

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. PRIWALOFF

## Sur les fonctions conjuguées

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 44 (1916), p. 100-103

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1916\\_\\_44\\_\\_100\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__100_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES FONCTIONS CONJUGUÉES;

PAR M. I. PRIWALOFF.

Considérons une fonction d'une variable complexe  $F(z)$ , holomorphe à l'intérieur d'un cercle  $C$  de rayon 1.

Soit

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y);$$

$U$  et  $V$  étant deux fonctions harmoniques conjuguées régulières à l'intérieur du cercle  $C$ .

Désignons par  $f(\theta)$  et  $g(\theta)$  les valeurs de ces fonctions sur la circonférence du cercle  $C$ .

M. Fatou a démontré que, si  $f(\theta)$  satisfait à une condition de Lipschitz,  $g(\theta)$  satisfait à une condition de même forme (1). Le but de cette Note est de préciser le résultat de M. Fatou et de démontrer la proposition suivante :

*Si la fonction  $f(\theta)$  satisfait à une condition de Lipschitz à exposant  $\alpha \neq 1$ ,*

$$(L) \quad |f(\theta + \delta) - f(\theta)| < K|\delta|^\alpha,$$

*la fonction conjuguée  $g(\theta)$  satisfait à une condition de même forme, l'exposant ayant la même valeur  $\alpha$ .*

*Si  $f(\theta)$  est à nombres dérivés bornés, c'est-à-dire si  $\alpha = 1$ , la fonction  $g(\theta)$  satisfait à une condition de Lipschitz d'exposant aussi voisin qu'on voudra de 1.*

Nous partirons de la formule

$$g(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(\theta)] \cot \frac{t - \theta}{2} dt,$$

établie par M. Fatou et nous reprendrons sa démonstration en précisant une de ses inégalités.

---

(1) *Acta mathematica*, t. XXX, p. 361.

Donnant à  $\theta$  l'accroissement  $\Delta\theta$ , nous aurons

$$g(\theta + \Delta\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(\theta + \Delta\theta)] \cot \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2} dt,$$

$$(1) \quad g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ \frac{f(t) - f(\theta + \Delta\theta)}{\operatorname{tang} \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2}} - \frac{f(t) - f(\theta)}{\operatorname{tang} \frac{t - \theta}{2}} \right] dt.$$

La fonction sous le signe  $\int$  peut s'écrire

$$(2) \quad \frac{f(t) - f(\theta + \Delta\theta)}{\sin \frac{t - \theta}{2} \sin \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2}} \sin \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{f(\theta) - f(\theta + \Delta\theta)}{\operatorname{tang} \frac{t - \theta}{2}}.$$

Intégrons d'abord de  $-\pi$  à  $\theta - \varepsilon$  et de  $\theta + \varepsilon$  à  $+\pi$ , en supposant

$$\varepsilon = 3|\Delta\theta|.$$

En appliquant la condition (L) on a les inégalités

$$\left| \frac{f(t) - f(\theta + \Delta\theta)}{\sin \frac{t - \theta}{2} \sin \frac{t - \theta - \Delta\theta}{2}} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| < K_1 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta| |t - \theta - \Delta\theta|}$$

$$= K_1 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta| |t - \theta - \Delta\theta|^{1-\alpha}}$$

$$= K_1 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta|^{2-\alpha} \left( \left| 1 - \frac{\Delta\theta}{t - \theta} \right| \right)^{1-\alpha}}$$

$$< K_2 \frac{|\Delta\theta|}{|t - \theta|^{2-\alpha}};$$

$\frac{1}{\left| 1 - \frac{\Delta\theta}{t - \theta} \right|}$  étant borné dans les intervalles  $(-\pi, \theta - \varepsilon)$  et  $(\theta + \varepsilon, +\pi)$ .

Par conséquent le premier terme de (2), intégré de  $-\pi$  à  $\theta - \varepsilon$  et de  $\theta + \varepsilon$  à  $+\pi$ , donnera pour l'intégrale (1) une contribution moindre en valeur absolue que

$$C_1 |\Delta\theta|^\alpha \quad \text{si } \alpha \neq 1 \quad (1),$$

$$C'_1 |\Delta\theta| \log \frac{1}{|\Delta\theta|} \quad \text{si } \alpha = 1.$$

---

(1) Nous prenons  $\alpha < 1$  parce que, dans le cas  $\alpha > 1$ , la fonction se réduit à une constante.

Le second terme de (2), intégré entre les mêmes limites, donnera comme résultat zéro.

Il nous reste à évaluer la limite supérieure de l'intégrale (1) quand les limites d'intégration sont  $\theta - \varepsilon$  et  $\theta + \varepsilon$ . En tenant encore compte de la relation (L), on trouve facilement que les termes ainsi obtenus ont une somme moindre en valeur absolue que

$$C_2 |\Delta\theta|^\alpha, \quad \text{quel que soit } \alpha.$$

On a donc, en définitive,

$$|g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta)| < (C_1 + C_2) |\Delta\theta|^\alpha \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

et

$$|g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta)| < C_1 |\Delta\theta| \log \frac{1}{|\Delta\theta|} + C_2 |\Delta\theta| < C |\Delta\theta|^{1-\gamma} \quad \text{si } \alpha = 1,$$

$\gamma > 0$  étant aussi petit qu'on voudra.

C. Q. F. D.

En terminant, démontrons que, dans le cas  $\alpha = 1$ , l'exposant  $\alpha$  de la condition de Lipschitz, pour la fonction conjuguée, peut être en réalité différent de 1.

Posons

$$f(\theta) = \sum_1^\infty \frac{a_n \cos n\theta}{n^2},$$

où

$$a_1 > a_2 > a_3 \dots \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Supposons

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

La fonction  $f(\theta)$ , déterminée de cette manière, a une dérivée continue  $f'(\theta)$ :

$$f'(\theta) = \frac{df}{d\theta} = - \sum_1^\infty \frac{a_n \sin n\theta}{n};$$

la série dans le membre de droite étant uniformément convergente.

La fonction conjuguée

$$g(\theta) = - \sum_1^\infty \frac{a_n \sin n\theta}{n^2}$$

ne satisfera pas à une condition de Lipschitz à exposant égal à 1.

En effet, dans le cas contraire

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n \cos n\theta}{n}$$

serait une série de Fourier d'une fonction bornée, ce qui est contradictoire à la supposition

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

---