BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GAU

Sur un théorème de M. E. Picard

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 62-69
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__62_0>

SUR UN THÉORÈME DE M. E. PICARD;

PAR M. E. GAU.

M. E. Picard a démontré que, sous certaines conditions qui seront rappelées plus loin, l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

admet une intégrale unique qui prend des valeurs données A et B pour $x = a$ et $x = b$ respectivement [1].

Je vais établir une proposition analogue pour une équation d'ordre quelconque; la méthode d'approximations successives employée par M. Picard s'étend d'ailleurs d'elle-même; il serait facile d'obtenir pour les conditions de convergence, au prix de quelques complications de notation, des inégalités plus avantageuses que celles auxquelles je me suis arrêté. Je me suis borné à l'étude de l'existence même des solutions, sans me préoccuper de la grandeur des intervalles de convergence, ayant en vue une application de ces résultats à la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles pour laquelle cette grandeur est sans intérêt.

1. Considérons l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \tag{1}$$

Nous supposerons que, lorsque x varie dans un intervalle h comprenant a et b, et que $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, restent dans un intervalle $(-\mathrm{L}, +\mathrm{L})$, la fonction de $(n+1)$ variables

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

est définie, continue, et satisfait à une condition de Lipschitz :

$$\begin{gathered}|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - f(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)})|\\ < \alpha|y - y_1| + \beta|y' - y'_1| + \ldots + \lambda|y^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}|,\end{gathered}$$

---

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. III, p. 90.

les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant fixes et positifs. Dans ces conditions :

Il existe une intégrale définie par les n conditions aux limites suivantes :

$$(2)\qquad y = A_0, \quad y' = A_1, \quad \ldots, \quad y^{(k-1)} = A_{k-1} \qquad (\text{pour } x = a),$$

$$(3)\qquad y = B_0, \quad y' = B_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-k-1)} = B_{n-k-1} \qquad (\text{pour } x = b)$$

à condition que les intervalles h, $(-L, +L)$, ainsi que les constantes A *et* B, *soient suffisamment petits en valeur absolue. Cette intégrale reste, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, dans l'intervalle $(-L, +L)$ et elle est la seule satisfaisant à ces conditions si f admet des dérivées par rapport à y, $y', \ldots, y^{(n-1)}$.*

Nous pourrons toujours supposer $k \geqq \frac{n}{2}$; en outre, en choisissant convenablement la variable indépendante, on pourra supposer encore $a = 0$ et $0 < b < 1$. Enfin, en ajoutant à y un polynome facile à former sans altérer en rien les conditions de l'énoncé, on pourra remplacer les conditions (2) par les suivantes :

$$(4)\qquad y = y' = \ldots = y^{(k-1)} = 0 \qquad (\text{pour } x = 0).$$

2. Je dis d'abord qu'il existe un polynome $y = P(x)$, de degré $(n-1)$, satisfaisant aux conditions (3) et (4). Ce polynome sera de la forme

$$P(x) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

les coefficients étant déterminés par des équations linéaires de la forme

$$(5)\qquad \frac{d^i}{dx^i}[a^k x_k + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}]_{(x=b)} = B_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-k-1).$$

Ces équations ont toujours une solution si b n'est pas nul ; en effet, leur déterminant principal est égal à $D(b)$, en posant

$$D(x) = \begin{vmatrix} x^k & x^{k+1} & \ldots & x^{n-1} \\ (x^k)' & (x^{k+1})' & \ldots & (x^{n-1})' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (x^k)^{(n-k-1)} & (x^{k+1})^{(n-k-1)} & \ldots & (x^{n-1})^{(n-k-1)} \end{vmatrix};$$

on voit facilement que ce déterminant a pour valeur

$$D(x) = Kx^{k(n-k)},$$

K étant une constante dont la valeur ne dépend que de celles de n et de k. Ce déterminant ne peut donc être nul pour $x = b$ que s'il est identiquement nul; mais s'il en était ainsi, les éléments d'une même colonne vérifiant une même relation linéaire et homogène, on voit que les fonctions $x^k, x^{k+1}, \ldots, x^{n-1}$ seraient $(n-k)$ intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$X_0 u + X_1 \frac{du}{dx} + \ldots + X_{n-k-1} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} = 0,$$

conséquence absurde puisque les fonctions considérées sont linéairement indépendantes.

Donc $D(b) \neq 0$ et l'on pourra toujours résoudre les équations (5).

