BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FRÉCHET

Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 248-265

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__248_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1915, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'INTÉGRALE D'UNE FONCTIONNELLE ÉTENDUE A UN ENSEMBLE ABSTRAIT;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

L'INTÉGRALE DE M. J. RADON DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS.

M. J. Radon a publié récemment (1) une définition de l'intégrale $\int F(P)\,dh(P)$ d'une fonction $F(P)$ d'un point P de l'espace à n dimensions par rapport à une fonction de P, $h(P)$, à variation bornée. Cette définition résulte d'une sorte de fusion de l'intégrale de M. Lebesgue et de l'intégrale de Stieltjes. La définition de M. J. Radon se réduit à celle de M. Lebesgue quand h est une fonction linéaire et à celle de Stieltjes quand F est une fonction continue.

D'ailleurs, l'intégrale de Radon peut aussi s'écrire

$$\int_E F(P)\,df(e)$$

où $f(e)$ est une fonction additive du sous-ensemble variable e de E.

Or c'est sous cette forme qu'apparaît ce qui me semble être le

(1) *Ueber die absoluten additiven Mengenfunktionen* (*Berichte Ak. Wissenchaft*, Wien, 1913).

grand avantage de la définition de M. J. Radon, avantage que celui-ci ne paraît pas avoir remarqué. M. J. Radon avait pour but de réaliser un progrès dans la Théorie des fonctions en unifiant les définitions de Stieltjes et de M. Lebesgue. Mais, en fait, on remarque que, moyennant quelques légères modifications, la définition et les propriétés de l'intégrale de M. Radon s'étendent bien au delà du Calcul intégral classique, *elles sont presque immédiatement applicable au domaine infiniment plus vaste du calcul fonctionnel.*

En d'autres termes, on peut conserver la majeure partie des définitions et des raisonnements de M. J. Radon en négligeant l'hypothèse faite sur la nature de l'argument P à savoir que P est un point de l'espace à n dimensions.

Nous pourrions nous contenter de cette indication à laquelle nous nous sommes bornés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 28 juin 1915.

Mais il nous a paru utile de présenter brièvement ce que devient la définition de l'intégrale ainsi étendue et de préciser la forme sous laquelle se présentent ses propriétés. Il est vraiment remarquable de pouvoir constater combien peu d'entre elles doivent être abandonnées en opposition avec ce qui a lieu presque toujours quand on veut obtenir un haut degré de généralisation; et combien celles qui se conservent changent peu de physionomie.

J'ai profité de l'occasion pour utiliser un mode de présentation de l'intégrale de M. Lebesgue qui a l'avantage de se rapprocher beaucoup plus que celui de M. Lebesgue de celui de Riemann-Darboux avec lequel un grand nombre d'étudiants sont plus familiers [1].

Je tiens à insister à nouveau, avant de commencer cet exposé, sur ce que la nouvelle définition va se trouver applicable non plus seulement à un espace à n dimensions mais à un ensemble abstrait quelconque. C'est-à-dire qu'il n'est même pas nécessaire, par exemple, de supposer qu'on sache ce que c'est que la limite d'une suite d'éléments de cet ensemble (comme cela est au contraire indispensable pour la généralisation de la théorie des ensembles

---

[1] Un essai dans ce sens a été fait par J. Pierpont dans son Ouvrage *Theory of Functions of real variables*, t. II, dans le cas particulier où P est un point de l'espace à n dimensions. Mais son exposé prête à des objections très sérieuses.

linéaires). De sorte que la nouvelle définition se trouvera posséder le même champ d'application que la notion de puissance d'un ensemble.

FAMILLES ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS.

Avant de définir l'intégrale sur un ensemble abstrait, disons quelques mots des familles additives d'ensembles, puis des fonctions additives d'ensembles.

Nous disons qu'un ensemble est *un ensemble abstrait* lorsque nous ne connaissons pas la nature de ses éléments ou, ce qui revient au même, lorsque la nature de ses éléments n'intervient pas dans les raisonnements que nous nous proposons de faire sur cet ensemble.

Une *famille additive d'ensembles* est une collection d'ensembles telle que :

1° Si E_1, E_2 sont deux ensembles appartenant à cette famille, l'ensemble $E_1 - E_2$ des éléments de E_1, s'il en existe, n'appartenant pas à E_2, appartient aussi à la famille;

2° Si $E_1, E_2, \ldots$ est une suite énumérable [1] d'ensembles appartenant à la famille, leur somme, c'est-à-dire l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots$ des éléments appartenant à au moins l'un d'eux, appartient aussi à la famille.

Il est facile d'en déduire que leur ensemble commun $E_1, E_2, \ldots$ appartient aussi à la famille si celle-ci est additive.

