; en outre, il faut remarquer que, tandis que le nombre de connexion pour les surfaces de Riemann ne dépend que du nombre des feuillettes et des lignes de ramification, les nombres de connexion pour les espaces de Riemann dépendent (sans compter le nombre des couches, celui des lignes fermées constituant en leur ensemble le système de ramification, les enlacements et les nœuds de celle-ci) *en outre* des caractéristiques, auxquelles on peut en général, dans une certaine mesure, donner des valeurs indépendantes des

premiers nombres. Nous ne pousserons donc pas plus loin l'étude des généralités ; nous nous bornerons à considérer quelques exemples simples.

Il sera commode d'imaginer que la courbe de ramification est infiniment près d'être plane. Cela peut se faire, puisque la connexion de la variété ne se modifie pas par des déplacements continus de la ligne de ramification, pourvu qu'aucune partie ne vienne à couper une autre partie. Il est à recommander d'enlever tous les enlacements et nœuds qui peuvent être enlevés. On se figurera aussi, sans difficulté, les n sphères transformées en disques circulaires situés les uns au-dessous des autres sous le plan, qui est parcouru maintenant par la ligne de ramification ; comme courbes $C_1, C_2, \dots, C_n$, nous pouvons choisir les projections de F sur les faces supérieures des disques. En un point double du troisième type, peu importe la branche que l'on s'imagine en haut.

XIV. — APPLICATIONS.

1. Si $n = 2$ et si F se compose d'une courbe simple, fermée, et sans nœuds, le diagramme devient un point. P_2 est équivalent à un espace sphérique.

2. La ligne de ramification se compose de deux courbes simples, fermées, sans nœuds, et non enchaînées ; $n = 2$. D'abord, on obtient deux corps en forme de tuyaux reliant les deux disques centraux (si d'un point sur un disque central *intérieur* à la ligne d'attachement du tuyau, on sort sur l'autre disque central en *dehors* de la ligne d'attachement du tuyau). Un des tuyaux doit être percé, et il est ainsi réduit à un fil. Le diagramme est un fil circulaire auquel la plaque est adjointe le long d'une courbe méridienne.

3. La ligne de ramification se compose de ν courbes simples, fermées, sans nœuds, et non enchaînées ; l'espace est supposé à n couches, et les caractéristiques des lignes de ramification sont choisies de façon qu'il soit connexe. Le diagramme est formé par n disques réunis par $\nu - n + 1$ tuyaux de l'exemple précédent, et par $n - 1$ fils. Puisque la surface est équivalente à la surface d'une sphère, on peut déformer les fils de façon que le premier

aille de x_1 à x_2 , le suivant de x_2 à x_3 , ..., le dernier de x_{n-1} à x_n . Les fils et les disques sont alors rassemblés en une sphère centrale. Il n'y a aucune difficulté à voir que chaque tuyau peut être transformé en un fil auquel est adjoit une plaque le long d'une courbe méridienne. L'espace donné est équivalent à un espace sphérique muni de $v - n + 1$ anses.

4. La ligne de ramification est une courbe fermée formant un nœud simple; $n = 3$. La projection aura l'aspect d'une courbe de quatrième ordre à trois points doubles sans nœuds; tous trois seront du deuxième type. La construction du diagramme est une simple application de la théorie précédente, et nous nous bornerons à citer le résultat : on obtient un fil auquel la plaque est attachée le long d'une courbe de latitude; le diagramme se réduit donc à une sphère centrale, et la variété proposée est *équivalente à un espace sphérique*.

5. Même ligne de ramification qu'au n° 4, mais $n = 2$. Les trois points doubles seront du premier type; le diagramme est un fil auquel la plaque est attachée le long d'une courbe $[3\beta + \lambda]$.

6. La ligne de ramification se compose de deux courbes fermées, sans nœuds et s'entrelaçant simplement; $n = 2$. La projection peut être formée de deux cercles qui s'entrecoupent; les deux points doubles sont du deuxième genre. Le diagramme est un fil auquel la plaque est attachée le long d'une courbe $[2\beta + \lambda]$.

