BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GODEAUX

Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 89-117
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__89_0>

MÉMOIRE SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES DE GENRES ZÉRO ET DE BIGENRE UN;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans un travail antérieur, j'ai considéré les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Après avoir démontré qu'une telle involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même, j'ai fait voir que les périodes de ces transformations sont égales à 2, 3, 4 ou 6. J'ai de plus construit des surfaces normales, images des involutions engendrées par ces transformations, mais sans indiquer quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres zéro et de bigenre un soit l'image d'une involution appartenant à une surface de mêmes genres. Le travail actuel complète mes premières recherches.

Dans le Chapitre I, j'établis que :

Les involutions de genres zéro et de bigenre un, appartenant à une surface de mêmes genres, sont d'ordres 2, 3, 4, 6, 8 *ou* 9.

Dans le Chapitre II, j'indique quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres zéro et de bigenre un soit l'image d'une involution appartenant à une surface de mêmes genres.

Le troisième Chapitre est consacré à la surface de genres un qu'on obtient en considérant comme surface double une surface de genres zéro et de bigenre un, privée de points de diramation, dont l'existence a été prouvée par M. Enriques.

On trouvera ci-après une liste complète des travaux consacrés aux surfaces dont il est question ici :

F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Chap. VI, n° 39) (*Memoria della Soc. ital. delle Science*, 3ᵉ série, t. X, 1896).

F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (*Ibid.*, t. XIV, 1906).

G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, t. XXIX, 1910).

F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (n° 39) (*Acta mathematica*, t. XXXII, 1909).

F. Enriques, *Un osservazzione relativa alle superficie di bigenere uno* (*Rend. R. Accad. di Bologna*, 13 genn. 1908).

L. Godeaux, *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* (*Bull. Soc. mathém. de France*, t. XLI, 1913).

L. Godeaux, *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* (*Bull. de l'Acad. roumaine*, t. II, 1913).

L. Godeaux, *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 5e série, t. XXIII, 1e sem. 1914).

CHAPITRE I.

CLASSIFICATION DES INVOLUTIONS APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES ZÉRO ET DE BIGENRE UN.

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$. On sait que cette surface a le genre linéaire $p^{(1)} = 1$ et que ses plurigenres d'indices pairs sont égaux à un, ses plurigenres d'indices impairs égaux à zéro. Une courbe de genre $\pi > 1$ appartenant à F est contenue (totalement) dans un système linéaire de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$. Ce système est dépourvu de points-base, sauf dans le cas où ses courbes sont hyperelliptiques (1).

Supposons qu'il existe, sur la surface F, une involution I_n, d'ordre n, douée d'une nombre *fini* de points de coïncidence. Il résulte, d'un théorème que nous avons établi récemment (2) dans

(1) Enriques, *Sopra le superficie*, etc. (*loc. cit.*).

(2) L. Godeaux, *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914).

un cas plus général, que l'involution I_n est engendrée par un groupe g de transformations birationnelles (cycliques) de la surface F en elle-même.

Soit $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ une base du groupe g, c'est-à-dire un ensemble de transformations génératrices de ce groupe, tel que : 1° une transformation de l'ensemble ne soit pas une combinaison des autres; 2° toute transformation du groupe g soit une combinaison des transformations de l'ensemble. Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ les périodes respectives des transformations $T_1, T_2, \ldots, T_k$, ces k nombres divisent donc n.

Nous avons déjà démontré que n (et par conséquent $n_1, n_2, \ldots, n_k$) n'admet pour facteurs premiers que 2 et 3 ([1]).

Nous dirons que l'involution I_n est de *première espèce* si un point de F, invariant pour une transformation du groupe g, l'est également pour une autre transformation de ce groupe qui ne soit pas une puissance de la première. Dans le cas contraire, nous dirons que l'involution I_n est de *seconde espèce*.

Nous avons déterminé les involutions de première espèce et nos recherches se trouvent résumées dans l'énoncé suivant ([2]) :

Les involutions de genres zéro et de bigenre un, de première espèce, appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un, sont cycliques et leurs ordres sont égaux à 2, 3, 4 *ou* 6.

Une involution d'ordre 2 *possède* 4 *points de coïncidence (parfaite).*

Une involution d'ordre 3 *possède* 3 *points de coïncidence (non parfaite).*

Une involution d'ordre 4 *possède* 2 *points de coïncidence double (parfaite) et* 2 *points de coïncidence quadruple.*

Une involution d'ordre 6 *possède* 1 *point de coïncidence sextuple,* 2 *points de coïncidence triple et* 3 *points de coïncidence double.*

2. Pour déterminer les involutions de seconde espèce, nous

---

(1) *Sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*).

(2) *Détermination*, etc. (*loc. cit.*).

nous appuyerons sur le théorème suivant, que nous allons établir.

Soit I_α une involution cyclique (donc d'ordre 2, 3, 4 ou 6) avec laquelle une involution I_n, de seconde espèce, est composée. Supposons qu'aucune transformation du groupe g générateur de I_n, en dehors de la transformation de ce groupe, génératrice de I_α, ne laisse invariant un point de coïncidence de I_α.

Soit P_1 un point de coïncidence μ-uple de I_α. Le groupe de I_α comprenant P_1 sera composé de $\frac{\alpha}{\mu}$ points analogues et le groupe de I_n contenant P_1 sera composé de $\frac{n}{\alpha}$ groupes de I_α composés de $\frac{\alpha}{\mu}$ points de coïncidence μ-uple de I_α. Donc :

Le nombre des groupes de I_α *formés de* $\frac{\alpha}{\mu}$ *points de coïncidence* μ*-uple, est divisible par* $\frac{n}{\alpha}$.

Supposons $\alpha = 2$. Alors, puisque I_α possède 4 points de coïncidence, $\frac{n}{2}$ divise 4, c'est-à-dire que l'on a $n = 4$ ou $n = 8$ [1].

Supposons $\alpha = 3$. I_α possède 3 points de coïncidence, donc $\frac{n}{3}$ doit diviser 3, c'est-à-dire $n = 9$.

Si $\alpha = 4$, I_α possède un groupe formé de 2 points de coïncidence double, donc $\frac{n}{4}$ divise 1. On ne peut avoir $n = 4$, car, évidemment, α est inférieur à n. On ne peut donc avoir $\alpha = 4$.

Si $\alpha = 6$, I_α possède un seul point de coïncidence et $\frac{n}{6}$ doit diviser 1. On a d'autre part $n > 6$, dont on peut avoir $\alpha = 6$.

Une involution de seconde espèce est d'ordre 4, 8 *ou* 9 *et ne peut être composée qu'avec des involutions cycliques d'ordre* 2 *ou* 3.

3. *Involution d'ordre* 4. — Considérons une involution I_4 de

---

(1) I_n étant de deuxième espèce et I_α de première espèce, on a évidemment $\alpha < n$.

seconde espèce et d'ordre 4. Les transformations génératrices T_1, T_2, ..., T_k sont de période 2 et une base du groupe générateur est formée par deux quelconques de ces transformations T_1, T_2. Le produit de ces transformations a la période 2, donc on a

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

L'involution I_4 est composée avec trois involutions d'ordre 2 respectivement engendrées par T_1, T_2, $T_1 T_2$. Chacune de ces involutions a 4 points de coïncidence, donc I_4 possède 12 points de coïncidence formant 6 groupes de I_4.

4. *Involution d'ordre* 8. — Soit I_8 une involution d'ordre 8 et de seconde espèce. Une base du groupe générateur de I_8 est constituée par trois transformations nécessairement de période 2, T_1, T_2, T_3. De plus le produit de deux de ces transformations ne peut avoir que la période 2; donc ces trois transformations sont deux à deux permutables.

