J. PRIWALOFF

Sur les fonctions conjuguées

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 100-103
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__100_0>

SUR LES FONCTIONS CONJUGUÉES;

PAR M. I. PRIWALOFF.

Considérons une fonction d'une variable complexe $F(z)$, holomorphe à l'intérieur d'un cercle C de rayon 1.

Soit

$$F(z) = U(x, y) + i V(x, y);$$

U et V étant deux fonctions harmoniques conjuguées régulières à l'intérieur du cercle C.

Désignons par $f(\theta)$ et $g(\theta)$ les valeurs de ces fonctions sur la circonférence du cercle C.

M. Fatou a démontré que, si $f(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz, $g(\theta)$ satisfait à une condition de même forme ([1]). Le but de cette Note est de préciser le résultat de M. Fatou et de démontrer la proposition suivante :

Si la fonction $f(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz à exposant $\alpha \neq 1$,

$$(\mathrm{L}) \qquad |f(\theta + \delta) - f(\theta)| < K |\delta|^{\alpha},$$

la fonction conjuguée $g(\theta)$ satisfait à une condition de même forme, l'exposant ayant la même valeur α.

Si $f(\theta)$ est à nombres dérivés bornés, c'est-à-dire si $\alpha = 1$, la fonction $g(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'exposant aussi voisin qu'on voudra de 1.

Nous partirons de la formule

$$g(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(t) - f(\theta)] \cot \frac{t - \theta}{2} \, dt,$$

établie par M. Fatou et nous reprendrons sa démonstration en précisant une de ses inégalités.

([1]) *Acta mathematica*, t. XXX, p. 361.

Donnant à θ l'accroissement $\Delta\theta$, nous aurons

$$g(\theta+\Delta\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(t)-f(\theta+\Delta\theta)]\cot\frac{t-\theta-\Delta\theta}{2}\,dt,$$

$$(1)\quad g(\theta+\Delta\theta)-g(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{f(t)-f(\theta+\Delta\theta)}{\operatorname{tang}\frac{t-\theta-\Delta\theta}{2}} - \frac{f(t)-f(\theta)}{\operatorname{tang}\frac{t-\theta}{2}}\right]dt.$$

La fonction sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$(2)\qquad \frac{f(t)-f(\theta+\Delta\theta)}{\sin\frac{t-\theta}{2}\sin\frac{t-\theta-\Delta\theta}{2}}\sin\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{f(\theta)-f(\theta+\Delta\theta)}{\operatorname{tang}\frac{t-\theta}{2}}.$$

Intégrons d'abord de $-\pi$ à $\theta-\varepsilon$ et de $\theta+\varepsilon$ à $+\pi$, en supposant

$$\varepsilon = 3|\Delta\theta|.$$

En appliquant la condition (L) on a les inégalités

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(t)-f(\theta+\Delta\theta)}{\sin\frac{t-\theta}{2}\sin\frac{t-\theta-\Delta\theta}{2}}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right| &< K_1\frac{|t-\theta-\Delta\theta|^\alpha|\Delta\theta|}{|t-\theta||t-\theta-\Delta\theta|}\\
&= K_1\frac{|\Delta\theta|}{|t-\theta||t-\theta-\Delta\theta|^{1-\alpha}}\\
&= K_1\frac{|\Delta\theta|}{|t-\theta|^{2-\alpha}\left(\left|1-\frac{\Delta\theta}{t-\theta}\right|\right)^{1-\alpha}}\\
&< K_2\frac{|\Delta\theta|}{|t-\theta|^{2-\alpha}};
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\left|1-\frac{\Delta\theta}{t-\theta}\right|}$ étant borné dans les intervalles $(-\pi,\ \theta-\varepsilon)$ et $(\theta+\varepsilon,\ +\pi)$.

Par conséquent le premier terme de (2), intégré de $-\pi$ à $\theta-\varepsilon$ et de $\theta+\varepsilon$ à $+\pi$, donnera pour l'intégrale (1) une contribution moindre en valeur absolue que

$$\begin{aligned}
&C_1|\Delta\theta|^\alpha &&\text{si } \alpha\neq 1 \quad (^1),\\
&C_1'|\Delta\theta|\log\frac{1}{|\Delta\theta|} &&\text{si } \alpha = 1.
\end{aligned}$$

---

(1) Nous prenons $\alpha < 1$ parce que, dans le cas $\alpha > 1$, la fonction se réduit à une constante.

Le second terme de (2), intégré entre les mêmes limites, donnera comme résultat zéro.

Il nous reste à évaluer la limite supérieure de l'intégrale (1) quand les limites d'intégration sont $\theta - \varepsilon$ et $\theta + \varepsilon$. En tenant encore compte de la relation (L), on trouve facilement que les termes ainsi obtenus ont une somme moindre en valeur absolue que

$$C_2 | \Delta\theta |^{\alpha}, \qquad \text{quel que soit } \alpha.$$

On a donc, en définitive,

$$|g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta)| < (C_1 + C_2) | \Delta\theta |^{\alpha} \qquad \text{si } \alpha \neq 1$$

et

$$| g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta) | < C_1' | \Delta\theta | \log \frac{1}{| \Delta\theta |} + C_2 | \Delta\theta | < C | \Delta\theta |^{1-\eta} \quad \text{si } \alpha = 1,$$

$\eta > 0$ étant aussi petit qu'on voudra. C. Q. F. D.

En terminant, démontrons que, dans le cas $\alpha = 1$, l'exposant α de la condition de Lipschitz, pour la fonction conjuguée, peut être en réalité différent de 1.

Posons

$$f(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n \cos n\theta}{n^2},$$

où

$$a_1 > a_2 > a_3 \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Supposons

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty.$$

La fonction $f(\theta)$, déterminée de cette manière, a une dérivée continue $f'(\theta)$:

$$f'(\theta) = \frac{df}{d\theta} = -\sum_1 \frac{a_n \sin n\theta}{n};$$

la série dans le membre de droite étant uniformément convergente.

La fonction conjuguée

$$g(\theta) = -\sum_1^{\infty} \frac{a_n \sin n\theta}{n^2}$$

ne satisfera pas à une condition de Lipschitz à exposant égal à 1.

En effet, dans le cas contraire

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\theta}{n}$$

serait une série de Fourier d'une fonction bornée, ce qui est contradictoire à la supposition

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty.$$