[*Exemple de famille additive d'ensembles.* — Tous les sous-ensembles d'un ensemble abstrait donné E (y compris E).]

FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBRES ABSTRAITS.

Une fonction d'ensemble $f(E)$ est définie sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles si à tout ensemble E appartenant à la famille correspond une valeur numérique déterminée de $f(E)$. Une fonction d'ensemble $f(E)$ définie sur une famille additive d'ensembles $\mathcal{F}$ est dite *additive* sur $\mathcal{F}$ si $E_1, E_2, \ldots$ étant une suite énumérable

---

[1] Pour abréger, nous dirons dans la suite qu'un ensemble est *énumérable* s'il est infini dénombrable ou fini.

d'ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$ et, *disjoints*, c'est-à-dire n'ayant deux à deux aucun élément commun, on a

$$f(E_1+E_2+\ldots)=f(E_1)+f(E_2)+\ldots.$$

Dans le cas où la suite est infinie, le second membre doit évidemment être convergent quel que soit l'ordre de ses termes. Il en résulte que la série du second membre doit être absolument convergente.

[*Exemple de fonction additive d'ensembles définie sur une famille additive quelconque d'ensembles abstraits.* — Soient A_1, A_2, ... une suite dénombrable d'éléments distincts et

$$S=s_1+s_2+\ldots$$

une série numérique absolument convergente. Si E est un ensemble appartenant à la famille $\mathfrak{F}$, il peut arriver qu'il contienne certains des éléments A, soient A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, ... Nous poserons dans ce cas

$$f(E)=s_{i_1}+s_{i_2}+\ldots$$

et dans le cas contraire

$$f(E)=0.]$$

Forme canonique d'une fonction additive d'ensembles. — Il est possible de démontrer qu'une fonction additive $f(E)$ définie sur une famille additive $\mathfrak{F}$ d'ensembles E est bornée sur $\mathfrak{F}$. On en déduit facilement que si l'on effectue une *partition* $\{E_n\}$ de E, c'est-à-dire si l'on divise E en un nombre fini d'ensembles disjoints E_1, E_2, ... *appartenant* à $\mathfrak{F}$, la somme

$$|f(E_1)|+|f(E_2)|+\ldots$$

a une borne supérieure finie quand on fait varier la partition de E. On appellera cette borne supérieure la *variation totale* de f sur E relativement à $\mathfrak{F}$ et nous la représenterons par

$$\int_{E,\mathfrak{F}}|df|$$

ou, quand il n'y a pas de confusion possible, par

$$\int_E |df|.$$

On voit facilement que $\int_E |df|$ est une fonction additive sur $\mathfrak{F}$ et que

$$|f(E)| \leqq \int_E |df|.$$

De sorte que toute fonction additive d'ensemble sur $\mathfrak{F}$ est la différence de deux fonctions additives *non négatives* définies sur la même famille additive $\mathfrak{F}$, soit

$$f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$$

avec

$$2\varphi(E) = \int_E |df| + f(E), \qquad 2\psi(E) = \int_E |df| - f(E).$$

On dira que $f = \varphi - \psi$, où f, φ, ψ sont additives sur $\mathfrak{F}$ et φ, ψ non négatives, est la forme canonique de f si comme plus haut

$$\varphi(E) + \psi(E) = \int_E |df|.$$

Il faut remarquer que ces propositions subsisteraient et que $\varphi(E)$, $\psi(E)$, $\int_E |df|$ garderaient les mêmes valeurs si la suite E_1, E_2, ... était supposée non pas finie mais énumérable.

Limite d'une suite d'ensembles. — Soient E_1, E_2 ... une suite dénombrable d'ensembles. Nous appellerons *ensemble limite complet* de cette suite l'ensemble C des éléments qui appartiennent chacun à une infinité d'ensembles de cette suite. Nous appellerons *ensemble limite restreint* de la suite l'ensemble R des éléments qui appartiennent chacun à tous les ensembles de la suite à partir d'un certain rang.

On démontre alors, comme dans la théorie des ensembles linéaires, que :

Si $E_1, E_2, \ldots$ appartiennent à une famille additive d'ensembles, $\mathfrak{F}$, les ensembles limites complet et restreint appartiennent aussi à cette famille;

Si en outre une fonction additive, non négative, d'ensembles $\varphi(e)$ est définie sur $\mathfrak{F}$ et si : 1° à partir d'un certain rang $\varphi(E_n) \leqq k$, on a $\varphi(R) \leqq k$; ou si 2° à partir d'un certain rang $\varphi(E_n) \geqq k$, on a $\varphi(C) \geqq k$.