Appliquons ce que nous venons d'avancer à la théorie des surfaces algébriques. Le voisinage d'un point général de la surface est limité par un espace équivalent à un espace sphérique. Nous allons déterminer la nature de la frontière si le point est singulier. Comme frontière du voisinage d'un point dans **T**, on peut prendre un espace sphérique, mais souvent il sera commode, au lieu d'opérer ainsi, de déterminer le voisinage comme la variété à 4 dimensions décrite par une sphère dans **P** lorsque sur celle-ci on place tous les chiffres de cote d'un chiffre α à un chiffre β .

7. *Le voisinage d'un point ordinaire sur la surface de ramification de la variété à quatre dimensions représentant une*

surface algébrique (voir p. 188) est équivalent à un espace sphérique. La frontière est formée par l'espace de Riemann mentionné dans l'exemple 1.

8. Soit le point *un point de ramification de première espèce sur la courbe de ramification.* Le voisinage est limité par un espace de Riemann à trois courbes ; la ligne de ramification est une courbe fermée, faisant deux tours sur la surface de ramification avant de se fermer, mais ne formant pas de nœud ; elle peut donc être transformée en une simple courbe fermée. L'exemple 1 montre que la *frontière est équivalente à un espace sphérique.*

9. Soit le point *un point de ramification de deuxième espèce.* La ligne de ramification forme un nœud simple. Le point se présente quand une tangente principale de la surface algébrique devient parallèle à l'axe des Z ; Puisque la tangente coupe la surface en trois points coïncidents, on aura un espace de Riemann à trois couches.

La frontière est formée par un espace de Riemann comme celui de l'exemple 4 ; elle est donc *équivalente à un espace sphérique.*

10. Supposons que la surface algébrique ait un *point double isolé* dont le cône des tangentes soit une surface irréductible du deuxième ordre. Pour examiner le voisinage d'un tel point, il suffit d'examiner le voisinage du sommet d'une surface conique irréductible du deuxième ordre. La section de celle-ci par le plan XY se compose de deux droites se coupant au sommet ; elles sont représentées dans T par deux plans coupant suivant deux courbes fermées un espace sphérique Σ dont le centre est à l'origine. Si l'espace sphérique est transformé en P de la manière indiquée ci-dessus, on voit facilement que ces courbes deviennent deux courbes simples, simplement enchaînées (exemple 6). Car les courbes qui, dans Σ , correspondent aux deux courbes fermées sont deux ellipses dont celle qui correspond à la plus grande valeur du coefficient de direction renferme l'autre, puisque les projections sur le plan X, Y , sont des cercles concentriques. Les deux

moitiés des ellipses portant des chiffres de cote négatifs sont inverties ; et ainsi, la branche auparavant en dedans est placée en dehors.

Si l'on désire une définition analytique de cette variété, on n'a par exemple qu'à décomposer

$$z^2 = x^2 - y^2$$

en ses parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned} z_1^2 - z_2^2 &= x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 + y_2^2, \\ z_1 z_2 &= x_1 x_2 - y_1 y_2, \end{aligned}$$

en y ajoutant l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

Ceci montre que la variété est de celles auxquelles la théorie topologique de Poincaré-Picard doit être applicable, ce qui ressort aussi d'ailleurs de nos recherches antérieures ⁽¹⁾.

Le voisinage de chacun des points mentionnés dans les exemples 7, 8 et 9 est une variété élémentaire à 4 dimensions. On peut le voir facilement en construisant, par exemple, un faisceau à 3 dimensions de courbes rayonnant du point examiné par nous, de façon que, par chaque point de la variété, il passe une et une seule courbe ; si une courbe contient un point de la surface de ramifi-

(¹) Si une surface S présente des singularités, on la transforme d'abord birationnellement en une surface S' sans singularités située dans un espace à un nombre suffisamment élevé de dimensions. On pourrait objecter que la topologie de S' dépend en quelque sorte de la transformation employée, puisque certains points ordinaires de S peuvent être transformés en courbes de S' et *vice versa*. Mais M. Enriques a démontré que si S' n'appartient pas à la famille des réglées, elle possède un nombre fini de courbes (les courbes exceptionnelles) qui peuvent être transformées en des points ordinaires et que ces courbes peuvent être enlevées successivement par des transformations birationnelles. Ainsi, on ramène la surface S à une surface canonique sans singularités et sans courbes exceptionnelles. Même si la surface ne possède pas de singularités, il faut se débarrasser des courbes exceptionnelles si l'on veut obtenir des caractères topologiques jouant le rôle d'invariants.