L'involution I_8 est composée avec sept involutions d'ordre 2 possédant chacune 4 points de coïncidence. L'involution I_8 possède donc 28 points de coïncidence formant 7 groupes.

5. *Involution d'ordre* 9. — Considérons une involution I_9 d'ordre 9 et de seconde espèce; soient T_1, T_2 deux transformations génératrices de cette involution. Ces transformations sont de période 3.

Formons le Tableau

$$\begin{array}{ccc} 1 & T_1 & T_1^2 \\ T_2 & T_1 T_2 & T_1^2 T_2 \\ T_2^2 & T_1 T_2^2 & T_1^2 T_2^2 \end{array}$$

Deux transformations de ce Tableau ne pouvant être identiques, T_1 et T_2 constituent une base du groupe g générateur de I_9. D'autre part, la transformation $T_2 T_1$ doit être une des transformations du Tableau. On vérifie aisément que l'on doit avoir

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

L'involution I_9 est composée avec quatre involutions d'ordre 3, possédant chacune 3 points de coïncidence. Elle possède donc 12 points de coïncidence triple formant 4 groupes.

6. En résumé, nous voyons que nous avons trois involutions de deuxième espèce et qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Les involutions de genres zéro et de bigenre un, de seconde espèce, appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un, sont d'ordre 4, 8 *ou* 9. *Elles sont engendrées par des groupes abéliens de transformations birationnelles et possèdent respectivement* 12 *points de coïncidence double*, 28 *points de coïncidence double*, 12 *points de coïncidence triple.*

Ce théorème, joint à celui que nous avons rappelé plus haut, nous permet de dresser le Tableau suivant :

TABLEAU DES INVOLUTIONS DE GENRES ZÉRO ET DE BIGENRE UN APPARTENANT A UNE SURFACE DE MÊMES CARACTÈRES.

Ordre de l'involution.	Périodes des transformations : T_1.	T_2.	T_3.	Nombre des points de coïncidence double.	triple.	quadruple.	sextuple.	Observations.
2	2	—	—	4	—	—	—	
3	3	—	—	—	3	—	—	
4	4	—	—	2	—	2	—	Cyclique
4	2	2	—	12	—	—	—	Groupe abélien
6	6	—	—	3	2	—	1	Groupe cyclique
8	2	2	2	28	—	—	—	Groupe abélien
9	3	3	—	—	12	—	—	Groupe abélien

CHAPITRE II.

LES SURFACES DE GENRES ZÉRO ET DE BIGENRE UN, IMAGES D'INVOLUTIONS APPARTENANT A DES SURFACES DE GENRES ZÉRO ET DE BIGENRE UN.

7. Soit F une surface de genres zéro et de bigenre un possédant une involution I_n, d'ordre n, de genres zéro et de bigenre un également. Soit Φ une surface image de l'involution I_n.

En opérant comme nous l'avons fait dans un travail antérieur [1], on peut construire, sur F, un système linéaire $|C|$, dépourvu de

[1] *Sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*).

points-base, de genre supérieur à un, simple, contenant un système partiel composé avec I_n et avec I_n seulement. On peut de plus choisir $|C|$ pour que le système $|\Gamma|$ formé par les courbes de Φ qui correspondent aux courbes du système partiel de $|C|$ composé avec I_n, soit dépourvu de points-base (c'est-à-dire pour que les courbes Γ ne soient pas hyperelliptiques). En rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace convenable, on obtient une surface normale, birationnellement identique à Φ, que nous désignerons par Φ_n.

Nous désignerons par $\pi - 1$ le nombre de dimensions de l'espace contenant Φ_n. Le système $|\Gamma|$ sera alors de genre π et de degré $2\pi - 2$, le système $|C|$ de degré $2n\pi - 2n$, de genre $n\pi - n + 1$ et de dimension $n\pi - n$.

Nous dirons que la surface Φ_n est de rang n et qu'elle est de première ou de deuxième espèce suivant que I_n est de première ou de seconde espèce.

Dans des travaux antérieurs ([1]), nous avons établi quelles sont les singularités de Φ_n aux points de diramation. On a ces énoncés :

1° *Une surface de rang* 2 *possède* 4 *points doubles coniques.*

2° *Une surface de rang* 3 *possède* 3 *points doubles biplanaires ordinaires.*

3° *Une surface de rang* 4 *et de première espèce possède* 1 *point double conique et* 2 *points doubles biplanaires de deuxième espèce* ([2]).

4° *Une surface de rang* 4 *et de seconde espèce possède* 6 *points doubles coniques.*

5° *Une surface de rang* 6 *possède* 1 *point double conique,* 1 *point double biplanaire ordinaire et* 1 *point double biplanaire de quatrième espèce.*

6° *Une surface de rang* 8 *possède* 7 *points doubles coniques.*

7° *Une surface de rang* 9 *possède* 4 *points doubles biplanaires ordinaires.*

([1]) ***Sur les involutions***, etc. (***loc. cit.***) et ***Détermination***, etc. (***loc. cit.***).

([2]) **Rappelons la terminologie utilisée ici. Un point double biplanaire d'espèce $2t$ est formé d'une suite de $t+1$ points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est conique. Lorsqu'au contraire, le dernier point est un point biplanaire ordinaire, le point est dit d'espèce $2t+1$.**

Nous nous proposons de rechercher, dans ce Chapitre, quelles sont les conditions pour qu'une surface de genres zéro et de bigenre un soit une surface de rang et d'espèce déterminés.

I. — Surface de rang 2.

8. Nous avons déjà résolu le problème, dans le cas d'une surface quelconque, pour le rang 2 ([1]). Il résulte de nos recherches que parmi les hypersurfaces découpant, sur Φ_2, le système $|2\Gamma|$, il y en a $\alpha^{\pi-2}$ passant par les quatre points doubles et touchant Φ_2 en chaque point de la courbe d'intersection. En d'autres termes, si l'on distingue par Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 les courbes rationnelles équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux quatre points doubles coniques de Φ_2, il doit exister un système $|\Gamma_0|$ tel que

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante.

On sait que toute surface de genres zéro et de bigenre un est birationnellement identique à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Le système double du système des sections planes est découpé, sur cette surface, par les surfaces du quatrième ordre circonscrites au tétraèdre. Par conséquent :

Si une surface d'ordre 6 *passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, est une surface de rang deux, il faut et il suffit :*

1° *Qu'elle possède* 4 *points doubles coniques;*

2° *Qu'il y ait* ∞^2 *surfaces du quatrième ordre circonscrites au tétraèdre, passant par les quatre points doubles, et touchant la surface en tout point de la courbe d'intersection.*

II. — Surface de rang 3.

9. Recherchons quelles sont les conditions pour qu'une surface Φ_3, de $S_{\pi-1}$, normale, possédant 3 points doubles bipla-

([1]) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914).

naires ordinaires, soit une surface de rang 3. Soient P'_1, P'_2, P'_3 ces trois points doubles, P_1, P_2, P_3 les points de coïncidence correspondants sur la surface F. Rappelons que nous avons démontré antérieurement ([1]) que, dans le domaine d'un point de coïncidence de l'involution I_3, il y a deux directions unies et deux seulement. La transformation T génératrice de I_3 engendre donc, dans le domaine du point P_i ($i = 1$, 2 ou 3) une involution d'ordre 3 possédant deux coincidences suivant des directions que nous indiquerons par t_{i1}, t_{i2}.

Le système $|C|$, de F, étant transformé en lui-même par T, cette transformation opère comme une homographie cyclique sur les courbes C. Nous savons qu'il y a un système partiel de $|C|$ composé avec I_3; d'après la théorie générale des homographies, il y en a un ou deux autres. De plus, les γ'_3 déterminées sur les courbes de ces systèmes par T doivent avoir des coïncidences en P_1, P_2, P_3. Soit $|C_1|$ un de ces systèmes.