INTÉGRALE D'UNE FONCTIONNELLE ABSTRAITE.

I. — *Cas des fonctionnelles bornées.*

1° *Intégrales inférieure et supérieure.* — On dit qu'*une fonctionnelle* F(A) est définie sur un ensemble abstrait E si à tout élément A de E correspond une valeur bien déterminée de F(A).

Supposons que E appartienne à une famille additive d'ensembles $\mathcal{F}$, et qu'une fonction additive d'ensemble appelée $f(e)$ soit définie sur $\mathcal{F}$. Soit $f(e) = \varphi(e) - \psi(e)$ la forme canonique de $f(e)$ relativement à $\mathcal{F}$. Considérons une partition $E = \{E_n\}$ de E, c'est-à-dire une division de E en un nombre fini d'ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots$ *appartenant à* $\mathcal{F}$. Et formons les sommes

$$S' = \Sigma M_n \varphi(E_n), \qquad s' = \Sigma m_n \varphi(E_n),$$

où M_n, m_n sont les bornes de F(A) sur E_n. Lorsqu'on fait varier la partition $\{E_n\}$ de E, S' a une borne inférieure finie puisque

$$S' \geqq \Sigma m \varphi(E_n) = m \varphi(E),$$

m étant la borne inférieure de F sur E. On appellera cette borne inférieure de E l'*intégrale supérieure de* F *sur* E *par rapport à* φ (relativement à $\mathcal{F}$) et on la représentera par la notation

$$\overline{\int}_{E, \mathcal{F}} F(A)\, d\varphi(e)$$

ou plus simplement par

$$\overline{\int}_{E} F(A)\, d\varphi(e)$$

quand il n'y a pas de doute sur la famille $\mathcal{F}$ considérée.

De même on a

$$s' \leqq M \varphi(E),$$

M étant la borne supérieure de F sur E. De sorte que s' a une borne supérieure finie qu'on appellera l'*intégrale inférieure de* F *sur* E *par rapport à* φ (relativement à $\mathcal{F}$) et on la représentera par la notation

$$\underline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e).$$

Par une méthode analogue à celle qu'on emploie pour l'étude des intégrales de M. Darboux, on montre qu'on a nécessairement

$$\overline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e) \geqq \underline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e).$$

On procède de même avec $\psi(e)$. On appelle alors *intégrale supérieure de* F *sur* E *par rapport à* f (relativement à $\mathcal{F}$) et l'on représente par la notation

$$\overline{\int}_E F(A)\, df(e)$$

la quantité finie

$$\overline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e) - \underline{\int}_E F(A)\, d\psi(e).$$

De même on appelle *intégrale inférieure de* F(A) *par rapport à* f *sur* E, la quantité bien déterminée

$$\underline{\int}_E F(A)\, df(e) = \underline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e) - \overline{\int}_E F(A)\, d\psi(e).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\overline{\int}_E F(A)\, df(e) - \underline{\int}_E F(A)\, df(e) \\
&\quad = \left[\overline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e) - \underline{\int}_E F(A)\, d\varphi(e)\right] \\
&\qquad + \left[\overline{\int}_E F(A)\, d\psi(e) - \underline{\int}_E F(A)\, d\psi(e)\right].
\end{aligned}$$

On voit donc que l'intégrale supérieure de F(A) par rapport à une fonction additive quelconque f est au moins égale à l'intégrale inférieure correspondante; et le premier membre ne peut être nul que si les deux crochets du second membre sont nuls.

On montre facilement que le premier membre est la borne inférieure de

$$\Sigma(M_n - m_n)\int_{E_n} |df|$$

quand la partition $\{E_n\}$ de E varie de manière quelconque.

On montre facilement aussi que $\int_E F(A)\, d[\varphi(e) + \psi(e)]$ est égal à la borne supérieure de

$$\Sigma\, m_n |f(E_n)|$$

quand la partition $\{E_n\}$ varie. Il est naturel de représenter cette dernière quantité par

$$\int_E F(A)\,|df(e)|,$$

de sorte qu'on a

$$\int_E F(A)\, d\left[\int_e |df|\right] = \int_E F(A)\,|df(e)|.$$

2° *Fonctionnelles intégrables*. — Nous dirons que *la fonctionnelle* F(A) *est intégrable sur* E *par rapport à la fonction additive d'ensemble* $f(e)$ (*relativement à la famille additive d'ensembles* $\mathfrak{F}$) si ses intégrales supérieure et inférieure sur E par rapport à f relativement à $\mathfrak{F}$ sont égales ; et nous désignerons leur valeur commune par la notation

$$\int_E F(A)\, df(e).$$

Dans ce cas F est aussi intégrable sur E par rapport à φ et ψ et réciproquement, et l'on a

$$\int_E F(A)\, df(e) = \int_E F(A)\, d\varphi(e) - \int_E F(A)\, d\psi(e).$$

On remarque que si l'une des fonctionnelles F(A), |F(A)| est intégrable par rapport à f, l'autre l'est aussi.

