BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur l'interpolation des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 103-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__103_1>

SUR L'INTERPOLATION DES FONCTIONS ENTIÈRES ;

PAR M. G. VALIRON.

Je démontrerai daus ce qui suit quelques propositions relatives à la croissance des fonctions entières obtenues par interpolation. Soit a_n le $n^{\text{ième}}$ nombre d'une suite infinie de nombres tous différents, rangés par ordre de modules non décroissants et tels que

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{a_n} = 0;$$

désignons par $F(z)$ un produit canonique ayant pour zéros les nombres a_n (¹) et par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ pour $|z| = r$. Considérons une suite quelconque de nombres

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots;$$

on sait qu'il existe des fonctions entières $f(z)$ vérifiant pour chaque valeur de n l'égalité

$$f(a_n) = A_n;$$

de plus, les méthodes de M. Borel montrent que, lorsque la suite

(¹) Si $F(z)$ est d'ordre infini on prendra la définition du produit canonique donnée par M. Denjoy dans sa thèse.

des nombres A_n a une croissance plus rapide que la suite des nombres $M(r_n)(r_n = |a_n|)$, on peut former des fonctions $f(z)$ dont la croissance est en relations assez étroites avec celle de la suite des nombres A_n, tout au moins dans le cas où $F(z)$ est d'ordre fini et où les zéros a_n sont distribués de façon ordinaire [1].

Je me placerai dans le cas où les nombres A_n croissent moins vite que les nombres $M(r_n)$ et je supposerai l'ordre ρ de $F(z)$ inférieur à $\frac{1}{2}$. On sait que les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ jouissent d'une propriété exprimée par un théorème de M. Wiman qui les rend assez comparables aux polynomes; les résultats obtenus avec ces fonctions doivent donc être particulièrement simples. J'ai obtenu les propositions suivantes :

I. Pour qu'il existe une fonction $f(z)$ vérifiant l'inégalité

$$|f(z)| < [M(r)]^{(1-\alpha)\cos(\pi\rho)} \qquad (\alpha > 0),$$

il est nécessaire que les nombres A_n satisfassent à une infinité de conditions d'espèce linéaire.

II. Lorsque les nombres r_n satisfont à certaines conditions de régularité, les conditions imposées aux A_n prennent la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

et réciproquement les égalités (1) jointes aux inégalités

$$A_n < [M(r_n)]^{(1-\alpha)\cos(\pi\rho)}$$

entraînent l'inégalité

$$|f(z)| < [M(r)]^{(1-\alpha)\cos(\pi\rho_1)} \qquad (\rho_1 = \rho + \varepsilon)$$

pour une fonction $f(z)$ et une seule.

Les égalités (1) sont la généralisation de celles qui expriment l'abaissement du degré dans l'interpolation des polynomes et il y a lieu de rechercher si elles n'expriment pas une propriété ana-

---

(1) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes.*

logue et si les seules conditions

$$A_n < M(r_n)$$

n'entraînent pas l'existence d'une fonction $f(z)$ croissant moins vite que $M(r)$, mais peut-être plus vite que $M(r)^{\cos \pi\rho}$. Je montrerai sur un exemple simple qu'il n'en est rien.

1. Les notations étant les mêmes que ci-dessus, désignons par $\mu(r)$ le maximum pour chaque valeur de r de l'expression

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n},$$

lorsqu'on donne à r toutes les valeurs entières, un théorème bien connu de M. Jensen montre immédiatement qu'il ne peut exister deux fonctions $f(z)$ pour lesquelles le quotient

$$\frac{|f(z)|}{\mu(r)}$$

a pour limite zéro lorsque r croît indéfiniment [1]. Comme $\mu(r)$ est en relation simple avec la fonction $M(r)$ dans le cas où $F(z)$ est à croissance régulière, on pourra tirer de la propriété précédente des propositions relatives à l'unicité des solutions $f(z)$ jouissant de certaines propriétés de croissance [2]. Dans le cas où $F(z)$ est d'ordre ρ inférieur à $\frac{1}{2}$ la proposition précédente est remplacée par la suivante :

Il ne peut exister deux fonctions $f(z)$ pour lesquelles le

---

(1) Car s'il existait deux telles fonctions $f(z)$, leur différence $h(z)$ s'annulerait pour $z = a_n$ et peut-être pour d'autres valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots$, et q fois pour $z = 0$; par suite, le maximum du module de $h(z)$ serait supérieur à

$$\alpha_q \frac{r^{q+n+p}}{r_1 r_2 \ldots r_n \cdot |b_1| \cdot |b_2| \ldots |b_p|}$$

[α_q étant le coefficient de z^q dans $h(z)$] et par suite à

$$\alpha_q \mu(r),$$

ce qui est impossible.