Les courbes C_1 doivent passer par P_1, P_2, P_3. De plus, comme ce sont des courbes totales du système $|C|$, elles n'ont pas, en général, de points singuliers en P_1, P_2, P_3. Or, si les courbes C_1 passaient par P_1 avec une branche variable, puisque P_1 n'est pas un point de coïncidence parfaite, ces courbes devraient avoir deux autres branches variables passant par P_1. Ce point serait alors triple pour les courbes C_1, ce qui est impossible. Les courbes C_1 doivent donc toucher l'une des directions unies en P_1 (et en P_2, P_3). Supposons, pour fixer les idées, que les courbes C_1 touchent les directions t_{11}, t_{21}, t_{31} respectivement en P_1, P_2, P_3 et désignons par Γ_{01} les courbes correspondantes aux C_1 sur Φ_3.

Les courbes Γ_{01} ont le genre $\pi - 1$, car elles représentent des γ'_3 douées de trois points de coïncidence sur les C_1. Le système $|\Gamma_{01}|$ a donc le degré $2\pi - 4$ et la dimension $\pi - 2$. Le système $|C_1|$ a le degré effectif $3(2\pi - 4) = 6\pi - 12$ et comme il a trois points-base où ses courbes se touchent, ces trois points-base absorbent six intersections et le degré virtuel de ce système est donc bien $6\pi - 6$.

S'il existe, dans $|C|$, un troisième système $|C_2|$ composé avec I_3, sa dimension x est donnée, d'après la théorie des homographies

---

([1]) *Sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*).

hyperspatiales, par la formule

$$x+(\pi-1)+(\pi-2)+3=(3\pi-3)+1,$$

d'où $x=\pi-2$. Ce système $|C_2|$ existe et ses courbes touchent nécessairement, en P_1, P_2, P_3, les directions t_{12}, t_{22}, t_{32}. Il lui correspond, sur Φ_3, un système $|\Gamma_{02}|$ de degré $2\pi-4$, de genre $\pi-1$ et de dimension $\pi-2$.

10. L'existence de l'un des systèmes $|\Gamma_{01}|$, $|\Gamma_{02}|$ suffit pour que Φ_3 soit une surface de rang 3.

Remarquons en effet qu'à une courbe C quelconque correspond, sur Φ_3, une courbe de genre effectif $3\pi-2$, possédant $6\pi-6$ points doubles (en des points simples de Φ_3) et appartenant au système $|3\Gamma|$. Désignons par V les hypersurfaces de $S_{\pi-1}$ découpant, sur Φ_3, les courbes du système $|3\Gamma|$.

Lorsque la courbe C est transformée en elle-même par T, la courbe correspondante sur Φ_3 se réduit à une courbe comptée trois fois. Cette dernière courbe est une courbe Γ, Γ_{01} ou Γ_{02}. On en conclut que le long d'une courbe Γ_{01} ou Γ_{02}, il y a une hypersurface V ayant en chaque point un contact triponctuel avec Φ_3. Ces hypersurfaces passent évidemment par P'_1, P'_2, P'_3.

Soient (x_1, x_2, ..., $x_{\pi-1}$ étant les coordonnées cartésiennes de $S_{\pi-1}$)

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1})=0, \qquad \varphi_2=0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3}=0$$

les équations de Φ_3,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1})=0$$

l'équation d'une variété V passant par P'_1, P'_2, P'_3 et osculant Φ_3 le long d'une courbe Γ_{01}. Nous allons démontrer que la surface F^*, d'équations

$$\varphi_1=0, \qquad \varphi_2=0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3}=0, \qquad x_\pi=\sqrt[3]{f},$$

est une surface de genres zéro et de bigenre un.

Tout d'abord, il n'existe pas de courbe de diramation sur la surface Φ_3, puisque f oscule cette surface en chaque point d'intersection, donc F^* a les genres $P_2=P_4=\ldots=P_{2i}=\ldots=1$ et, de plus, les courbes $2i$-canoniques sont d'ordre zéro.

Fixons l'attention sur le point P'_1 qui est, rappelons-le, un point double biplanaire ordinaire pour Φ_3. La courbe Γ_{01} est tracée sur une nappe de Φ_3 en P'_1, donc en P'_1 la variété V considérée touche cette nappe. Une section hyperplane quelconque de Φ_3 a en P'_1 un point double ordinaire dont une branche a donc quatre intersections avec la variété V et l'autre deux. Il en résulte que le domaine de P'_1 est une courbe de diramation infiniment petite de la surface triple F^*. Le même raisonnement s'applique évidemment à P'_2, P'_3. A ces trois courbes de diramation infiniment petites correspondent, sur F^*, trois couples de courbes exceptionnelles qu'on peut faire disparaître par une transformation birationnelle convenable.

Notons que la surface triple F^*, ayant des points de diramation, est irréductible.

Soit δ la classe effective de Φ_3. L'invariant de Zeuthen-Segre de Φ_3 est égal à $\delta + 3.3 - (2\pi - 2) - 4\pi$. D'autre part, il est égal à 8, donc on a $\delta = 6\pi - 3$.

Dans un faisceau de courbes de F^* correspondant à un faisceau de sections hyperplanes de Φ_3, il y a $\delta + 3$ courbes ayant des points doubles; δ ont 3 points doubles et correspondent aux δ courbes Γ de Φ_3 ayant un point double, trois ont un point double, ce sont celles passant par les points correspondant aux courbes de diramation infiniment petites. D'autre part, le genre linéaire de F^* est $p^{(1)} = 1$ (puisque la courbe bicanonique est d'ordre zéro), par suite, le calcul de l'invariant

$$12 p_a + 9 - p^{(1)} = 12 p_a + 8$$

de Zeuthen-Segre de F^* donne

$$12 p_a + 18\pi = 3\delta + 9.$$

En portant dans cette formule la valeur trouvée plus haut pour δ, on trouve $p_a = 0$.

La surface F^* ayant les caractères $p_a = 0$, $P_{12} = 1$ est une surface de genres zéro et de bigenre un [1]. Par conséquent :

---

[1] F. Enriques, *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914).

Pour qu'une surface de genres zéro et de bigenre un, normale, soit de rang 3, il faut et il suffit que :

1° *Elle ait 3 points doubles biplanaires ordinaires;*

2° *Parmi les hypersurfaces découpant le système triple du système des sections hyperplanes, il y en ait passant par les trois points doubles et osculant la surface en tout points de la courbe d'intersection. En un point double, celle-ci est située sur une nappe de la surface.*

III. — Surface de rang 4 et de première espèce.

11. Soit Φ_4 une surface normale, de genres zéro et de bigenre un, de $S_{\pi-1}$, possédant 2 points, P'_1, P'_2, doubles biplanaires de deuxième espèce et 1 point double ordinaire P'_3. Quelles sont les conditions pour que la surface Φ_4 soit de rang 4 et de première espèce, c'est-à-dire soit l'image d'une involution cyclique I_4, d'ordre 4, appartenant à F?

Soit T la transformation birationnelle de F en elle-même qui engendre I_4.

T^2 opère, sur les courbes de $|C|$, comme une homographie involutive. Il y a donc deux systèmes partiels $|\overline{C}|$, $|\overline{C}_0|$ composés avec l'involution d'ordre 2, engendrée par T^2. On voit sans peine que l'un de ces systèmes, $|\overline{C}|$ par exemple, a la dimension $2\pi - 2$; il est dépourvu de points-base, tandis que l'autre, $|\overline{C}_0|$, a la dimension $2\pi - 3$ et a pour points-base les points P_1, P_2 de coïncidence quadruple de I_4, et les points P_{31}, P_{32} (formant le groupe de I_4 correspondant à P_3) de coïncidence double pour I_4.