Pour les surfaces de la famille des réglées, on trouve des formes normales en faisant d'autres conventions. (*Note du Traducteur.*)

cation, elle doit avoir son cours entièrement dans celle-ci, et de même si elle contient un point d'une ligne double de la surface de ramification. Si ensuite la frontière du voisinage est transformée en un espace sphérique Σ dans $\mathbf{T}$, le voisinage lui-même peut être transformé en la partie de $\mathbf{T}$ intérieure à Σ en faisant correspondre les courbes du faisceau mentionné aux rayons de Σ passant par les points qui correspondent aux points finaux des courbes. D'ailleurs, cela résulte aussi du fait que, par un déplacement de la surface par rapport au système de coordonnées, on peut obtenir que le point ne se trouve plus sur la surface de ramification.

On ne peut pas faire cela pour un point multiple isolé de la surface algébrique, et nous avons déjà vu (exemple 10) que le voisinage d'un point double isolé, point conique à cône de tangentes irréductible, n'était pas une variété élémentaire. La frontière était équivalente à P deux fois couvert, la ligne de ramification était formée par deux cercles simplement enchaînés. C'est la même variété que nous avons rencontrée à plusieurs reprises. On pourrait aussi la représenter par la jonction de deux tores, en joignant les courbes de latitude et méridiennes de l'une avec les courbes $[\beta]$ et $[2\beta + \lambda]$ de l'autre. Le diagramme est fermé par un fil auquel la plaque est attachée le long de la ligne $[2\beta + \lambda]$.

Nous allons maintenant prouver, comme nous l'avons annoncé, que cette variété a les nombres de connexion $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ ⁽¹⁾.

(1) D'après la définition de Poincaré, une variété V est homologue à 0

$$V \sim 0,$$

si la variété comptée n fois forme frontière, n étant un entier quelconque. En employant cette définition, le théorème de Poincaré et Picard qui vient d'être énoncé et le théorème que $p_{n-1} = p_1$ sont sans doute exacts.

Dans son premier Mémoire sur l'*Analysis situs*, Poincaré ne s'est sans doute pas aperçu que de

$$V \sim 0$$

on ne pouvait pas conclure que la variété V était frontière, ce qui explique les erreurs signalées par M. Heegaard. La question a été reprise par Poincaré (2° et 3° compléments, *loc. cit.*) et les théorèmes en question mis hors de doute.

[Il serait peut-être bien de remarquer que, lorsque Poincaré étudie une variété en la découpant en un polyèdre et en étudiant à l'aide de certaines équations

Pour trouver les courbes fermées qui ne peuvent pas être déformées en un point, nous observons que toute courbe fermée de la variété peut être amenée à prendre son cours entièrement dans le fil du diagramme. On peut supposer qu'elle circule toujours dans la même direction et sans former de nœuds. Une courbe qui parcourt le fil deux fois avant d'être fermée peut alors être amenée à prendre son cours entièrement sur la bande ; elle peut donc être déformée en un point à travers la plaque. Si la courbe fait $2p$ fois le tour, on peut successivement éliminer et enlever p fois deux tours qui se succèdent. La courbe peut ainsi être ramenée à un point. Si la courbe fait $2p + 1$ tours, on la ramène à une courbe faisant un tour. *Celle-ci ne peut pas être déformée en un point.* Supposons que la courbe limitait un élément de surface bilatère de la variété. Nous perçons dans celle-ci un canal en forme de tuyau le long de la courbe ; ainsi la variété aura pour frontière une surface de tore. Si nous nous figurons la variété définie par la jonction de deux surfaces de tore, de la façon ci-dessus indiquée ce canal fera une fois le tour d'un de ces tores, et l'élément de surface sera limité par une courbe de latitude de la surface du canal. Mais du moment que nous avons percé ce canal, nous pouvons déformer la variété en un tore situé dans P : dans celui-ci, se trouve l'élément de surface mentionné, limité par une courbe de latitude sur la surface du tore. Cette courbe de latitude fait une fois le tour de l'axe du tore et, en même temps, elle limite un élément de surface dans le tore, c'est-à-dire un élément de surface dans P qui ne coupe pas l'axe du tore ; ce qui est impossible. Donc $p_1 = 2$.