(2) Par exemple la première partie du théorème III de M. Polyà dans son Mémoire *Ueber Ganzwertige ganze Funktionen* (*Rendiconti di Palermo*, t. XL, p. 1).

quotient

$$\frac{|f(z)|}{M(r)}$$

a pour limite zéro lorsque r croît indéfiniment.

En effet, s'il existait deux telles fonctions $f(z)$, leur différence s'annulerait pour les zéros de $F(z)$; donc serait le produit de $F(z)$ par une fonction $\varphi(z)$ et l'on aurait

$$|F(z)\varphi(z)| < \alpha M(r),$$

quelque petit que soit α pourvu que r soit assez grand. Cette inégalité est impossible en supposant $\varphi(z)$ d'ordre ρ_1 supérieur à ρ, car d'après un théorème sur le minimum du module des fonctions entières $|F(z)|$ est supérieur à

$$e^{-r^{\rho+\beta}} \qquad (\beta < \rho_1 - \rho),$$

à l'extérieur d'un cercle $|z| = R_0$ et des cercles ayant pour centres les points a_n et pour rayons r_n^{-k} (k fini), et par suite on voit sans peine qu'il existera des points z pour lesquels on aura simultanément

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\beta}}, \qquad |\varphi(z)| > e^{+r^{\rho+\beta'}} \qquad (\beta' > \beta),$$

ce qui conduit à une impossibilité. Supposons donc que $\varphi(z)$ soit d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$; alors, d'après un théorème de M. Wiman, il existera des cercles $|z| = r$ sur lesquels $\varphi(z)$ sera supérieur à un nombre donné quelconque A, le rayon de ces cercles pouvant dépasser tout nombre donné et l'on arrivera encore à une contradiction [1].

On remarquera qu'il résulte de la démonstration précédente que, dans le cas de l'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, le produit canonique est la moins croissante des fonctions entières ayant des zéros donnés,

---

[1] Pour le théorème de M. Wiman voir ma Thèse *Sur les fonctions entières*... (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, p. 213), où l'on trouvera les indications bibliographiques et la démonstration du théorème sous la forme qui sera utilisée plus loin.

propriété qui n'est pas nécessairement vraie lorsque l'ordre dépasse $\frac{1}{2}$ (1).

2. Nous supposerons dorénavant que $F(z)$ est d'ordre ρ inférieur à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log|a_n|}{\log n} = \frac{1}{\rho} > \frac{1}{2};$$

d'après le théorème de M. Wiman, β étant un nombre positif donné quelconque mais inférieur à *un*, il existe une suite de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, de rayons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ indéfiniment croissants sur lesquels le minimum $m(r)$ de $F(z)$ pour $|z| = r$ vérifie l'inégalité

$$m(r) > [M(r)]^{(1-\beta)\cos(\pi\rho)} \qquad (r = \gamma_n).$$

---

(1) Par exemple, si l'on considère la fonction

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho}}}\right), \qquad 1 > \rho > \frac{1}{2},$$

un calcul simple montre que l'on a

$$\log|f(z)| = \frac{\pi\cos[\varphi\rho(1+\varepsilon(r,\varphi))]}{\sin\pi\rho} r^\rho, \qquad z = re^{i\varphi},$$

$$\alpha - \pi < \varphi < \pi - \alpha, \qquad \lim_{r=\infty} \varepsilon(r,\varphi) = 0,$$

α étant un nombre donné très petit; dans le reste du plan $\log|f(z)|$ reste inférieur à $-hr^\rho$, h étant fini. On voit alors que, si l'on pose

$$\varphi(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^{\frac{1}{\rho_1}}}\right), \qquad \frac{1}{2} < \rho_1 < \rho,$$

le produit

$$f(z)\varphi(z)$$

reste inférieur en module à

$$M(r)e^{-hr^{\rho_1}},$$

$M(r)$ étant le maximum du module $f(z)$. Lorsque ρ est supérieur à $\frac{3}{2}$, la considération de la fonction $f(z) \times f(-z)$ donnera un résultat encore plus net.