T opère, sur les courbes de $|\overline{C}|$ et de $|\overline{C}_0|$, comme une homographie involutive. Dans chacun de ces systèmes, il y a donc deux systèmes partiels composés avec I_4.

Dans $|\overline{C}|$, l'un de ces systèmes est formé par les courbes C transformées des sections hyperplanes Γ de Φ_4. Il a la dimension $\pi - 1$ et, par suite, l'autre système contenu dans $|\overline{C}|$ et composé avec I_4, que nous désignerons par $|C_0|$, a la dimension $\pi - 2$. Ses courbes doivent passer par les points P_1, P_2. Désignons par Γ_0 les courbes qui correspondent, sur Φ_4, aux courbes C_0. $|\Gamma_0|$ est complet et a la dimension $\pi - 2$; son genre est donc $\pi - 1$ et son degré $2\pi - 4$. Le système $|C_0|$ a donc le degré effectif égal à $8\pi - 16$. Les points P_1, P_2 absorbent donc huit intersections. On sait que tout point de F, infiniment voisin de P_1 (ou de P_2) est invariant pour T^2, mais non pour T ([1]); il y a deux directions issues de P_1 (ou de P_2) invariantes pour T, nous les désignerons par t_{11}, t_{12} (ou t_{21}, t_{22}) respectivement.

Les courbes $\overline{C}$ passant par les points P_1, P_2 acquièrent un point double à tangentes variables ([2]). Les courbes C_0 sont comprises parmi ces courbes-là, donc elles ont des points doubles en P_1, P_2. Comme le degré de $|C_0|$ est de huit unités inférieur à celui de $|C|$, ces points doubles doivent être à tangentes variables, c'est-à-dire que leurs tangentes doivent être différentes de t_{11}, t_{12} et de t_{21}, t_{22}. Sur une courbe C_0, T détermine une γ'_4 possédant quatre coïncidences doubles. La formule de Zeuthen donne, pour le genre de cette γ'_4, c'est-à-dire pour le genre de la Γ_0 homologue à la C_0 considérée, la valeur $\pi - 1$, ce que nous savions déjà.

La transformation T détermine, dans le système $|\overline{C}_0|$, une homographie involutive; il y a donc deux systèmes partiels $|C_{01}|$, $|C_{02}|$, composés avec I_4, compris dans $|\overline{C}_0|$ (ce système $|\overline{C}_0|$ ne peut évidemment pas être composé avec I^4). Les courbes $\overline{C}_0$ passant par les points P_1, P_2, P_{31}, P_{32}, les systèmes $|C_{01}|$, $|C_{02}|$ joueront un rôle symétrique et auront donc la même dimension. Celle-ci, d'après la théorie des homographies, sera donc égale à $\pi - 2$. Soient $|\Gamma_{01}|$, $|\Gamma_{02}|$ les systèmes correspondant à $|C_{01}|$, $|C_{02}|$ respectivement, sur Φ_4.

Ces systèmes sont complets et ont donc la dimension $\pi - 2$, le genre $\pi - 1$ et le degré $2\pi - 4$. Les courbes C_{01}, C_{02}, étant les courbes $\overline{C}_0$ génériques, ne peuvent avoir de points doubles. Soient δ le nombre des points de coïncidence quadruple, δ_1 celui des points de coïncidence double, que possède la γ'_3 engendrée sur une C_{01} par T. La formule de Zeuthen donne $3\delta + \delta_1 = 8$.

---

(1) J'ai omis la démonstration de ce fait dans ma Note *Détermination*, etc. (*loc. cit.*). On trouvera cette démonstration dans mon *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'École Normale sup.*, 1914).

(2) Il suffit de se reporter à la théorie des involutions d'ordre 2. *Voir* ma Note *Sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*).

Or on a $\delta_1 \geqq 2$, puisque C_{01} passe par P_{31}, P_{32}; mais on a au plus $\delta_1 = 4$. On trouve précisément $\delta_1 = 2$, $\delta = 2$. Les courbes C_{01} passent par P_1, P_2 en y touchant respectivement les directions t_{11}, t_{21}. De même, les C_{02} passent par P_1, P_2 en y touchant t_{12}, t_{22}.

Le degré effectif de $|C_{01}|$ est $8\pi - 16$, donc il faut que les C_{01} aient en P_1, P_2 des contacts triponctuels. De même pour les C_{02}.

Ainsi, on voit que la surface Φ_4 contient trois systèmes $|\overline{C}_0|$, $|\overline{C}_{01}|$, $|\overline{C}_{02}|$ de genre $\pi - 1$, dimension $\pi - 2$ et degré $2\pi - 4$. Ces éléments sont caractéristiques de la surface de rang 4.

12. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Pour qu'une surface normale, de genre zéro et de bigenre un, soit une surface de rang 4 et de première espèce, il faut et il suffit que :

1° *Elle possède 2 points doubles biplanaires de deuxième espèce et 1 point double conique;*

2° *Il y ait, parmi les hypersurfaces découpant sur la surface les courbes du système quadruple du système des sections hyperplanes, des hypersurfaces passant par les trois points doubles et ayant, en chaque point d'intersection, un contact quadriponctuel avec la surface.*

La démonstration de ce théorème se fait d'une manière analogue à celle du théorème du paragraphe II; nous nous contenterons donc de l'esquisser à grands traits.

A une courbe C de F, quelconque, correspond sur Φ_4 une courbe du système $|4\Gamma|$. Lorsque C est invariant pour T, la courbe de $|4\Gamma|$ qui lui correspond est une courbe comptée quatre fois. Si V est une des hypersurfaces découpant sur Φ_4 le système $|4\Gamma|$, on a quatre cas :

a. La courbe C est l'homologue d'une courbe Γ. V se réduit à un hyperplane multiple.

b. La courbe C est une courbe C_0. V se réduit à une variété double (de la famille des hypersurfaces découpant sur Φ_4 le système $|2\Gamma|$) passant par les trois points doubles et touchant Φ_4 en chaque point d'intersection.

c. La courbe C est une courbe C_{01}. V est une hypersurface passant par les trois points doubles et ayant un contact quartiponctuel avec Φ_4 tout le long d'une courbe Γ_{01}. En P'_1 et en P'_2, cette hypersurface oscule une nappe de Φ_4.

d. La courbe C est une courbe C_{02}. La même particularité se présente.

Soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0$$

les équations de Φ_4,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0$$

l'équation d'une hypersurface V passant par P_1, P_2, P_3 et ayant un contact quartiponctuel avec Φ_4 le long d'une courbe Γ_{01} (ou Γ_{02}). Les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0, \qquad x_\pi = \sqrt[4]{f}$$

représentent une surface F^* qu'on démontre, comme au paragraphe II, être une surface de genres zéro et de bigenre un.

IV. — Surface de rang 4 et de seconde espèce.

13. Il est assez simple de trouver les conditions pour qu'une surface normale Φ'_4, de genres zéro et de bigenre un, de $S_{\pi-1}$, soit de rang 4 et d'espèce 2.

Soient, sur F, T_1, T_2, $T_3 = T_1 T_2$ les transformations génératrices d'une involution de deuxième espèce et d'ordre 4, I'_4. Chacune de ces transformations engendre une involution d'ordre 2; nous désignerons par I_2 une de ces involutions et par Ψ une surface, nécessairement de genres zéro et de bigenre un, représentative de I_2.

A l'involution I'_4 correspond, sur Ψ, une involution I'_2 d'ordre 2, possédant quatre points de coïncidence. Soient P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32} les quatre points de diramation de Φ'_4 correspondant à ces points de coïncidence. Ainsi que nous l'avons vu il y a, parmi les hypersurfaces V de $S_{\pi-1}$, découpant sur Φ'_4 le système $|2\Gamma|$, $\infty^{\pi-2}$ passant par P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32} et touchant Φ'_4 en chaque point de la courbe d'intersection. Nous désignerons par Γ_1 ces courbes.