On remarque aussi que si F est intégrable par rapport à l'une des fonctions additives $f(e)$, $\int_e |df|$, il est intégrable par rapport à l'autre. On peut donc remplacer la notation un peu compliquée

$$\int_E F(A)\,d\left[\int_e |df|\right]$$

par la notation

$$\int_E F(A)\,|df(e)|.$$

[Remarquons que même si F est intégrable par rapport à f, la borne inférieure de $\Sigma M_n|f(E_n)|$ n'est pas nécessairement égale à $\int_E F(A)|df(e)|$. Elle peut même lui être inférieure comme dans le cas où F est constant et où f n'est pas d'un signe constant.]

Si F est intégrable, on peut trouver une partition $\{E_n\}$ de E telle que la quantité $\varepsilon = \Sigma(M_n - m_n)\int_{E_n}|df|$ soit aussi petite que l'on veut. Prenons au hasard pour chaque valeur de n un nombre μ_n tel que

$$m_n \leq \mu_n \leq M_n.$$

On voit facilement que

$$\left|\Sigma\mu_n f(E_n) - \int_E F(A)\,df(e)\right| < \varepsilon.$$

De sorte que

$$\int_E F(A)\,df(e) = \lim_{\varepsilon=0}\Sigma\,\mu_n f(E_n).$$

En particulier, si A_n est un élément quelconque de E_n, on a

$$\int_E F(A)\,df(e) = \lim_{\varepsilon=0}\Sigma\,F(A_n)f(E_n).$$

Dans ce qui précède nous avons supposé que chaque partition de E était formée d'un nombre fini d'ensembles E_n (disjoints, appartenant à $\mathfrak{F}$). Mais rien ne serait changé, ni les raisonnements, ni les valeurs obtenues pour les intégrales, si l'on imposait seulement à chaque partition d'être formée d'une suite énumérable d'ensembles E_n (disjoints, appartenant à $\mathfrak{F}$). Il y aurait lieu seulement d'observer que les sommes s', S' considérées au début deviennent des séries qui sont évidemment absolument convergentes.

La remarque précédente va nous permettre d'étendre aux fonctionnelles non bornées la définition de l'intégrale.

II. — *Cas des fonctionnelles non bornées.*

Les définitions précédentes se généralisent immédiatement. Il y a lieu cependant de prendre quelques précautions pour qu'elles conservent un sens. Nous avons d'abord à former les suites S', s'. Pour qu'elles aient un sens, il faut d'abord que les quantités M_n, m_n soient finies. Or, si la fonction $F(A)$ n'est pas bornée sur E, elle ne pourra être bornée sur un nombre fini d'ensembles en lesquelles on pourrait décomposer E. Nous devrons donc supposer que les ensembles E_n sont en nombre infini (dénombrable). Nous ne nous écartons pas ainsi de la définition adoptée pour le cas de F borné puisque cette hypothèse sur le nombre des E_n est dans ce cas indifférente.

Mais s'il est nécessaire que les E_n soient en nombre infini pour que les M_n, m_n soient chacun finis, cela ne suffit pas. Nous devrons donc supposer que la fonction F est telle qu'on puisse au moins d'une manière décomposer E en une suite dénombrable d'ensembles E_n disjoints, appartenant à $\mathfrak{F}$, sur chacun desquels F est borné. Mais pour une telle partition $\{E_n\}$ il pourrait arriver que les séries S', s' soient divergentes ou que leurs sommes dépendent de l'ordre de leurs éléments. De même pour les séries

$$S'' = \Sigma\, M_n\, \psi(E_n), \qquad s'' = \Sigma\, m_n\, \psi(E_n).$$

Or il est facile de montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre séries convergent et que leurs sommes soient indépendantes de l'ordre de leurs éléments est que la série

$$\Sigma\, \rho_n \int_{E_n} |df|,$$

où ρ_n est la borne supérieure de $|F|$ sur E_n, soit convergente.