Considérons alors l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_q}\frac{f(z)}{F(z)}z^p\,dz=\sum_{r_n<\gamma_q}\frac{A_n}{F'(a_n)}a_n^p;$$

l'intégrale étant prise sur le cercle C_q dans le sens direct, on en tire l'inégalité

$$\left|\sum_{r_n<\gamma_q}\frac{A_n}{F'(a_n)}a_n^p\right|<\frac{M_1(r)}{m(r)}r^p<\frac{M_1(r)r^p}{M(r)^{(1-\beta)\cos\pi\rho}}\qquad (r=\gamma_q),$$

$M_1(r)$ désignant le maximum du module de $f(z)$ pour $|z|=r$. Par suite, s'il existe une fonction $f(z)$ pour laquelle on a

$$M_1(r)<M(r)^{(1-\alpha)\cos\pi\rho}\qquad (\alpha>0),$$

on aura quel que soit p :

$$\sum_{q=1}^{q=\infty}u_{q,p}=0,\tag{2}$$

avec

$$u_{0,p}=\sum_{r_n<\gamma_1}\frac{A_n}{F'(a_n)}a_n^p,\qquad u_{q,p}=\sum_{\gamma_q<r_n<\gamma_{q+1}}\frac{A_n}{F'(a_n)}a_n^p.$$

La proposition I est ainsi démontrée et la forme linéaire des égalités (2) montre qu'un nombre fini quelconque de nombre A_n est déterminé lorsque les autres le sont, c'est-à-dire qu'il n'existe pas en général de fonction $f(z)$ prenant des valeurs A_n données arbitrairement et satisfaisant à la condition

$$|f(z)|<[M(r)]^{(1-\alpha)\cos(\pi\rho)}.$$

Ce résultat est applicable aux fonctions d'ordre nul ($\rho=0$) sans aucune modification.

3. Nous supposerons maintenant que l'on a

$$r_n=n^{\omega(n)},$$

$\omega(x)$ étant une fonction dérivable vérifiant les conditions

$$\lim_{x=\infty}\omega(x)=\frac{1}{\rho},\qquad \omega(x)<A,$$

$$\lim_{x=\infty}\omega'(x)\times x\times\log x=0;$$

nous désignerons par $\rho(x)$ la fonction définie par les égalités

$$\rho(x) = \frac{1}{\omega(y)}, \qquad x = y^{\omega(y)},$$

et d'une façon générale par $\varepsilon(x)$ toute fonction qui tend vers zéro lorsque x croît indéfiniment. Il résulte de calculs simples ([1]) que l'on a

$$\log M(r) < [1 + \varepsilon(r)] \frac{\pi}{\sin[\pi\rho(r)]} r^{\rho(r)},$$

et que dans la région obtenue en supprimant du plan les cercles Γ_n ayant pour centres les zéros a_n et pour rayons r_n^{-k}, k étant fini et fixe, $|F(z)|$ vérifie l'inégalité

$$\log |F(z)| > [1 - \varepsilon(r)] \frac{\pi \cos[\pi\rho(r)]}{\sin[\pi\rho(r)]} r^{\rho(r)}.$$

Les cercles Γ_n étant extérieurs les uns aux autres à partir d'une certaine valeur de n, on voit que les conditions (2) prennent la forme simple

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} a_n^p = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

et il suffit même que l'on suppose

$$M_1(r) < [M(r)]^{(1-\alpha)\cos[\pi\rho(r)]} \qquad (\alpha > 0).$$

4. Il est bien facile de voir, en s'appuyant sur l'existence de fonctions dont les zéros ont une distribution extraordinaire, que les égalités (1) ne peuvent pas dans tous les cas remplacer les égalités (2); il suffit en effet de prendre

$$A_n = f(a_n),$$

$f(z)$ étant une fonction entière satisfaisant à la condition

$$|f(z)| < M(r)^{(1-\alpha)\cos(\pi\rho)}$$

et de supposer que pour une infinité de valeurs de a_n on a

$$A_n > [M(r_n)]^{-\frac{k}{2}},$$
$$|F'(a_n)| < M(r)^{-k},$$
$$k > (1-\alpha)\cos(\pi\rho),$$