Soient P_{11}, P_{12} les deux autres points de diramation de Φ'_4. Il y a de même $\infty^{\pi-2}$ hypersurfaces V passant par P_{11}, P_{12}, P_{31}, P_{32} et touchant Φ'_4 en chaque point de la courbe d'intersection Γ_2; et ∞^2 V passant par P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} et touchant Φ'_4 en chaque point de la courbe d'intersection Γ_3.

On a donc sur Φ'_4 trois systèmes de courbes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, de dimension $\pi - 2$ et, par suite, de genre $\pi - 1$ et de degré $2\pi - 4$.

Les six points de diramation P_{11}, P_{12}, ..., P_{32} sont des points doubles coniques équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des courbes rationnelles de degré -2 que nous désignerons respectivement par Γ_{11}, Γ_{12}, ..., Γ_{32}. On a les trois relations fonctionnelles (§ 1)

$$2\Gamma_1 + \Gamma_{21} + \Gamma_{22} + \Gamma_{31} + \Gamma_{32} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_2 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \Gamma_{11} + \Gamma_{12} \equiv 2\Gamma,$$
$$2\Gamma_3 + \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{21} + \Gamma_{22} \equiv 2\Gamma.$$

14. Soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0$$

les équations de Φ'_4,

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad f_2 = 0$$

les équations de deux hypersurfaces V passant respectivement par P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}; P_{31}, P_{32}, P_{11}, P_{12} et touchant Φ'_4 le long d'une courbe Γ_1 ou d'une courbe Γ_2. Les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{\pi-3} = 0, \quad x_\pi = \sqrt{f_1}, \quad x_{\pi+1} = \sqrt{f_2}$$

représentent une surface F^* qu'on vérifie, comme nous l'avons déjà fait, être une surface de genres zéro et de bigenre un. Par suite :

Pour qu'une surface normale, de genres zéro et de bigenre un, soit de rang 4 et de seconde espèce, il faut et il suffit que :

1° *Elle possède trois couples de points doubles coniques ;*

2° *Parmi les hypersurfaces découpant sur la surface le système double du système des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par deux couples de points doubles et touchent la surface en tous points de la courbe d'intersection.*

V. — Surface de rang 6 et de première espèce.

15. Soit Φ_6 une surface normale, de genres zéro et de bigenre un, de $S_{\pi-1}$, possédant un point double biplanaire de quatrième espèce P'_1; un point double biplanaire ordinaire P'_2, un point double conique P'_3. Quelles sont les conditions pour qu'elle soit l'image d'une involution I_6, nécessairement cyclique, appartenant à F?

Considérons, dans le système $|C|$, les systèmes partiels composés avec I_6. Soit T la transformation de période 6, génératrice de I_6.

La transformation T^3 opère, sur les courbes de $|C|$, comme une homographie involutive. Il y a donc deux systèmes composés avec l'involution d'ordre 2 engendrée par cette transformation. L'un, que nous désignerons par $|\overline{C}|$, a la dimension $3\pi - 1$ (il suffit, pour s'en convaincre, de considérer une surface image de l'involution d'ordre 2); l'autre, $|\overline{C}_0|$, a la dimension $3\pi - 4$ et ses courbes passent par le point P_1 correspondant sur F à P'_1 et par les points P_{31}, P_{32}, P_{33} correspondant sur F à P'_3.

La transformation T opère, sur les courbes de $|\overline{C}|$, comme une homographie cyclique de période 3. Il y a donc, dans $|\overline{C}|$, trois systèmes composés avec I_6 (*voir* § II). L'un, de dimension $\pi - 1$, comprend les courbes C qui correspondent aux courbes Γ. Les autres, que nous désignerons par $|C_1|$, $|C_2|$, ont la même dimension, égale à $\pi - 2$. Les courbes C_1, C_2 passent par P_1 et par les points P_{21}, P_{22} qui correspondent sur F à P'_2.

T opère comme une homographie de période 3 sur les courbes de $|\overline{C}_0|$. Il y a au moins deux et au plus trois systèmes compris dans $|\overline{C}_0|$ qui sont composés avec I_6. Nous les déterminerons plus loin.

La transformation T^2 opère, sur $|C|$, comme une homographie de période 3. Il y a (*voir* § II) trois systèmes composés avec l'involution d'ordre 3 engendrée par T^2; nous les désignerons par $|\overline{\overline{C}}|$, $|\overline{\overline{C}}_1|$, $|\overline{\overline{C}}_2|$. Le système $|\overline{\overline{C}}|$ est dépourvu de points-base et a la dimension $2\pi - 2$. $|\overline{\overline{C}}_1|$ et $|\overline{\overline{C}}_2|$ ont la même dimension $2\pi - 3$. Les courbes $\overline{\overline{C}}_1$ passent par P_1, P_{21}, P_{22} en y touchant respectivement les directions t_{11}, t_{211}, t_{221}, les $\overline{\overline{C}}_2$ passant également par ces points, mais en y touchant respectivement les directions t_{12}, t_{212}, t_{222}; t_{11}, t_{12} étant les directions unies dans l'homographie d'ordre 3 engendrée dans le domaine de P_1 par T; t_{211}, t_{212}; t_{221}, t_{222} ayant des définitions analogues (1).

T opère comme une homographie involutive sur $|\overline{\overline{C}}|$; il y a donc deux systèmes composés avec I_6. L'un est le transformé de $|\Gamma|$, l'autre, de dimension $\pi - 2$, que nous désignerons par $|C_0|$, a pour points-base P_1, P_{31}, P_{32} et P_{33}.

De même, T engendre une homographie involutive dans $|\overline{\overline{C}}_1|$, $|\overline{\overline{C}}_2|$. Il y a, dans chacun de ces systèmes, deux systèmes composés avec I_6. Deux de ces systèmes sont $|C_1|$, $|C_2|$ et appartiennent respectivement à $|\overline{\overline{C}}_1|$, $|\overline{\overline{C}}_2|$. Nous désignerons les autres par $|C_{01}|$ et $|C_{02}|$. Les dimensions de ces systèmes sont toutes deux égales à $\pi - 2$, d'après la théorie générale des homographies.

On voit aisément que des six systèmes compris dans $|C|$ et composés avec I_6, trois : $|C_0|$, $|C_{01}|$, $|C_{02}|$ sont compris dans $|\overline{C}_0|$. Les courbes de $|\overline{C}_0|$ passent par P_1, P_{31}, P_{32}, P_{33} et les courbes C_0 ne passent pas par P_{21}, P_{22}; par suite, d'après la théorie des involutions d'ordre 3, les courbes C_{01} passent par P_1 en touchant la direction t_{11}; par P_{21}, P_{22} en y touchant respectivement les directions t_{211}, t_{221}. Les courbes C_{01} jouissent de propriétés symétriques.

Aux courbes C_{01} correspondent, sur Φ_6, des courbes que nous désignerons par Γ_{01}. Ces courbes forment un système $|\Gamma_{01}|$ nécessairement complet, donc de genre $\pi - 1$ et de degré $2\pi - 4$, $\pi - 2$ étant sa dimension. L'existence du système $|\Gamma_{01}|$ caractérise Φ_6.

16. En répétant un raisonnement que nous avons déjà fait plusieurs fois dans le courant de ce travail, on voit que si V désigne une hypersurface de $S_{\pi-1}$ découpant, sur Φ_6, une courbe du

(1) Le point P_1 est un point de coïncidence sextuple. Pour l'étude de ces points, nous renvoyons le lecteur à notre *Mémoire sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*). Les points P_{21}, P_{22} sont des points de coïncidence triple formant un groupe de I_6.

système $|6\Gamma|$, il y a $\infty^{\pi-2}$ hypersurfaces V passant par P_1, P_2, P_3 et ayant un contact 6-ponctuel avec Φ_6 le long des Γ_{01}.