Finalement, pour que les définitions données dans le cas des fonctions bornées conservent un sens dans le cas d'une fonction non bornée, nous nous trouvons obligé de *nous limiter aux fonctions que nous appellerons sommables* (¹) sur E par rap-

(¹) Nous généralisons ici le sens *primitivement* adopté pour le mot *sommable* par M. Lebesgue. Bien entendu, toute fonction bornée est aussi sommable.

port à f (relativement à $\mathfrak{F}$), *et qui sont telles qu'on puisse trouver au moins une partition* $\{E_n\}$ *de* E *en une suite énumérable d'ensembles* E_n *disjoints, appartenant à* $\mathfrak{F}$, *sur chacun desquels la borne supérieure* ρ_n *de* $|F|$ *est finie et pour lesquels la série* $\Sigma\rho_n \int_{E_n} |df|$ *est convergente.*

Ceci étant admis, il n'y a plus aucune difficulté à définir exactement comme dans le cas des fonctions bornées les intégrales supérieure et inférieure d'une fonction *sommable.* Les remarques faites à ce sujet s'appliquent encore.

Fonctionnelles intégrables. — De même les définitions et les propriétés énoncées au sujet des fonctionnelles bornées intégrables s'appliquent aux fonctionnelles sommables qui sont intégrables.

[*Exemple de fonctionnelles intégrables définies sur un ensemble abstrait.* — Cherchons par exemple la condition d'intégrabilité d'une fonctionnelle F(A) sur un ensemble E, relativement à la famille additive d'ensembles $\mathfrak{F}$ constituée par tous les sous-ensembles de E (et E lui-même), par rapport à la fonction additive d'ensemble f définie comme dans l'exemple de la page 252.

On voit facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que F soit sommable par rapport à f est que l'on puisse décomposer E en une suite énumérable d'ensembles sur chacun desquels F est borné et que la série

$$\Sigma\, F(A_n)s_n$$

soit absolument convergente. (C'est par exemple ce qui a lieu quand F(A) est une fonction bornée sur E.) Si ces deux conditions sont remplies alors F est non seulement sommable mais intégrable sur E par rapport à f relativement à $\mathfrak{F}$ et l'on a

$$\int_E F\, df = \sum_n s_n\, F(A_n).$$

Naturellement F sera intégrable sur tout sous-ensemble e de F et si A_{i_1}, A_{i_2}, ... sont les points A_n qui appartiennent à e on aura

$$\int_e F\, df = \sum_p s_{i_p}\, F(A_{i_p}).]$$

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONNELLES INTÉGRABLES (BORNÉES OU NON).

I. Si une fonctionnelle $F(A)$ est intégrable par rapport à la fonction additive d'ensemble $f(e)$, relativement à la famille additive d'ensembles $\mathcal{F}$ sur un ensemble E appartenant à $\mathcal{F}$, elle est aussi intégrable sur toute partie de E qui appartient à $\mathcal{F}$.

II. Si une fonctionnelle $F(A)$ est intégrable par rapport à f, relativement à la famille $\mathcal{F}$ sur une suite énumérable d'ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots$ appartenant à $\mathcal{F}$ et si de plus $F(A)$ est sommable sur $E_1 + E_2 + \ldots$ par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$ elle est aussi intégrable par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$ sur $E_1 + E_2 + \ldots$ et l'on a

$$\int_{E_1+E_2+\ldots} F(A)\,df(e) = \int_{E_1} F(A)\,df(e) + \int_{E_2} F(A)\,df(e) + \ldots.$$

III. On a
$$\left|\int_E F(A)\,df(e)\right| \leqq \int_E |F(A)|\,|df(e)|.$$

En particulier si ρ est la borne supérieure de $|F|$ sur E

$$\left|\int_E F(A)\,df(e)\right| \leqq \rho \int_E |df|.$$

Quand au lieu de $f(e)$ on considère seulement une fonction additive non négative $\varphi(e)$, on a la formule

$$m\,\varphi(E) \leqq \int_E F(A)\,d\psi(e) \leqq M\,\varphi(E)$$

[m, M étant les bornes de $F(A)$ sur E] qui rappelle le mieux *la formule de la moyenne*.

IV. Si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont un nombre fini de fonctionnelles intégrables sur E par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$, il en est de même de leur somme et l'on a

$$\int_E [F_1(A) + \ldots + F_p(A)]\,df(e)$$
$$= \int_E F_1(A)\,df(e) + \ldots + \int_E F_p(A)\,df(e).$$

V. Si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont un nombre fini de fonctions additives d'ensembles définies sur la même famille additive d'ensembles, $\mathcal{F}$, et si la fonctionnelle F est intégrable sur E relativement à $\mathcal{F}$ par par rapport à $f_1, f_2, \ldots, f_p$, elle l'est aussi par rapport à leur somme $f_1 + f_2 + \ldots, + f_p$ et l'on a

$$\int_E F(A)\, d[f_1(e) + \ldots + f_p(e)] = \int_E F(A)\, df_1(e) + \ldots + \int_E F(A)\, df_p(e).$$

VI. Si $F_1(A)$, $F_2(A)$ sont deux fonctionnelles intégrables sur E par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$, il en est de même de $F_1(A) \times F_2(A)$ au moins dans les deux cas suivants :

L'une au moins des deux fonctionnelles F_1, F_2 est bornée sur F;

Les carrés des deux fonctionnelles F_1, F_2 sont intégrables sur E par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$.