([1]) *Voir* mon Mémoire cité plus haut, n° 62.

pour voir que l'égalité (1) n'est pas réalisée. M. Borel a montré comment on peut former des fonctions $F(z)$ satisfaisant à la condition requise; il suffit par exemple que, pour une infinité de valeurs de n, l'inégalité

$$|a_n - a_{n-1}| < e^{-r_n^{\rho_1}} \qquad (\rho_1 > \rho)$$

soit vérifiée ([1]).

Il y a également lieu de rechercher si les égalités (2) ne sont pas vérifiées toutes les fois que l'on a

$$M_1(r) < [M(r)]^\beta \qquad (\beta < 1);$$

je montrerai sur un exemple qu'il n'en est rien.

Prenons

$$F(z) = \cos\left(r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\varphi}{4}}\right) \times \cos\left[r^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$
$$z = re^{i\varphi},$$

$F(z)$ est d'ordre $\frac{1}{4}$, son $n^{\text{ième}}$ zéro est

$$a_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$$

et l'on a

$$M(r) = F(-r) = [1 + \varepsilon(r)] \frac{e^{r^{\frac{1}{4}}} \times \sqrt{2}}{4},$$

$$F'(a_n) = (-1)^n [1 + \varepsilon(n)] \frac{e^{\pi n - \frac{\pi}{2}}}{8\pi^3 n^3};$$

on en déduit

$$|F'(a_n)| = [M(a_n)]^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon(n)}.$$

Pour $f(z)$ nous prendrons une fonction d'ordre $\frac{1}{4}$ à coefficients positifs

$$f(z) = \sum_0^\infty e^{-G(n)} z^n,$$

$G(x)$ étant choisi de façon que $f(z)$ soit calculable par la formule asymptotique de M. Le Roy ([2]), par exemple

$$G(x) = 4x \log \frac{x}{ce} \qquad (\log e = 1).$$

([1]) Je reviendrai au n° 9 sur cette question de la distribution extraordinaire.
([2]) Le Roy, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900, p. 245.

On aura

$$f(r) = [1 + \varepsilon(r)] \sqrt{\frac{\pi c}{2} r^{\frac{1}{4}}}\, e\, 4cr^{\frac{1}{4}}$$

et par suite

$$\frac{f(a_n)}{F'(a_n)} = (-1)^n [1 + \varepsilon(n)] B n^{\frac{7}{2}} e^{(4c-1)\pi n},$$

B étant un nombre fixe. Nous supposerons que $4c$ est supérieur à *un* (mais inférieur à $\sqrt{2}$); on voit alors que, si l'on pose

$$s_n = \sum_1^n \frac{f(a_n)}{F'(a_n)},$$

les nombres s_{2p} et $-s_{2p+1}$ sont positifs et croissent indéfiniment avec p et l'on ne peut par conséquent trouver une suite de nombres s_n ayant pour limite zéro, les conditions (2) ne sont pas vérifiées.

5. Les systèmes de relations (1) et (2) sont les généralisations des équations qui expriment l'abaissement du degré dans le problème de l'interpolation des polynomes; il convient donc de rechercher si ce n'est pas le fait de l'abaissement de l'ordre précisé qui conduit aux systèmes (1) et (2), c'est-à-dire de chercher si la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{M_1(r)}{M(r)} = 0$$

ne laisse pas les nombres A_n complètement arbitraires (soumis aux seules conditions

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{M(r_n)} = 0).$$

Nous allons montrer que, la fonction $F(z)$ étant convenablement choisie, on peut trouver des systèmes de nombres A_n satisfaisant aux conditions

$$A_n < [M(r_n)]^\gamma \qquad (\gamma < 1)$$

et pour lesquels aucune solution du problème d'interpolation n'aura une croissance inférieure à $M(r)$. Prenons

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{r_n}\right), \qquad r_n = n^{\omega(n)},$$