Si l'on appelle Δ_{pq} le mineur qui constitue le coefficient du terme de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $q^{\text{ième}}$ colonne dans $D(x)$, on a

$$\Delta_{pq} = H_{pq} \frac{x^{k(n-k)}}{x^{k-p+q}};$$

le nombre H_{pq} est une constante qui ne dépend que des valeurs de n, k, p, q; d'ailleurs, d'après les hypothèses faites, on aura toujours

$$k(n-k) > k - p + q.$$

Les coefficients de $P(x)$ seront donc donnés par les formules

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} K a_{k+p} = \dfrac{H_{1,p+1}}{b^{k+p}} B_0 + \dfrac{H_{2,p+1}}{b^{k+p-1}} B_1 + \ldots + \dfrac{H_{n-k,p+1}}{b^{2k+p-n+1}} B_{n-k-1} \\ \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-k-1). \end{array} \right.$$

3. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(7) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x).$$

L'intégrale générale de cette équation peut s'écrire sous la forme

$$y = \int_0^x \varphi(z) \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} dz + P(x),$$

$P(x)$ étant un polynome arbitraire de degré $(n-1)$. On voit aisément que la fonction y vérifiera les conditions aux limites (3) et (4) si l'on a

$$P(o) = P'(o) = \ldots = P^{(k-1)}(o) = o,$$

$$P(b) = C_0, \quad P'(b) = C_1, \quad \ldots, \quad P^{(n-k-1)}(b) = C_{n-k-1},$$

en posant

$$(8) \qquad C_i = B_i - \int_0^b \varphi(z) \frac{(b-z)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} dz.$$

$P(x)$ se déterminera donc comme il a été indiqué au n° **2**, mais en remplaçant dans les calculs les constantes B par les constantes C précédentes. Les formules (8) montrent que, si l'on appelle B la plus grande des quantités $|B_i|$ et M une limite supérieure du module de $f(x)$ dans l'intervalle (o, b), on aura

$$|C_i| \leqq B + M \frac{b^{n-i}}{(n-i)!};$$

soit R le plus grand des nombres $\left|\frac{H_{pq}}{K}\right|$; on a, d'après les formules (6),

$$|a_{k+p}| \leqq R \left[\frac{|C_0|}{b^{k+p}} + \frac{|C_1|}{b^{k+p-1}} + \ldots + \frac{|C_{n-k-1}|}{b^{2k+p-n+1}}\right],$$

d'où

$$(9) \qquad |a_{k+p}| \leqq \frac{BR(n-k)}{b^{k+p}} + \frac{MR(n-k)\,b^n}{b^{k+p}(k+1)!}.$$

Nous allons en déduire une limite supérieure de $|y|$ et de $\left|\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right|$ pour $\alpha \leqq n-1$. On a en effet :

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \int_0^x \varphi(z) \frac{(x-z)^{n-\alpha-1}}{(n-\alpha-1)!} dz + P^{(\alpha)}(x).$$

L'intégrale du second membre est inférieure en valeur absolue, à $M \frac{b^{n-\alpha}}{(n-\alpha)!}$ et par suite à Mb. En outre,

$$P^{(\alpha)}(x) = A_k^\alpha x^{k-\alpha} + A_{k+1}^\alpha x^{k+1-\alpha} + \ldots + A_{n-1}^\alpha x^{n-1-\alpha},$$

en posant

$$A_{k+p}^\alpha = (k+p)(k+p-1)\ldots(k+p-\alpha+1)\,a_{k+p}.$$

Or

$$k+p \leqq n-1 \qquad \text{et} \qquad \alpha \leqq n-1,$$

donc

$$(k+p)(k+p-1)\ldots(k+p-\alpha+1) \leqq (n-1)!.$$

En se reportant à l'inégalité (9) on en déduit

$$|A^{\alpha}_{k+p}| \leqq \frac{R(n-k)(n-1)!}{b^{k+p}}\left[B + \frac{Mb^n}{(k+1)!}\right],$$

d'où

$$|P^{(\alpha)}(x)| \leqq \Sigma |A^{\alpha}_{k+p}| b^{k+p-\alpha} < \frac{R(n-k)^2(n-1)!}{b^{\alpha}}\left[B + \frac{Mb^n}{(k+1)!}\right]$$

et, *a fortiori*, puisque $\alpha \leqq n-1$,

$$|P^{(\alpha)}(x)| < \frac{R(n-k)^2(n-1)!}{b^{n-1}}\left[B + \frac{Mb^n}{(k+1)!}\right].$$

On aura donc

$$\left|\frac{d^{\alpha}y}{dx^{\alpha}}\right| < L,$$

si

$$(10)\quad Mb\left[1 + \frac{R(n-k)^2(n-1)!}{(k+1)!}\right] + \frac{B}{b^{n-1}}R(n-k)^2(n-1)! < L.$$

Il est à remarquer que cette inégalité ne dépend pas de α; les calculs s'appliquent encore pour $\alpha = 0$ en convenant de poser $\frac{d^0y}{dx^0} = y$. Il est clair que l'on peut choisir B et b suffisamment petits pour que l'inégalité (10) soit satisfaite ; dans ces conditions $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ resteront compris dans l'intervalle $(-L, +L)$.

4. Pour avoir la solution cherchée de l'équation donnée, on partira d'une fonction quelconque y_0, par exemple un polynome, vérifiant les conditions (3) et (4), et l'on formera les équations successives :

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = f(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}),$$
$$\frac{d^n y_2}{dx^n} = f(x, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chacune de ces équations est de la forme (7), on l'intégrera comme il a été indiqué ; toutes les fonctions $y_1, y_2, \ldots$ resteront, ainsi que leurs $(n-1)$ premières dérivées, dans les limites imposées par les hypothèses du n° 1.