Toutes les surfaces fermées de la variété (qu'elles soient bilatères ou unilatères) peuvent être amenées à prendre leurs cours entièrement dans le diagramme, et les parties qui se trouvent dans la plaque peuvent être déformées en de simples éléments de surface dont le bord est dans le bord de la plaque et qui sont ainsi

linéaires les sous-variétés de diverses dimensions que l'on obtient en combinant les éléments du polyèdre, ces sous-variétés *ne satisfont pas à la définition de variété donnée par lui*, car elles auront en général des singularités. Au fond, ce fait est sans importance, car dans le voisinage d'une variété ayant des singularités, on peut en former une autre sans singularités.]

(Note du Traducteur.)

rattachées à la partie restante de la surface par la bande d'attachement de la plaque. Si la surface n'a qu'un seul élément de surface couvrant la plaque, le bord de celui-ci sera une courbe $[2\beta + \lambda]$ sur la surface du fil; cette courbe limitera donc une portion de surface située dans le fil; mais il n'existe aucune surface *bilatère* dans le fil qui ait cette courbe comme frontière, puisque la courbe circule deux fois autour de l'axe du tore dans la même direction. Par contre, l'élément de surface peut être fermé par la surface *unilatère* de Möbius. Si ensuite la surface a plusieurs éléments dans la plaque, on peut en percer deux qui se succèdent et réunir les bords par un tuyau; si la surface primitive n'était pas frontière, la nouvelle ne l'est pas non plus. S'il y en a un nombre pair d'éléments de surface dans la plaque, toutes ces plaques peuvent être soumises à cette opération, deux à deux, après quoi, elles sont toutes facilement poussées hors de la plaque de façon que la surface soit entièrement dans le fil. S'il y en a un nombre impair, on peut de la même manière les enlever tous excepté 1, et l'on est ramené au cas mentionné au commencement où, comme nous l'avons vu, la surface devait être unilatère. Si donc il doit se trouver dans notre variété une surface fermée et bilatère qui ne soit pas frontière, il doit s'en trouver une telle dans le fil; mais chaque surface fermée et bilatère dans le fil peut être ramenée soit à un point soit à un point duquel partent des courbes retournant au point; c'est-à-dire que toutes surfaces pareilles sont homologues à 0. Donc $p_2 = 1$.

Nous voyons donc que *la variété représentant une surface algébrique avec des points multiples isolés contient des points pour lesquels le voisinage n'est pas une variété élémentaire*. Nous appellerons de tels points des *points singuliers topologiques*.

Mais les variétés définies par Picard et Poincaré ne contiennent que des points dont l'entourage est simplement connexe (*P. et S.*, Chap. II, nos 2 et 3; *Poinc., A. S.*, § 2 et 3), c'est-à-dire ne possèdent pas de points singuliers topologiques. Que devient alors le théorème : « Toute surface algébrique à singularités arbitraires correspond birationnellement à une surface qui n'a d'autres singularités qu'une courbe double à points triples, ces singularités étant les plus générales de leur espèce ? » (*P. et S.*, Chap. IV, no 8). Dans le premier cas, on peut toujours trouver des singula-

rités topologiques, mais, comme c'est facile à voir, dans le second cas, on n'en trouve point. On découvre facilement l'explication de ce fait en suivant les transformations par lesquelles la surface est réduite à la forme mentionnée. Un point multiple isolé devient un point singulier pour la transformation, de sorte qu'il correspondra à une courbe algébrique ne passant pas par des points multiples. La frontière du voisinage du point double est alors équivalente à l'enveloppe de la courbe algébrique correspondante. Dans la théorie de M. Picard, les surfaces sont ainsi débarrassées de leurs points singuliers topologiques.