$\omega(x)$ vérifiant les conditions du n° 3 et ayant pour limite $\frac{1}{\rho}$ lorsque x croît indéfiniment; on a alors

$$\log|F(z)| = \frac{[1+\varepsilon(r)]\pi}{\sin(\pi\rho)} r^{\rho(r)} \cos(\rho\varphi),$$
$$z = re^{i\varphi}, \qquad -\pi+\eta < \varphi < \pi-\eta,$$

η étant un nombre fixe aussi petit que l'on veut. Prenons d'autre part

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1+\frac{z\,e^{i\alpha}}{r'_n}\right),$$
$$0 < \alpha < \pi, \qquad r'_n = \left(\frac{n}{k}\right)^{\omega\left(\frac{n}{k}\right)},$$

$\omega(x)$ étant la même fonction que ci-dessus et les nombres k et α satisfaisant aux conditions

$$k > 1, \qquad k\cos(\alpha\rho) < 1, \qquad k\cos[(\pi-\alpha)\rho] < 1,$$

ce qui est évidemment possible. Considérons les fonctions

$$f(z) + F(z)\varphi(z);$$

nous montrerons que, pour chacune de ces fonctions, il existe une suite de valeurs de r croissant indéfiniment pour lesquelles le maximum du module est supérieur à $M(r)^\delta$, δ étant un nombre supérieur à *un*. Comme l'on a pour ces fonctions

$$A_n = f(-r_n) = M(r_n)^{k\cos(\pi-\alpha)\rho+\varepsilon(r_n)}$$

nous aurons un exemple répondant aux conditions requises.

Supposons d'abord que $\varphi(z)$ soit d'ordre supérieur à ρ, il en sera de même du produit $F(z).\varphi(z)$ et par suite de $f+F\varphi$, le maximum du module de cette fonction sera donc supérieur à $M(r)^\delta$ pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes.

Supposons maintenant que, quel que soit φ, $|\varphi(z)|$ reste inférieur à $M(r)^{k'-1}$, k' étant inférieur à k, nous aurons

$$|f(re^{-i\alpha}) + F(re^{-i\alpha})\varphi(re^{-i\alpha})| = [1+\varepsilon(r)]f(re^{-i\alpha}),$$

ce qui nous donnera la même conclusion que dans le cas précédent.

Supposons enfin que $\varphi(z)$ soit d'ordre ρ et que pour une infinité de valeurs de r le maximum de son module soit supérieur ou égal à $M(r)^{k'-1}$; le théorème de M. Wiman montre alors, eu égard à la forme de la fonction $M(r)$, que l'on aura

$$|\varphi(z)| > M(r)^{(k'-1)\cos\pi\rho-\varepsilon(r)}$$

sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, on aura donc sur ces cercles

$$f(r)+F(r)\varphi(r) = [1+\varepsilon(r)F(r)\varphi(r) > M(r)^{1+(k'-1)\cos\pi\rho-\varepsilon(r)}.$$

La propriété énoncée est donc démontrée et l'on voit que l'on peut prendre pour δ un nombre inférieur à $1+(k-1)\cos\pi\rho$.

6. Supposons maintenant que l'on ait une suite de nombres A_n vérifiant les égalités (1) et les inégalités

$$(3) \qquad A_n < M(r_n)^{(1-\alpha)\cos[\pi\rho(r_n)]} \qquad (\alpha > 0),$$

nous allons montrer qu'il existe une fonction $f(z)$ satisfaisant à la condition de croissance

$$(4) \qquad M_1(r) < [M(r)]^{1-\alpha[1-\varepsilon(r)]\cos(\pi\rho)},$$

cette fonction $f(z)$ est définie par l'égalité

$$f(z) = F(z)H(z),$$

$$H(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} \frac{1}{z-a_n}.$$

On voit tout d'abord que si l'on pose

$$G_n(z) = \frac{a_n F(z)}{z-a_n}$$

$G_n(z)$ jouit des propriétés énoncées au n° 3 pour $F(z)$, et il suit de là que l'on a

$$|F'(a_n)| = \left|\frac{G(a_n)}{a_n}\right| > M(r_n)^{[1-\varepsilon(r_n)]\cos[\pi\rho(r_n)]},$$

ce qui montre que $H(z)$ représente bien une fonction méromorphe ayant pour pôles simples les a_n et $f(z)$ une fonction entière qui est d'ordre ρ au plus d'après les théorèmes généraux de M. Borel. Pour calculer d'une façon plus précise une limite supérieure de $M_1(r)$, il sera nécessaire de s'appuyer sur une propriété des fonctions entières $F(z)$ définies au n° 3 :