Nous allons voir que la série

$$(11)\qquad y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_{p+1} - y_p) + \ldots$$

converge uniformément dans un intervalle (o, h) qui contient b.

On a en effet

$$\frac{d^n(y_{p+1}-y_p)}{dx^n}=f(x, y_p, y'_p, \ldots, y_p^{(n-1)})-f(x, y_{p-1}, y'_{p-1}, \ldots, y_{p-1}^{(n-1)}).$$

Soit N le maximum de l'expression

$$\alpha\,|y_p-y_{p-1}|+\beta\,|y'_p-y'_{p-1}|+\ldots+\lambda\,|y_p^{(n-1)}-y_{p-1}^{(n-1)}|.$$

L'équation précédente est de la forme (7) et son second membre a pour module maximum N d'après le n° **1**; en outre, la fonction $(y_{p+1}-y_p)$ s'annulant ainsi que ses $(n-k-1)$ premières dérivées pour $x=b$, on aura ici $B=0$ et les conclusions du n° **3** montrent que

$$|y_{p+1}-y_p|<N\theta$$

en posant

$$\theta=b\left[1+\frac{R(n-k)^2(n-1)!}{(k+1)!}\right].$$

Appelons M′ la quantité correspondant à N pour $p=1$; on voit que

$$\begin{array}{l} |y_2\;\;-y_1|<M'\theta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |y_{p+1}-y_p|<M'\theta^p. \end{array}$$

Il est évident que l'on peut choisir h assez petit pour que $\theta<1$ si b est compris dans l'intervalle $(0, h)$. Nous prendrons pour nombre h le plus grand nombre b qui rend θ inférieur à l'unité et qui satisfait à l'inégalité (10).

Soit y la somme de la série (11).

5. Je dis que y est l'intégrale demandée. En effet on a

$$y_p(x)=\int_0^x f(z, y_{p-1}, y'_{p-1}, \ldots, y_{p-1}^{(n-1)})\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}dz+P_p(x).$$

$P_p(x)$ étant déterminé comme au n° **3**, en faisant

$$C_i=B_i-\int_0^b f(z, y_{p-1}, y'_{p-1}, \ldots, y_{p-1}^{(n-1)})\frac{(b-z)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}dz.$$

Cette expression devient à la limite

$$y=\int_0^x f(z, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}dz+Q(x).$$

$Q(x)$ étant déterminé par les constantes

$$C_i = B_i - \int_0^b f(z, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \frac{(b-z)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} dz.$$

On en déduit immédiatement que y vérifie bien l'équation différentielle (1), ainsi que les conditions aux limites (3) et (4).

6. Cette intégrale est la seule qui prenne les valeurs données aux limites et qui reste, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, dans l'intervalle $(-L, +L)$. En effet, supposons qu'il en existe une deuxième Y; on aurait

$$\frac{d^n(y-Y)}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - f(x, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}).$$

Supposons que f admette des dérivées par rapport à y, y', ..., $y^{(n-1)}$, et appliquons la formule des accroissements finis au second membre; en posant $Y - y = u$, il vient

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \theta_0 u + \theta_1 \frac{du}{dx} + \ldots + \theta_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}, \tag{12}$$

θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1} étant certaines fonctions de x qui restent finies dans l'intervalle (o, h) d'après les hypothèses faites.

On peut considérer la relation (12) comme une équation différentielle en u, qui est linéaire et homogène; la fonction $(y - Y)$ est une intégrale de cette équation qui s'annule, ainsi que ses $(k-1)$ premières dérivées pour $x = o$, et qui s'annule également ainsi que ses $(n-k-1)$ premières dérivées pour $x = b$.

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$, n intégrales linéairement indépendantes de l'équation (12); on aura donc

$$y - Y = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n.$$

Si dans cette relation et dans ses $(k-1)$ dérivées premières, on fait $x = o$, les premiers membres étant tous nuls, on aura k équations linéaires et homogènes en $a_1 \ldots, a_n$. On obtiendra $(n-k)$ autres équations en opérant de même pour $x = b$. Le déterminant de ces n équations doit être nul si les fonctions y et Y ne sont pas identiques. Donc il existerait une relation entre les valeurs que prennent, par exemple,

$$\begin{array}{llll} U_1, & U'_1, & \ldots, & U^{(k-1)}, \qquad \text{pour } x = o, \\ U_1, & U'_1, & \ldots, & U^{(n-k-1)}, \qquad \text{pour } x = b, \end{array}$$

U_1 étant une intégrale quelconque de l'équation (12) ; ceci serait en contradiction avec les propositions démontrées précédemment, puisque nous avons vu que l'on pouvait choisir arbitrairement ces n valeurs.

Donc $y = Y$.