Au point de vue topologique, il y a donc une différence essentielle entre les surfaces de Riemann et les variétés qui représentent les surfaces algébriques. Car tandis que sur celles-là le voisinage de chaque point est une variété élémentaire (la surface tournant autour d'un point de ramification en est une aussi), il n'en est pas toujours ainsi pour celles-ci. Pour les coordonnées du voisinage de chaque point d'une courbe algébrique, on forme facilement des développements en séries holomorphes d'un paramètre, mais on n'a pas réussi à représenter les coordonnées du voisinage de chaque point d'une surface algébrique par de telles séries à deux paramètres, et ceci est évidemment lié à l'existence de pareils points singuliers. Au théorème : « Par un système limité de pareilles séries on peut représenter tout le voisinage de chaque point sur la surface », correspond cet autre : « Le voisinage d'un point singulier topologique peut être obtenu en rassemblant un nombre fini de variétés élémentaires »; ceci résulte de ce que la frontière puisse être obtenue en rassemblant un nombre fini de variétés élémentaires. (Le cône ayant pour sommet le point et pour directrice le diagramme de la frontière rendra, comme coupe, le voisinage simplement connexe.)

Désignons la surface primitive par f , et celle que nous obtenons en débarrassant f de ses points singuliers topologiques par F ; nous pourrions nous poser le problème de construire la variété qui représente f , connaissant celle qui représente F . On cherche les surfaces fermées qui correspondent sur f à chaque point multiple isolé et aux autres points fondamentaux de la transformation. On découpe le voisinage de ces surfaces fermées et l'on referme la variété en ajoutant des variétés équivalentes aux voisinages des

points correspondants de f . Les points de F qui sont des points singuliers de la transformation sont traités de la manière opposée.

Dans l'exemple que nous venons de considérer, nous avons réussi à trouver, à partir du diagramme, les nombres de connexion. Dans sa généralité, ce problème est évidemment difficile à résoudre ⁽¹⁾. Cependant le diagramme peut servir à trouver des *limites supérieures pour les nombres de connexion*, mais la difficulté consiste à juger si les variétés trouvées à l'aide du diagramme, et qu'on suppose homologiquement indépendantes, le sont en réalité. *La théorie des intégrales peut servir ici comme un expédient* (cf. *P. et S.*, Chap. IV, n° 9), *mais elle n'est pas suffisante*. Car le théorème général avancé par Poincaré et Picard : « Le nombre de périodes linéairement indépendantes des intégrales (définies de la manière la plus générale) prises le long de variétés fermées à m dimensions est $p_m - 1$ (POINCARÉ, *A. S.*, § 7, fin; *P. et S.*, Chap. II, n° 16) n'est pas exact ⁽²⁾. On se rappelle que, dans l'exemple plusieurs fois cité, il existait une courbe ne formant pas frontière. Or, toutes les intégrales prises le long de cette courbe doivent être nulles; car si l'on parcourt deux fois la courbe, on obtient une courbe qui peut être déformée en un point; donc, l'intégrale doit être zéro. On y voit aussi que l'on ne peut pas toujours conclure de l'homologie $2V \sim 0$ que $V \sim 0$ (POINCARÉ, *A. S.*, p. 19, l. 4).

⁽¹⁾ On peut résoudre le problème immédiatement maintenant à l'aide des méthodes plus récentes de Poincaré [2° et 3° compléments à l'*Analysis situs*; *Rendiconti di Palermo*, 13 (1899), et *Proceedings of London Math. Soc.*, 32 (1900)]. Car, du diagramme de M. Heegaard, on déduit tout de suite les Tableaux de Poincaré qui donnent facilement les nombres de connexion.

(Note du Traducteur.)

⁽²⁾ On doit se mettre en garde contre l'erreur de conclure que toute courbe qui est frontière peut être ramenée à un point par déformation continue. Pour qu'une courbe puisse être ramenée à un point, il faut qu'elle soit frontière d'un élément de surface *simplement connexe* (avec peut-être des singularités). Une courbe peut très bien être frontière d'une surface sans être frontière d'un élément. Voir la variété ayant les nombres de connexion $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1$ et sans torsion qui n'est cependant pas homéomorphe à l'hypersphère [POINCARÉ, 4° complément à l'*Analysis situs* (*Rendic. di Palermo*)].

(Note du Traducteur.)

REMARQUES FINALES.