Si l'on pose

$$\log M(r) = V(x) \qquad (r = e^x)$$

et que l'on désigne par $N(x)$ le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur ou égal à r, on a

$$N(x) = \lambda(x) V'(x), \tag{5}$$

$\lambda(x)$ étant compris entre deux nombres positifs fixes et $V'(x)$ étant la dérivée ou la dérivée à droite (ou à gauche) de $V(x)$.

On a en effet

$$V(x) = \mu(x) U(x), \qquad U(x) = r^{\rho(r)},$$

$\mu(x)$ étant compris entre deux nombres fixes; d'autre part, $V'(x)$ étant croissante, on aura

$$V'(x)(x_1 - x) < \mu(x_1) U(x_1) - \mu(x) U(x) < V'(x_1)(x_1 - x)$$
$$(x_1 > x).$$

Il suffit alors de prendre pour x_1 la valeur $x + h$, h étant un nombre fixe convenablement choisi et de se rappeler les propriétés de la fonction $U(x)$ pour voir que l'on a

$$\mu(x_1) U(x_1) - \mu(x) U(x) = (x_1 - x) \nu U'(x) = (x_1 - x) \nu_1 U'(x_1),$$

ν et ν_1 restant aussi compris entre deux nombres fixes faciles à calculer. On a d'ailleurs

$$U'(x) = [1 + \varepsilon(x)] \rho(r) r^{\rho(r)} = h_1 N(x),$$

h_1 étant compris entre deux nombres fixes et par suite l'égalité (5) est démontrée.

On peut tirer de l'égalité (5) une proposition relative à la croissance de $M(r)$ qui sera aussi très utile. On a

$$V(x') - V(x) < (x' - x) V'(x')$$

et par suite, d'après (5),

$$V[x + \varepsilon(x)] - V(x) < \varepsilon(x) k N(x);$$

or le quotient de $V(x)$ par $N(x)$ reste compris entre des nombres positifs fixes, on aura donc

$$V[x+\varepsilon(x)] < V(x)[1+\varepsilon_1(x)].$$

En d'autres termes l'égalité

$$\lim_{r=\infty} \frac{r'}{r} = 1$$

entraîne

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r')}{\log M(r)} = 1.$$

7. Nous pouvons écrire, d'après les égalités (1),

$$H(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{F'(a_n)} \frac{1}{z-a_n} \left(\frac{a_n}{z}\right)^q,$$

quel que soit le nombre positif q et sous la seule condition que z ne soit pas nul. Nous supposerons que z est extérieur aux couronnes ayant pour rayons extrêmes $r_n \pm r_n^k$, k étant un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, et nous définissons le nombre N par les inégalités

$$r_N + r_N^k < r < r_{N+1} - r_{N+1}^k.$$

Nous aurons

$$|H(z)| < \frac{A_0}{r^q} + \sum_{n=n_0}^{n=\infty} v_n,$$

$$v_n = \frac{r_n^q}{r^{k+q}} [M(r_n)]^{-\alpha_0 \cos(\pi\rho)},$$

α_0 étant un nombre inférieur à α mais aussi voisin de α que l'on veut pourvu que n_0 soit assez grand et A_0 étant fini en même temps que n_0. Considérons l'expression

$$W(x) = V(x) - q_1 x,$$

$$q_1 = \frac{q}{\alpha_0 \cos(\pi\rho)}, \qquad V(x) = \log M(e^x);$$

d'après les propriétés de la fonction $V(x)$, $W(x)$ a une dérivée à gauche et à droite qui est croissante et il y aura parmi les nombres v_n un nombre maximum. Si nous désignons, d'une façon générale, par $E(y)$ la partie entière d'un nombre y, nous voyons que nous sommes conduits à prendre