VII. Si les carrés des deux fonctionnelles $F_1(A)$, $F_2(A)$ sont intégrables sur E relativement à $\mathcal{F}$ par rapport à la fonction d'ensemble additive *non négative* $\varphi(e)$, on a (inégalité de Schwarz)

$$\left[\int_E F_1(A) F_2(A)\, d\varphi(e)\right]^2 \leqq \int_E [F_1(A)]^2\, d\varphi(e) \int_E [F_2(A)]^2\, d\varphi(e).$$

Remarque. — Si le carré d'une fonctionnelle est intégrable, cette fonctionnelle elle-même est intégrable dans les mêmes conditions.

VIII. *Limite de fonctionnelles intégrables.* — Soient $F_1(A)$, $F_2(A)$, ... une suite infinie de fonctionnelles qui convergent sur l'ensemble E vers une fonctionnelle déterminée $F(A)$. Si F_1, F_2, ... sont intégrables sur E par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$ et si de plus F est sommable sur E par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$, on peut être certain que F est intégrable par rapport à f relativement à $\mathcal{F}$ et que

$$\int_E F(A)\, df(e) = \lim_{n=\infty} \int_E F_n(A)\, df(e)$$

dans les trois cas suivants :

1° $F_n(A)$ tend en croissant (ou sans décroître) vers $F(A)$ en tout élément A de E;

2° $|F_n(A) - F(A)|$ reste borné quel que soit n quand on fait varier A sur E et n;

3° $[F_n(A)]^2$ et $[F(A)]^2$ sont intégrables sur E par rapport à f relativement à $\mathfrak{F}$ et

$$\int_E [F(A) - F_n(A)]^2 |df|$$

reste borné quand on fait varier A sur E et n.

Remarque. — Nous pourrions nous arrêter ici; l'exposé précédent se suffit à lui-même. Mais il est intéressant de montrer comment on peut généraliser aussi les définitions de M. de la Vallée-Poussin et de M. Lebesgue.

DÉFINITION DE M. DE LA VALLÉE-POUSSIN.

Au moyen des théorèmes précédents, on peut donner une autre définition de l'intégrale des fonctionnelles non bornées, définition qui sera une généralisation de la définition due à M. de la Vallée-Poussin pour le cas où la variable est un nombre.

Appelons $F^{(p)}(A)$ une fonctionnelle définie sur E et égale à $F(A)$ si $-p \leqq F(A) \leqq p$, à p si $F(A) > p$ et à $-p$ si $F < -p$. La fonctionnelle $F^{(p)}(A)$ est évidemment bornée pour chaque valeur de p et tend vers $F(A)$ lorsque p croît indéfiniment.

On peut alors démontrer que la fonctionnelle $F(A)$ est sommable sur E par rapport à f relativement à $\mathfrak{F}$ si l'intégrale

$$\overline{\int_E} |F^{(p)}(A)| \, d\left[\int |df|\right]$$

est bornée quand p varie; et que F est intégrable sur E par rapport à f relativement à $\mathfrak{F}$ si F étant sommable, $F^{(p)}$ est intégrable dans les mêmes conditions quel que soit p. On a alors

$$\int_E F(A)\, df(e) = \lim_{p=\infty} \int_E F^{(p)}(A)\, df(e).$$

LES FONCTIONNELLES MESURABLES.

Il est intéressant de transformer la définition de l'intégrale donnée plus haut de façon à la mettre sous une forme plus rapprochée de celle de M. Lebesgue. On est alors amené à l'introduction des fonctions mesurables.

On peut déjà se rapprocher de cette voie au moyen du théorème suivant : « La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle F(A) sommable par rapport à la fonction additive d'ensemble f, relativement à la famille additive d'ensembles $\mathcal{F}$ sur un ensemble E appartenant à $\mathcal{F}$, soit intégrable dans les mêmes conditions est qu'il existe un ensemble E_0 appartenant à $\mathcal{F}$, sur lequel la variation totale de f, $\int_{E_0}|df|$ soit nulle et tel que l'ensemble $E_{F>\alpha}$ des éléments de E pour lesquels $F > \alpha$ soit, quel que soit α, la somme d'un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$ et d'une partie de E_0. »

On voit que la condition énoncée pour F serait la généralisation de la condition réalisée par les fonctions mesurables de M. Lebesgue, si l'intervention de l'ensemble E_0 ne venait un peu compliquer les choses.