Il semblerait peut-être inutile d'essayer de former une théorie topologique de la connexion des surfaces algébriques si l'on n'a même pas réussi à résoudre dans toute sa généralité le problème des variétés à 3 dimensions. Il faut remarquer, cependant, que la variété à 4 dimensions qui représente une surface algébrique est une variété *spéciale* et que l'on peut s'attendre à ce qu'elle soit relativement simple au point de vue topologique. Le théorème de M. Picard : « Sur une surface algébrique sans points multiples, il n'y a pas de lignes fermées ne formant pas frontière » fait penser à quelque chose de ce genre (*P. et S.*, Chap. IV, § III).

Je n'ai pas encore pu obtenir un résultat complet; j'avancerai seulement, pour terminer, quelques remarques détachées. Ce qui m'a décidé à publier ces études préliminaires, c'est d'un côté le sentiment que l'on devait chercher à pénétrer les autres points de vue de nature transcendante, algébrique et de géométrie énumérative qui ont *présidé* à l'étude des surfaces algébriques; *d'un autre côté*, c'est la publication du Livre de MM. Picard et Simart, aussi bien à cause des parties de celui-ci qui ne sont pas d'accord avec mes propres recherches qu'à cause de celles qui les confirment.

Pour déterminer la connexion du plan, nous nous sommes placés au point de vue projectif en ce qui concerne les points à l'infini; *nous ne pouvons donc pas aboutir au même résultat que M. Picard* (*P. et S.*, Chap. IV, n° 9). D'après sa définition, la région infinie du plan est composée : 1° d'un ensemble de points $x = \infty$, y arbitraire, limité; 2° d'un ensemble de points x arbitraire, limité, $y = \infty$; 3° du point $x = \infty$, $y = \infty$. Nous considérons chacun des deux ensembles comme un point (les points à l'infini sur l'axe des X et sur l'axe des Y), et en tenant compte des différentes valeurs de la limite $\frac{y}{x}$ lorsque x et y augmentent indéfiniment, nous obtenons tout un ensemble de points au lieu du point 3°. En nous appuyant sur les résultats du paragraphe IV, nous déterminerons facilement le diagramme du plan projectivement défini. En perçant la variété **A**, celle-ci peut-

être complètement enlevée; ainsi $\Sigma_1(\mathbf{B})$ et $\Sigma_2(\mathbf{C})$ deviennent des frontières libres pour $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. Celles-ci peuvent être déformées de façon à être réduites au voisinage de la ligne à l'infini; voici donc le diagramme. On obtient ainsi :

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 1 \quad (1).$$

Pour que $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ soit limité par un espace équivalent à un espace sphérique, il faut joindre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ d'une manière spéciale, à savoir, la manière déterminée par les équations (5) au paragraphe IV. Ce sont les espaces $\Sigma_1(\mathbf{B})$ et $\Sigma_2(\mathbf{C})$ qui doivent être joints; ils sont limités par $\tau(\mathbf{B})$ et $\tau(\mathbf{C})$ que l'on joint de façon que les courbes méridiennes du premier couvrent celles du dernier, tandis que les courbes de latitude du premier (η constant) correspondent aux courbes du type $[\beta + \lambda]$ du dernier. On voit aussi sans difficulté que le diagramme pour $\Sigma_1(\mathbf{B}) + \Sigma_2(\mathbf{C})$ (jointes selon cette règle) devient un point. Si on les avait jointes selon les formules $\xi = \xi'$ et $\eta = \eta'$, la frontière aurait eu les nombres de connexion $p_1 = 2, p_2 = 2$; donc elle n'aurait pas été équivalente à un espace sphérique.

Deux surfaces fermées, par exemple de genre 0, situées dans une variété à 4 dimensions sont toujours équivalentes, mais, comme nous le voyons, leurs *entourages* ne le sont pas nécessairement. Voilà la différence entre ce que nous avons appelé *équivalence* et ce que Poincaré appelle *homéomorphisme* (POINCARÉ, *A. S.*, § 2).

Pour la surface du deuxième ordre F_2 , j'ai trouvé

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 1,$$

en formant le diagramme selon l'exposé du paragraphe V. Le noyau de ce diagramme est composé de deux surfaces fermées de genre 0 qui se coupent en un point. Le même résultat se trouve très facilement comme suit : une génératrice variable dans l'un des systèmes de génératrices est déterminée par son rapport anharmonique avec trois génératrices fixes; de la même manière,

(1) Ces nombres sont les mêmes si l'on emploie la définition de Poincaré. Il en est de même pour les nombres obtenus pour la quadratique et la cubique.