Si l'on désigne par

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0$$

l'équation d'une de ces hypersurfaces V, par

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0$$

les équations de Φ_6, les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0, \qquad \varphi_\pi = \sqrt[6]{f}$$

représentent une surface F^* qu'on vérifie être de genres zéro et de bigenre un.

La seule difficulté est la démonstration du fait que les domaines des points P'_1, P'_2, P'_3 doivent être considérés comme des courbes de diramation infiniment petites respectivement sextuple, triple et double.

Dans le domaine de P_1, $f = 0$ a un contact 5-ponctuel avec la nappe de la surface Φ_6 sur laquelle la Γ_{01} est tracée; il en résulte donc bien que ce domaine est une courbe de diramation sextuple infiniment petite.

Dans le domaine de P_2, $f = 0$ ne doit avoir qu'un contact ordinaire avec la nappe de Φ_6 sur laquelle Γ_{01} est tracée, car à un point de cette Γ_{01} situé dans ce domaine, correspondent deux points de la C_{01} homologue sur F.

De même, $f = 0$ ne doit pas avoir de contact avec Φ_6 dans le domaine de P_3.

La démonstration s'achève comme au paragraphe II. Par suite :

Pour qu'une surface normale de genres zéro et de bigenre un soit de rang 6 (*et de première espèce*), *il faut et il suffit que :*

1° *Elle possède un point double biplanaire de quatrième espèce, un point double biplanaire ordinaire et un point double conique;*

2° *Parmi les hypersurfaces découpant sur elle le système sextuple du système des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par les trois points doubles et qui aient, en tout point d'intersection, un contact* 6-*ponctuel avec la surface.*

VI. — Surface de rang 8 et de seconde espèce.

17. La recherche des conditions pour qu'une surface Φ_8, normale, de genres zéro et de bigenre un, possédant 7 points doubles coniques, représente une involution I_8 d'ordre 8 et de seconde espèce, appartenant à F, ne présente aucune difficulté.

A chaque involution d'ordre 4 (et de deuxième espèce) appartenant à F et avec laquelle I_8 est composée, correspond une surface Ψ, de genres zéro et de bigenre un, image de cette involution. Sur Ψ, il correspond à I_8 une involution d'ordre 2 et cette involution d'ordre 2 donne naissance, sur Φ_8, à un système de courbes Γ_0 telles que, V étant une hypersurface découpant sur Φ_8 le système $|2\Gamma|$, il y a une V passant par quatre points doubles (correspondant aux quatre points de coïncidence de l'involution d'ordre 2 sur Ψ) touchant Φ_8 tout le long d'une courbe Γ_0.

Il y a sept involutions d'ordre 4 avec lesquelles I_8 est composée, donc il y a sept systèmes de courbes Γ_0.

Soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0$$

les équations de Φ_8,

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

les équations de trois variétés V passant chacune par quatre des sept points doubles de Φ_8 et touchant cette surface en chaque point d'intersection. Supposons de plus que ces trois variétés soient choisies de telle manière que deux d'entre elles ne passent pas par les mêmes points doubles de Φ_8 et que, d'autre part, chaque point double de Φ_8 appartienne au moins à une des trois variétés. Dans ces conditions, on vérifie aisément que les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_{\pi-3} = 0, \quad x_\pi = \sqrt{f_1}, \quad x_{\pi+1} = \sqrt{f_2}, \quad x_{\pi+2} = \sqrt{f_3}$$

représentent une surface de genres zéro et de bigenre un. Par suite :

Pour qu'une surface normale de genres zéro et de bi-

genre un soit de rang 8 (*et de seconde espèce*), *il faut et il suffit que :*

1° *Elle possède 7 points doubles coniques ;*

2° *Parmi les hypersurfaces découpant sur elle le système double du système des sections hyperplanes, il y en ait passant par quatre points doubles et touchant la surface en chaque point d'intersection.*

VII. — Surface de rang 9 et de seconde espèce.

18. Soit Φ_9 une surface normale de $S_{\pi-1}$, de rang 9 et de deuxième espèce. Cette surface possède donc 4 points doubles biplanaires ordinaires.

Soit Ψ une surface, nécessairement de genres zéro et de bigenre un, représentant une involution d'ordre 3 avec laquelle I_9 est composée et désignons par V les hypersurfaces découpant, sur Φ_9, les courbes du système $|3\Gamma|$.

Sur Ψ, il correspond à I_9 une involution d'ordre 3, ayant 3 points de coïncidence et dont Φ_9 est une image. Par suite, comme nous l'avons vu (§ II), il y a deux familles de variétés V passant par trois des quatre points doubles de Φ_9 et touchant cette surface en chaque point d'intersection.

Il y a trois involutions d'ordre 3, sur F, avec lesquelles I_9 est composée; par suite, il y a quatre couples de familles de variétés V passant par trois points doubles de Φ_9 et osculant cette surface en chaque point d'intersection.

Soient

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0$$

les équations de Φ_9,

$$f_1(x_1, \ldots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad f_2 = 0$$

les équations de deux hypersurfaces V passant chacune par trois points doubles de Φ_9 (différents pour les deux hypersurfaces) et osculant cette surface en chaque point d'intersection. On démontre sans peine que les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{\pi-3} = 0, \qquad x_\pi = \sqrt[3]{f_1}, \qquad x_{\pi+1} = \sqrt[3]{f_2}$$

représentent une surface de genres zéro et de bigenre un. Par suite :

Pour qu'une surface normale de genres zéro et de bigenre un soit de rang 9 (*et de deuxième espèce*), *il faut et il suffit que :*

1° *Elle possède* 4 *points doubles biplanaires ordinaires;*
2° *Parmi les hypersurfaces découpant, sur la surface, le système triple du système des sections hyperplanes, il y en ait passant par trois points doubles et osculant la surface en chaque point d'intersection.*

CHAPITRE III.

LA SURFACE DE GENRES UN POSSÉDANT UNE INVOLUTION D'ORDRE DEUX, DE GENRES ZÉRO ET DE BIGENRE UN.

19. Soient

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad v \equiv ax + by + cz + d = 0$$

les équations de quatre plans formant un tétraèdre proprement dit. L'équation

$$\varphi_2(xyz, yzv, zvx, vxy) + xyzvf_2(x, y, z, v) = 0,$$

où φ_2, f_2 sont les symboles de polynomes homogènes du second degré, représente une surface Φ, d'ordre 6, passant doublement par les arêtes du tétraèdre formé par les plans $x = y = z = v = 0$, et qui est le type le plus général de la surface de genres zéro et de bigenre un [1].

Les équations

$$\varphi_2 + xyzvf_2 = 0, \qquad u^2 = xyzv$$

représentent une surface de genres un, F, irréductible, qu'on peut ramener, par une transformation birationnelle, à une quadrique double [2].

Cette surface F possède une involution d'ordre 2, engendrée

[1] Enriques, *Sopra le superficie*, etc. (*loc. cit.*).
[2] Enriques, *Un osservazione*, etc. (*loc. cit.*).

par la transformation T

$$(x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ u' = -u),$$

dont Φ est une image. Cette involution ne possède pas de coïncidences.

20. Considérons, sur la surface Φ, un système linéaire $|\Gamma|$, de genre $\pi > 1$ et son adjoint $|\Gamma'|$. Soient $|C|$, $|C'|$ les systèmes formés par les courbes de F qui correspondent respectivement aux courbes Γ, Γ'.