Notons bien que la complication réside essentiellement dans ce fait qu'une partie e d'un ensemble E_0 appartenant à $\mathcal{F}$ et sur lequel $\int_{E_0}|df| = 0$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{F}$ (tandis qu'un ensemble linéaire contenu dans un ensemble de mesure nulle est nécessairement mesurable, mais, il est vrai, pas nécessairement mesurable B).

Pour éviter cette complication, le moyen est tout indiqué : adjoindre à la famille $\mathcal{F}$ tout ensemble qui fait partie d'un ensemble de $\mathcal{F}$ sur lequel $\int|df|$ est nul et définir f comme nul sur ce sous-ensemble. Enfin pour que $\mathcal{F}$ et f restent additives, il faudrait adjoindre à $\mathcal{F}$ les ensembles obtenus par combinaison des nouveaux ensembles introduits et y définir f au moyen de sa propriété d'additivité. On arrive d'une manière plus claire au même résultat de la façon suivante :

Appelons $\mathcal{F}'$ la famille d'ensembles tel que chacun d'eux soit de la forme $G = E + e' - e''$, un ou deux des ensembles E, e', e'' pouvant être supprimé dans cette expression ; E appartenant à $\mathcal{F}$; e', e'' étant contenus respectivement dans deux ensembles E' et E'' appartenant à $\mathcal{F}$ et sur lesquels

$$\int_{E'}|df| = 0, \qquad \int_{E''}|df| = 0.$$

Puis définissons sur $\mathcal{F}'$ une fonction d'ensemble f' telle que

$$f'(G) = f(E).$$

Il est alors facile de prouver :

Que la famille $\mathcal{F}'$ (qui comprend $\mathcal{F}$) est additive;

Que la fonction f' (qui est égale à f sur $\mathcal{F}$) est aussi additive;

Que toute partie h d'un ensemble H de $\mathcal{F}$ sur lequel $\int_H |df| = 0$ appartient à $\mathcal{F}'$ et que $f'(h) = 0$;

Enfin que, si l'on calcule la variation totale de f' pour un ensemble E de $\mathcal{F}$, elle reste la même qu'on la calcule relativement à $\mathcal{F}$ ou à $\mathcal{F}'$.

Il en résulte que, si $f = \varphi - \psi$ est la forme canonique de f relativement à $\mathcal{F}$ et $f' = \varphi' - \psi'$ la forme canonique de f' relativement à $\mathcal{F}'$, on a

$$\varphi(e) = \varphi'(e), \qquad \psi(e) = \psi'(e)$$

sur tout ensemble e appartenant à $\mathcal{F}$.

Enfin il est à peu près évident que si E$'$ est un ensemble appartenant à $\mathcal{F}'$, si $\mathcal{F}_1$ est une famille additive comprenant E$'$ et tous les ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ et si $f_1 = \varphi_1 - \psi_1$ est une fonction additive d'ensemble définie sur $\mathcal{F}_1$ ayant pour variation totale $\varphi_1 + \psi_1$ relativement à $\mathcal{F}_1$ et telle que $\varphi_1 = \varphi$ et $\psi_1 = \psi$ sur $\mathcal{F}$, on a nécessairement

$$f_1(E') = f'(E').$$

En d'autres termes si l'on veut « prolonger analytiquement » la fonction f en dehors de la famille $\mathcal{F}$, tout prolongement analytique simultané de f et $\int |df|$ sur un ensemble E$'$ de $\mathcal{F}'$ devra donner la valeur $f'(E')$ pour f.

Appelons famille *complète* relativement à une fonction additive définie sur cette famille, une famille d'ensembles à laquelle appartient toute partie d'un ensemble de la famille sur lequel la variation totale de la fonction est nulle. Alors la famille $\mathcal{F}'$ définie plus haut est complète par rapport à f'. Il en résulte qu'il est inutile de poursuivre plus d'une fois le procédé de prolongement indiqué plus haut qui fait passer de $\mathcal{F}$ et f à $\mathcal{F}'$ et f'. Le procédé appliqué à $\mathcal{F}'$ et f' redonnerait $\mathcal{F}'$ et f'.