(Note du Traducteur.)

une génératrice dans l'autre système est déterminée par un rapport γ . Chaque point sur la surface est alors complètement déterminé par les valeurs de x et de γ correspondant aux génératrices passant par le point, et *vice versa*. (∞, ∞) n'est qu'un point; (∞, γ) et (x, ∞) correspondent à deux génératrices se coupant au point (∞, ∞) . Selon le point de vue de M. Picard, le plan sera donc ce que, d'après notre conception projective, nous appelons une surface du deuxième ordre. Si la variété à 4 dimensions (x, γ) est percée au point $(0, 0)$, l'ouverture peut être élargie jusqu'à ce que la frontière rencontre les deux surfaces fermées et s'entre-coupant qui correspondent à (∞, γ) et (x, ∞) . On aboutit alors au même résultat que tout à l'heure (comparer d'ailleurs *P.* et *S.*, Chap. IV, n° 9; Chap. II, n° 16).

Les nombres de connexion pour le plan et la surface de deuxième ordre sont d'accord avec le nombre de points fondamentaux de la transformation biunivoque de *Chasles*.

Quant à la surface de troisième ordre F_3 , j'ai d'abord essayé de l'examiner de la même manière que F_2 , en m'appuyant sur les recherches du paragraphe V. Mais ici j'ai rencontré des difficultés provenant des lignes doubles dans la projection de la surface de ramification sur P , et de leurs points triples. J'ai alors essayé de trouver les nombres de connexion en faisant une transformation. D'un côté, j'ai transformé la surface en une autre de deuxième ordre F_2 en faisant correspondre, aux deux systèmes de génératrices de F_2 , les deux systèmes de coniques découpées sur F_3 par deux systèmes de plans passant respectivement par deux droites A et B de F_3 qui ne se coupent pas. La transformation aura 5 points fondamentaux sur la surface F_2 , à savoir les points correspondant aux 5 paires de plans passant par A et B qui se coupent sur une des 5 droites (parmi les 27 droites sur la surface F_3) coupant A et B . Pour transformer F_3 en un plan, j'ai établi la correspondance entre les deux surfaces à l'aide d'une droite variable passant par un point de A et un point de B , A et B étant deux droites de F_3 ne se rencontrant pas; dans le plan, on aura d'abord 5 points fondamentaux, correspondant aux points d'intersection du plan avec les 5 droites de F_3 coupant A et B , et en outre deux points fondamentaux aux points d'intersection a et b avec A et B ; à ceux-ci correspondent deux coniques φ et ψ sur F_3 détermi-

nées par les plans (Ab) et (Ba) . Le point d'intersection de celles-ci (le troisième point d'intersection de ab avec F_3) sera un point fondamental sur F_3 correspondant à la ligne ab du plan. On emploie plus facilement la transformation birationnelle ordinaire quise trouve par exemple chez Salmon (*Geometry of 3 dimensions*, 4^e édition, p. 556); il y a six points fondamentaux dans le plan, correspondant à un *six double* sur F_3 .

Ces transformations conduisent aux nombres de connexion

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 8, \quad p_3 = 1.$$

Il n'est pas trop difficile de prouver par voie topologique le théorème de M. Picard : $p_1 = p_3 = 1$ si la surface n'a pas de points multiples. Pour trouver p_2 , j'ai essayé de procéder comme à la fin du paragraphe VIII en imaginant la surface infiniment près de se décomposer en n plans; un intérêt spécial s'attache à l'examen de $n = 2$ et $n = 3$. J'espère pouvoir, plus tard, donner à toutes ces recherches une forme assez complète pour qu'elles puissent être publiées en continuation de ces études. Il faudrait aussi étudier les relations entre les nombres de connexion topologiques p_1 , p_2 et p_3 d'un côté, et les différents « invariants » p_g , p_n , $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, de l'autre.

Voilà un vaste champ pour de futures recherches, lesquelles sont rendues difficiles aussi bien par la nature compliquée du sujet que par la large base des méthodes.