$$q_1 = \mathrm{E}[\mathrm{V}'(\log r_\mathrm{N} + 0)];$$

si l'on a

$$q_1 \geqq \mathrm{V}'(\log r_\mathrm{N} - 0),$$

le terme maximum est v_N; dans le cas contraire, il a un rang N' inférieur à N et l'on a

$$\begin{aligned}\log v_{\mathrm{N}'} - \log v_\mathrm{N} &= \alpha_0 \cos(\pi\rho)\,[q_1(x_{\mathrm{N}'} - x_\mathrm{N}) + \mathrm{V}(x_\mathrm{N}) - \mathrm{V}(x_{\mathrm{N}'})] \\ &= \alpha_0 \cos(\pi\rho)\,(x_\mathrm{N} - x_{\mathrm{N}'})\,(\lambda_\mathrm{N} - q_1), \\ x_\mathrm{N} = \log r_\mathrm{N}, &\qquad x_{\mathrm{N}'} = \log r_{\mathrm{N}'},\end{aligned}$$

λ_N étant compris entre

$$\mathrm{V}'(x_{\mathrm{N}'} + 0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}'(x_\mathrm{N} - 0);$$

par suite

$$\lambda_\mathrm{N} - q_1 < 1$$

et

$$v_{\mathrm{N}'} < v_\mathrm{N} \left(\frac{r_\mathrm{N}}{r_{\mathrm{N}'}}\right)^{\alpha_0 \cos(\pi\rho)}$$

Il en résulte que, dans les deux cas, le terme maximum a pour valeur

$$r^h \left(\frac{r_\mathrm{N}}{r}\right)^q [\mathrm{M}(r_\mathrm{N})]^{-\alpha_0 \cos(\pi\rho)}, \qquad h < \alpha_0 \cos(\pi\rho);$$

or, d'après l'égalité (5),

$$q = \lambda \mathrm{N} = \lambda' r^{\rho(r)},$$

λ et λ' étant finis, et d'autre part, d'après la propriété démontrée à la fin du n° 6, on a

$$\mathrm{M}(r_\mathrm{N}) > [\mathrm{M}(r)]^{1-\varepsilon(r)},$$

ce qui montre que le terme maximum a pour valeur

$$[\mathrm{M}(r)]^{-\alpha[1-\varepsilon(r)] \cos(\pi\rho)}.$$

On a d'autre part, A désignant le nombre introduit au n° 3 et k étant un entier,

$$\log v_{kn} - \log v_n < \mathrm{A}kq - \alpha_0 \cos(\pi\rho)\left[k^{\frac{1}{\rho}} \cos(\pi\rho) - 1\right] \frac{n[1 - \varepsilon(n)]}{\rho};$$

donc, en prenant k assez grand pour que

$$k^{\frac{1}{\rho}} \cos(\pi\rho) - 1$$

soit positif, on aura

$$\frac{k\,v_{kn}}{v_n} < \frac{1}{2}$$

pour $n > \mathrm{CN}$, C étant un nombre qui reste fini lorsque N devient infini. On aura donc finalement

$$\sum_{n=n_0}^{n=\infty} v_n < [\mathrm{M}(r)]^{-\alpha[1-\varepsilon(r)]\cos(\pi\rho)}$$

et l'inégalité est aussi valable pour $\mathrm{H}(z)$, eu égard à la valeur de q. Nous obtenons donc l'inégalité

$$(4) \qquad \mathrm{M}_1(r) < [\mathrm{M}(r)]^{1-\alpha[1-\varepsilon(r)]\cos(\pi\rho)}$$

lorsque r est extérieur aux intervalles $r_n \pm r_n^k$ et l'on voit, en utilisant la propriété de la fonction $\mathrm{M}(r)$ démontrée à la fin du n° 6, que cette inégalité a lieu sans restrictions; la deuxième partie du théorème II est donc démontrée.

8. Il semble probable que l'inégalité (4) peut être remplacée par l'inégalité

$$\mathrm{M}_1(r) < [\mathrm{M}(r)]^{1-\alpha-\varepsilon(r)},$$

mais il est clair que le mode de démonstration employé ne peut conduire à ce résultat et qu'il faudrait, pour améliorer l'inégalité (4), introduire les arguments des nombres a_n et A_n. Dans le cas de l'ordre nul cependant, l'inégalité (4) devient entièrement satisfaisante et les deux parties de la proposition II sont exactement réciproques, mais cela tient uniquement à la trop large approximation; si pour chaque catégorie de fonctions d'ordre nul, on utilise le théorème de M. Wiman sous sa forme la plus précise, on obtiendra un résultat en tous points comparable à celui obtenu pour l'ordre fini.