On peut d'ailleurs présenter ce procédé d'une autre manière moins rapide, mais qui fournit un résultat plus étendu. Considérons un ensemble E_1 qui sans appartenir à $\mathcal{F}$ appartient à une famille additive $\mathcal{F}_1$ comprenant $\mathcal{F}$ et sur laquelle est définie une fonction additive non négative φ_1 qui coïncide avec φ sur $\mathcal{F}$. Alors si l'on suppose de plus que E_1 est formé d'éléments appartenant à des ensembles de $\mathcal{F}$, $\varphi_1(E_1)$ sera nécessairement compris entre la borne inférieure $\overline{\varphi}(E_1)$ des valeurs de $\varphi(G)$ où G est un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$ et contenant E_1 et la borne supérieure $\underline{\varphi}(E_1)$ des valeurs de $\varphi(H)$ où H est un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$ et contenu dans E_1. De même

$$\underline{\psi}(E_1) \leqq \psi_1(E_1) \leqq \overline{\psi}(E_1).$$

En posant

$$\overline{f}(E_1) = \overline{\psi}(E_1) - \underline{\varphi}(E_1),$$
$$\underline{f}(E_1) = \underline{\psi}(E_1) - \overline{\varphi}(E_1),$$

on voit que connaissant seulement la fonction f, le champ $\mathcal{F}$ et l'ensemble E_1, on définit deux nombres

$$\underline{f}(E_1) \leqq \overline{f}(E_1)$$

tels que si E_1 appartient à $\mathcal{F}_1$, on a

$$\underline{f}(E_1) \leqq f_1(E_1) \leqq \overline{f}(E_1).$$

On voit alors que la valeur du prolongement est bien définie sur tout ensemble E_1 tel que $\underline{f}(E_1) = \overline{f}(E_1)$. On démontre alors facilement que les ensembles tels que E_1 sont précisément ceux qui constituent la famille $\mathcal{F}'$ définie plus haut et naturellement sur E_1 la valeur commune de $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sera précisément f'. Mais on remarque que le procédé actuel va plus loin que le précédent puisqu'il enferme les valeurs possibles de $f_1(E_1)$ quand E_1 n'appartient pas à $\mathcal{F}'$ entre deux nombres bien déterminés. (Tout au moins en supposant que E_1 est sous-ensemble d'au moins un ensemble appartenant à $\mathcal{F}$.)

Quoi qu'il en soit, appelons $\mathcal{F}'$ la famille complète dérivée de $\mathcal{F}$ et f' le prolongement de f sur $\mathcal{F}'$. On voit alors facilement que, si une fonctionnelle F est intégrable par rapport à une fonction d'ensemble f relativement à une famille additive d'ensembles, $\mathcal{F}$, sur un ensemble E appartenant à $\mathfrak{F}$, elle est aussi intégrable sur E relativement à la famille complète $\mathfrak{F}'$ dérivée de $\mathfrak{F}$, par rapport au prolongement f' de f sur $\mathfrak{F}'$ et que les valeurs des intégrales correspondant à ces deux cas sont les mêmes. On peut donc toujours ramener la condition d'intégrabilité de F au cas où la famille $\mathfrak{F}$ est complète par rapport à f. Il suffit en effet de remplacer $\mathfrak{F}$, f par $\mathfrak{F}'$, f'.

Or, relativement aux familles complètes, on a le théorème suivant : La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction F soit intégrable sur E par rapport à f relativement à un champ complet $\mathfrak{F}$ est que cette fonction F soit sommable et mesurable sur E par rapport à f relativement à $\mathfrak{F}$. Nous dirons que F est *mesurable* sur E relativement à la famille $\mathfrak{F}$ si, quel que soit α, l'ensemble $E_{F>\alpha}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

Il en résulte immédiatement la transformation suivante de la définition de l'intégrale, transformation effectuée de façon à généraliser la définition de M. Lebesgue et coïncidant ainsi à peu près avec la définition de M. Radon dans le cas de l'espace à n dimensions :

Soit F une fonctionnelle sommable et mesurable par rapport à une fonction additive d'ensemble, f, relativement à une famille additive complète d'ensembles, $\mathfrak{F}$, sur un ensemble E appartenant à $\mathfrak{F}$. Considérons une suite infinie de nombres croissants : ..., l_{-1} l_0, l_1, l_2, ... tels que les différences $l_i - l_{i-1}$ soient toutes inférieures à un même nombre ε. Par hypothèse, F étant mesurable, les ensembles $E_{F>l_i}$, $E_{F>l_{i-1}}$ appartiennent à $\mathfrak{F}$ et par suite aussi l'ensemble $E_{l_{i-1}<F\leqq l_i}$ Formons alors les séries

$$\Sigma\, l_i f(E_{l_{i-1}<F\leqq l_i}), \qquad \Sigma\, l_{i-1} f(E_{l_{i-1}\leqq F<l_i}).$$

Puisque F est sommable, ces séries sont absolument convergentes.

Si maintenant on fait tendre ε vers zéro, on voit facilement que les sommes de ces deux séries ont la même limite qui est la valeur de l'intégrale

$$\int_E F\, df$$

définie précédemment.