Sur une courbe Γ, les Γ' découpent la série canonique complète. Sur la courbe C correspondant à cette courbe Γ, les C' découpent donc une $g^{\pi-1}_{4\pi-4}$ transformée de la série canonique de Γ. La transformation T engendrant sur F, et en particulier sur la courbe C considérée,une involution d'ordre 2 privée de points de coïncidence, il résulte de l'interprétation géométrique donnée par M. Castelnuovo à la formule de Zeuthen, que la $g^{\pi-1}_{4\pi-4}$ découpée sur C par les C' fait partie de la série canonique de C. Or, sur F, un système linéaire est son propre adjoint, donc $C \equiv C'$.

Soit maintenant Γ une courbe elliptique isolée de Φ. Soit C la courbe, elliptique, qui lui correspond sur F. Cette courbe C appartient à un faisceau $|C|$ invariant pour T, mais dont les courbes ne sont pas invariantes pour T, car alors Γ ne serait pas isolée. Il y a donc, dans $|C|$, une deuxième courbe seulement, C', invariante pour T (car cette transformation agit sur $|C|$ comme une homographie involutive). Soit Γ' la courbe qui lui correspond sur Φ. A une courbe C arbitraire correspond sur Φ une courbe elliptique variable dans le système $|2\Gamma|$, ou $|2\Gamma'|$. On a donc $2\Gamma \equiv 2\Gamma'$ et Γ' est par suite l'adjointe de Γ.

Considérons enfin un faisceau de courbes elliptiques sur Φ. A ces courbes correspondent sur F des courbes elliptiques, éventuellement réductibles, formant nécessairement un faisceau. On peut donc dire, en général, que :

Les courbes qui correspondent, *sur* F, *à une courbe de* Φ *et à son adjointe sont équivalentes.*

21. Considérons, sur la surface Φ, un faisceau $|\Gamma|$ de courbes de genre deux. On sait qu'il existe toujours de pareils faisceaux et qu'ils sont complets, pourvus de deux points-base qui sont des points de coïncidence de la g_2^1 existant sur chacune des courbes Γ. Les groupes de ces ∞^1 g_2^1 forment une involution rationnelle φ_2 et le système $|\Gamma'|$ adjoint à $|\Gamma|$, qui est également de genre deux, donne lieu à la même involution (¹).

Le système $|C|$, appartenant à F, qui comprend les transformées des courbes de $|\Gamma|$ et de $|\Gamma'|$, est de genre trois, de degré 4 et de dimension 3. Observons que les courbes de genre trois possédant une involution d'ordre et de genre deux (privée de points de coïncidence) sont hyperelliptiques et possèdent de plus une involution elliptique d'ordre 2 (²). Les trois involutions d'ordre 2 existant sur ces courbes sont deux à deux permutables. Dans le système $|C|$ il y a donc deux faisceaux de courbes hyperelliptiques; et les g_2^1 existant sur ces courbes engendrent une même involution I_2' d'ordre 2. Les courbes de $|C|$ découpant sur l'une d'elles (en particulier sur la transformée d'une Γ ou d'une Γ') la série canonique, on voit que le système $|C|$ est composé avec I_2'. Par suite, en rapportant projectivement les courbes de $|C|$ aux plans d'un S_3, on obtient comme modèle projectif de F, une quadrique double Q. C'est là un résultat obtenu par M. Enriques (³).

Soit T′ la transformation birationnelle de F en elle-même engendrant I_2'. Sur les courbes C transformées des Γ ou des Γ', T et T′ sont permutables et le produit $TT' = T'T$ engendre une involution elliptique d'ordre 2. Les transformations T, T′ sont

---

(¹) Enriques, *Sopra le superficie*, etc. (*loc. cit.*).

(²) Une courbe de genre trois contenant une γ_2^1 d'ordre et de genre deux (nécessairement sans points de coïncidence, peut toujours être représentée par les équations $y^2 = f_6(x)$, $z^2 = \varphi(x, y)$, où $f_6(x)$ est un polynome de degré 6 et $\varphi(x, y) = 0$ une courbe touchant $y^2 = f_6(x)$ en chaque point d'intersection. Cette courbe C_1 contient deux involutions d'ordre 2 engendrées respectivement par $(x' = x, y' = -y, z' = z)$, $(x' = x, y' = -y, z' = -z)$. Soient π', π'' les genres de ces involutions. Le nombre $8 - 4\pi'$, $8 - 4\pi''$ des points de coïncidence de ces involutions est évidemment égal au nombre 12 des points de C correspondant aux points $f_6(x) = 0$, $y = z = 0$. On a donc $\pi' + \pi'' = 1$. On voit facilement qu'on a précisément $\pi' = 0$, $\pi'' = 1$. *Voir* à ce sujet : R. Torelli, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica* (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. XXXVII, 1914, n° 32, note 33).

(³) *Un osservazione*, etc. (*loc. cit.*).

donc permutables sur toute la surface F et $T'' = TT'$ engendre une involution I''_2, d'ordre 2, dont une surface représentative Ψ contient deux faisceaux de courbes elliptiques $|C^\star|, |C'^\star|$. Remarquons que ces faisceaux sont complets, car autrement, on aurait un système de dimension supérieure à 1 de courbes C invariantes pour T'' et T', donc pour $T = T'T''$, ce qui est absurde.

Les transformations T, T', T'' engendrent sur F une involution d'ordre 4 à laquelle correspond, sur la quadrique Q, une involution d'ordre 2 engendrée par une transformation θ de Q en elle-même. Dans le système des sections planes de Q, il y a deux faisceaux de courbes invariantes pour θ, ce sont les courbes correspondant aux courbes C transformées des Γ, Γ'. θ est donc une homographie involutive bi-axiale dont les axes ne sont pas des génératrices de Q (car alors les courbes C homologues des Γ, Γ' seraient elliptiques, ce qui est absurde). Il y a donc, sur Q, 4 points invariants pour θ et, puisque θ correspond aux deux transformations T, T'', 8 points de F invariants pour T ou T''. Mais T ne laisse aucun point invariant sur F, donc T'' engendre une involution d'ordre 2 ayant 8 points de coïncidence; cette involution est donc de genres un [1]. Par suite :

Toute surface algébrique Φ, de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) représente une involution d'ordre 2, dépourvue de points de coïncidence, appartenant à une surface F *de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Cette surface* F *possède en outre deux involutions d'ordre 2 : l'une rationnelle ($p_a = P_2 = 0$), l'autre de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et les transformations qui engendrent ces trois involutions sont deux à deux permutables* [2].

22. Une quadrique double de genres un possède une courbe de diramation d'ordre 8 et se ramène, par une transformation birationnelle, à un plan double dont la courbe de diramation est du

(1) L. GODEAUX, *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un* (*Bull. Acad. R. de Belgique*, 1913) ; *Mémoire sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*).

(2) L. GODEAUX, *Sur les surfaces de genres*, etc. (*loc. cit.*).

huitième ordre et possède 2 points quadruples (distincts si la quadrique n'est pas un cône) [1].

La quadrique Q n'est pas un cône, car à chacun des faisceaux de courbes C de F transformées des Γ et Γ' de Φ correspond un système de génératrices de Q. La quadrique double étant de genres un, la courbe de diramation est d'ordre 8 et est invariante pour l'homographie involutive bi-axiale θ. La quadrique double de genres un Q est donc équivalente au plan double

$$(1)\qquad z^2 = \sum_{i,k=0}^{4} a_{i,k}(x^i y^k + x^{4-i} y^{4-k}) \qquad (a_{ik} = a_{4-i,4-k}),$$

dont la courbe de diramation est d'ordre 8, possède deux points quadruples distincts, et est transformée en elle-même par $\left(x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}\right)$.