On remarquera également que les égalités (1) dans lesquelles on considère les A_n comme inconnues rentrent dans un type d'équations qui fut considéré par M. Borel dans sa Thèse : on peut choisir arbitrairement une infinité quelconque de nombres A_n (en respectant toutefois la convergence absolue des premiers membres des équations), à la condition de laisser libre une infinité d'inconnues. L'introduction des conditions (3) restreint peut-être cette indétermination.

9. Je montrerai en terminant que la remarque qui nous a servi à calculer une limite inférieure de $F'(a_n)$ peut être utilisée dans l'étude de la distribution extraordinaire. Lorsqu'on décompose en éléments simples une fonction méromorphe dont les pôles sont les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ d'une fonction $F(z)$ (zéros que nous supposons simples), l'ordre des nombres $|F'(a_n)|$ joue un rôle important. Si ρ est l'ordre de $F(z)$ et r_n le module de a_n le théorème sur le minimum du module d'une fonction entière montre que l'on doit avoir, en général,

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho+\varepsilon(r_n)}};$$

M. Borel dit que les zéros sont distribués de façon extraordinaire lorsque, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$|F'(a_n)| < e^{-r_n^{\rho_1}} \qquad (\rho_1 > \rho).$$

Nous avons

$$F'(a_n) = \Phi_n(a_n), \qquad \Phi_n(a_n) = \frac{F(z)}{z - a_n};$$

or le produit de $a_n \Phi_n(z)$ par une exponentielle qui reste inférieure à n^k pour $|z| < 2r_n$ est le seul quotient de $F(z)$ par le facteur primaire correspondant à a_n, ce qui montre que l'étude de $F'(a_n)$ revient à l'étude de la valeur pour $z = a_n$ d'une fonction $F_n(z)$ qui ne diffère de $F(z)$ que par la suppression d'un facteur. Dans le cas de l'ordre fini, on peut supposer cet ordre ρ inférieur à *un* (¹), on a

$$|F_n(z)| < \prod_i{}' \left(1 + \frac{r}{r_i}\right) < M(r);$$

d'autre part, si l'on pose

$$\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) r_{n_1} < r < r_{n_1+1}\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^{p-1}}\right) r_{n_2} < r < r_{n_2+1}\left(1 + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \qquad (p \geqq 2),$$

(¹) Les calculs sont d'ailleurs les mêmes dans le cas général.

on aura

$$\prod_{1}^{n_1}\left(\frac{r}{r_i}-1\right)>\left[\prod_{1}^{n_1}\left(1+\frac{r}{r_i}\right)\right]^{-p},$$

$$\prod_{n_2+1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_i}\right)>\left[\prod_{n_2+1}^{\infty}\left(1+\frac{r}{r_i}\right)\right]^{-p},$$

et par suite

$$|F_n(z)|>M(r)^{-p}\prod_{n_1+1}^{n_2}\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

inégalité qui fournira les résultats cherchés, si on lui adjoint l'inégalité évidente

$$|F_n(z)|<M(r)\prod_{n_1+1}^{n_2}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

On voit que si l'on pose

$$|a_n-a_i|=d_{n,i}\qquad(i\neq n),$$

on aura, d'après ces inégalités et en prenant $p=r^{\varepsilon(r)}$,

$$|F'(a_n)|>e^{-r_n^{\rho+\varepsilon(n)}}\Pi d_{n,i},$$

$$|F'(a_n)|<e^{\,r_n^{\rho+\varepsilon(n)}}\Pi d_{n,i},$$

le produit $\Pi d_{n,i}$ étant étendu aux quantités $d_{n,i}$ qui sont inférieures à $e^{-r_n^{\varepsilon(n)}}$. Il résulte de ces inégalités que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait distribution extraordinaire est que l'on ait*

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log_2\dfrac{1}{\Pi d_{n,i}}}{\log r_n}>\rho.$$