Les transformations T, T', T'' ont respectivement pour équations, sur le plan double (1),

$$(\mathrm{T})\qquad x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{1}{y}, \qquad z' = -z;$$

$$(\mathrm{T}')\qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -z;$$

$$(\mathrm{T}'')\qquad x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{1}{y}, \qquad z' = z.$$

La surface F, *possédant une involution de genres zéro et de bigenre un, peut être ramenée, par une transformation birationnelle, à un plan double dont la courbe de diramation, d'ordre* 8, *possède deux points quadruples et est invariante pour une transformation quadratique involutive.*

23. Reprenons l'équation de la surface Φ donnée au début de ce Chapitre :

$$\varphi_2(xyz, yzv, zvx, vxy) + xyzv f_2(x, y, z, v) = 0,$$

et soient

$$(\theta_1)\qquad x' = \chi_1(x, y, z), \qquad y' = \chi_2(x, y, z), \qquad z' = \chi_3(x, y, z)$$

[1] F. Enriques, *Sui piani doppi di genere uno* (*Memorie della Soc. italiana delle Scienze*, 1896).

les équations d'une transformation birationnelle θ_1 de cette surface en elle-même. La surface F, dont les équations sont

$$\varphi_2 + xyzv f_2 = 0, \qquad u^2 = xyzv,$$

admet les deux transformations birationnelles en elle-même :

$$(T_1) \qquad x' = \chi_1, \quad y' = \chi_2, \quad z' = \chi_3, \quad u' = -u;$$
$$(T'_1) \qquad x' = \chi_1, \quad y' = \chi_2, \quad z' = \chi_3, \quad u' = u.$$

On a évidemment

$$T_1 = TT'_1 = T'_1 T, \qquad T_1^2 = T_1'^2.$$

Inversement, à une transformation birationnelle de F en elle-même correspond une transformation birationnelle de Φ en elle-même. De plus, si θ_1 est cyclique, il en est de même de T_1, T'_1, et inversement.

Le groupe des transformations birationnelles de F *en elle-même, et celui de* Φ, *sont en isomorphisme mériédrique de degré* 2. *Ces deux groupes sont infinis discontinus* ([1]).

24. Nous allons considérer spécialement le cas où θ_1 est cyclique. Nous remarquerons tout d'abord que, si θ_1 a la période r, l'involution I_r engendrée sur Φ par θ_1 est rationnelle ($p_a = P_3 = 0$) ou de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). En effet, on a, pour une surface image de I_r, $p_a = p_g = 0$ et $P_2 = 0$ ou 1, $P_3 = 0$.

Nous rechercherons la nature des involutions engendrées sur F par T_1, T'_1, étant donnée la nature de I_r.

Les équations de la transformation T'_1 montrent qu'elle a la même période r que θ_1. Au contraire, T_1 n'a la période r que si r est pair; si r est impair, T_1 a la période $2r$.

Envisageons le cas $r = 2$. Si l'involution engendrée par θ_1 est rationnelle, nous avons déjà vu que T_1 engendre une involution de genres un, T'_1 une involution rationnelle. Si l'involution engendrée par θ_1 est de genres zéro et de bigenre un, elle possède 4 points de coïncidence et il y a par suite 8 points de F

([1]) Pour le groupe de Φ, *voir* ENRIQUES, *Sopra le superficie*, etc. (*loc. cit.*) et FANO, *Superficie*, etc. (*loc. cit.*).

invariants, soit pour T_1, soit pour T'_1. Or, on sait qu'une involution d'ordre 2, douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface de genres un, est de genres un ou de genres zéro et de bigenre un ([1]). Par suite, l'une des transformations T_1, T'_1 engendre une involution de genres un, l'autre une involution de genres zéro et de bigenre un (on voit aisément que c'est précisément T_1 qui engendre cette dernière).

Supposons r pair et égal à 2ε. Si l'involution I_r est rationnelle, elle possède une courbe de coïncidence à laquelle correspond, sur F, une courbe D transformée en elle-même par T. Les points de cette courbe D sont invariants pour $T_1^2 = T_1'^2$ et, par suite, l'involution d'ordre ε engendrée sur F par $T_1^2 = T_1'^2$ est rationnelle. Une surface image de l'involution d'ordre r engendrée par T_1 (ou par T'_1) sur F est également l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface représentative de l'involution engendrée par T_1^2. Cette dernière surface étant rationnelle, il en est de même de la première et les involutions engendrées par T_1, T'_1 sont donc rationnelles.

Si l'involution I_r est de genres zéro et de bigenre un, on a $r = 4$ ou 6.

Si $r = 4$, I_r possède 2 points de coïncidence quadruple et deux points de coïncidence double sur Φ. Par suite, T_1 et T'_1 laissent invariants, sur F, 4 points et $T_1^2 = T_1'^2$, 8 points dont les quatre premiers. Si l'on se reporte à la théorie des involutions de genres un appartenant à une surface de genres un ([2]), on voit aisément que T_1 engendre une involution d'ordre 4 et de genres un ayant 4 points de coïncidence quadruple et 4 points de coïncidence double. Sur la surface de genres un, image de l'involution d'ordre 2 engendrée par $T^2 = T_1'^2$, il correspond, à l'involution d'ordre 4 engendrée par T'_1, une involution d'ordre 2, privée de coïncidences, donc de genres zéro et de bigenre un.

Si $r = 6$, on voit de même que T_1 engendre une involution d'ordre 6 et de genres un, tandis que T'_1 engendre une involution d'ordre 6, de genres zéro et de bigenre un.

([1]) L. Godeaux, *Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, appartenant à certaines surfaces algébriques.* (*Mém. Soc. Sc. Hainaut*, 1913).

([2]) L. Godeaux, *Mémoire sur les involutions*, etc. (*loc. cit.*).

Reste à considérer le cas où r est impair. Supposons en premier lieu que θ_1 engendre une involution rationnelle. A la courbe de coïncidence de cette involution correspond, sur F, une courbe D dont les points ne peuvent être invariants pour T_1, car alors la transformation $T'_1 = TT_1$ déterminerait, sur D, une involution d'ordre 2 (la même que celle déterminée par T) et r serait pair. Par suite, les points de D sont des points de coïncidence de l'involution d'ordre r engendrée par T'_1 et cette involution est rationnelle. Il en est évidemment de même de l'involution d'ordre $2r$ engendrée par T_1.

Si l'involution engendrée par θ_1 est de genres zéro et de bigenre un, elle est d'ordre $r = 3$ et elle possède 3 points de coïncidence et, par suite, il y a 6 points de F invariants, soit pour T_1, soit pour T'_1, Si un de ces points était invariant pour T_1, il le serait aussi pour $T_1^4 = T'_1$ et par suite pour $T = T_1 T_1'^2$, ce qui est impossible. Par suite, les six points sont invariants pour T'_1 et cette transformation engendre donc une involution d'ordre 3 et de genres un. T_1 engendre une involution d'ordre 6 ayant pour image une surface image de l'involution engendrée par θ_1 sur Φ.

On peut résumer les résultats de ce paragraphe dans le Tableau suivant :

Transformation θ de Φ.		Transformation T_1 de F.		Transformation T'_1 de F.	
Période.	Caractères de l'involution engendrée.	Période.	Caractères de l'involution engendrée.	Période.	Caractères de l'involution engendrée.
2	$p_a = P_2 = 0$	2	$p_a = P_4 = 1$	2	$p_a = P_2 = 0$
2	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1$	2	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1$	2	$p_a = P_4 = 1$
2ε	$p_a = P_2 = 0$	2ε	$p_a = P_2 = 0$	2ε	$p_a = P_2 = 0$
4	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1$	4	$p_a = P_4 = 1$	4	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 =$
6	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1$	6	$p_a = P_4 = 1$	6	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 =$
$2\varepsilon + 1$	$p_a = P_2 = 0$	$4\varepsilon + 2$	$p_a = P_2 = 0$	$2\varepsilon + 1$	$p_a = P_2 = 0$
3	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1$	6	$p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1$	3	$p_a = P_4 = 1$