

# BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. DE DONDER

## Sur les invariants intégraux de l'optique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 42 (1914), p. 91-95

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1914\\_42\\_91\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914_42_91_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

**SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX DE L'OPTIQUE;**

**PAR M. TH. DE DONDER.**

La très intéressante démonstration du théorème de Straubel, que donne M. Dontot <sup>(1)</sup>, pourrait être simplifiée grâce aux deux théorèmes que j'ai publiés en 1913 <sup>(2)</sup> et dont j'ai indiqué diverses applications à la physique mathématique.

**THÉORÈME I. — Si  $\rho$  est un invariant et si**

$$(1) \quad I_m \equiv \int M \, \delta x_1 \, \delta x_2 \dots \delta x_m$$

---

<sup>(1)</sup> *Bull. Soc. math. de France*, t. XLII, fasc. 1, 1914.

<sup>(2)</sup> *Sur un théorème de Jacobi* (*C. R. Acad. Sc.*, 10 février 1913); *Sur la répartition ergodique* (*Bull. Acad. royale de Belgique : Cl. des Sciences*, n° 3, 1913, p. 211-221).

est un invariant intégral  $m$ -uple des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_m}{X_m} = dt$$

( $X_1, X_2, \dots, X_m$  sont des fonctions continues et uniformes de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  et de  $t$ ), la quantité

$$(2) \quad A_{m-1} \equiv \int \frac{M}{\frac{\partial \rho}{\partial x_1}} dx_2 dx_3 \dots dx_m$$

est un invariant  $(m-1)$ -uple sur la variété  $\rho = \rho_0$ .

THÉORÈME II. — Si  $\rho$  et  $X_1, \dots, X_m$  ne renferment pas explicitement  $t$ , on peut déduire de l'invariant (2) l'invariant intégral  $(m-2)$ -uple sur la variété invariante  $\rho = \rho_0$

$$(3) \quad A_{m-2} \equiv \frac{M}{\frac{\partial \rho}{\partial x_1}} \sum_k (-1)^k X_k dx_2 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_m \quad (k = 2 \dots m).$$

Démonstration. — Multiplions symboliquement <sup>(1)</sup>  $A_{m-2}$  par  $\frac{\partial \rho}{\partial x_1}$ , on trouvera la forme intégrale  $(m-1)$ -uple

$$\begin{aligned} & \frac{M}{\frac{\partial \rho}{\partial x_1}} \left[ X_2 dx_3 dx_4 \dots dx_m \frac{\partial \rho}{\partial x_1} dx_1 + X_2 dx_3 \dots dx_m \frac{\partial \rho}{\partial x_2} dx_2 \right. \\ & - X_3 dx_2 dx_4 \dots dx_m \frac{\partial \rho}{\partial x_1} dx_1 - X_3 dx_2 dx_4 \dots dx_m \frac{\partial \rho}{\partial x_3} dx_3 \\ & + \dots \dots \dots \\ & \left. + (-1)^m X_m dx_2 dx_3 \dots dx_{m-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} dx_1 + (-1)^m X_m dx_2 \dots dx_{m-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_m} dx_m \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial x_m} X_m = 0,$$

d'où

$$X_1 = - \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial x_1}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial x_m} X_m \right].$$

En substituant dans la forme intégrale précédente, celle-ci se

---

<sup>(1)</sup> *Introduction à la théorie des invariants intégraux* (Bull. Acad. royale de Belgique : Cl. des Sciences, n° 12, 1913).

réduit (au signe près) à

$$\sum_i (-1)^i M X_i \delta x_1 \dots \delta x_{i-1} \delta x_{i+1} \dots \delta x_m \quad (i=1 \dots m);$$

or, cette dernière fournit un invariant intégral des équations (1).

C. Q. F. D.

Considérons maintenant avec M. Dontot les extrémales de

$$\delta \int n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = 0$$

ou  $x' = \frac{dx}{dt}$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$ ,  $z' = \frac{dz}{dt}$ . L'étude de ces extrémales revient à celle des équations différentielles

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, & \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w}, \\ \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

sur la variété invariante

$$(5) \quad H \equiv \frac{1}{2n^2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}.$$

On a posé

$$u = \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial x'} = \frac{nx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

de même pour  $v$  et pour  $w$ .

Les équations (4) admettent l'invariant intégral

$$I_6 \equiv \int \delta x \delta y \delta z \delta u \delta v \delta w.$$

Appliquons le théorème I, d'où l'invariant intégral 5-uple

$$A_5 \equiv \int \frac{n^2}{u} \delta x \delta y \delta z \delta v \delta w$$

sur la variété (5).

Appliquons le théorème II, d'où l'invariant intégral <sup>(1)</sup> 4-uple

$$A_4 \equiv \int \frac{n^2}{u} \left[ \frac{u}{n^2} \delta y \delta z \delta v \delta w - \frac{v}{n^2} \delta x \delta z \delta v \delta w + \frac{w}{n^2} \delta x \delta y \delta v \delta w \right. \\ \left. + \frac{\partial H}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \delta w - \frac{\partial H}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \delta v \right].$$

---

<sup>(1)</sup> La simplification introduite, ici surtout, me paraît importante.

Considérons deux surfaces quelconques  $\sigma$  et  $\sigma'$  dans l'espace ordinaire et joignons respectivement les différents points de  $\sigma$  aux différents points de  $\sigma'$  par des rayons lumineux, alors on aura  $\delta x \delta y \delta z = 0$ , et  $A_4$  se réduira à

$$A_4 \equiv \int (u \delta y \delta z + v \delta z \delta x + w \delta x \delta y) \frac{\delta v \delta w}{u}.$$

Posons avec M. Dontot

$$\begin{aligned} m &= \frac{u}{n} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \\ p &= \frac{v}{n}, \\ q &= \frac{w}{n}; \end{aligned}$$

donc  $m, p, q$  sont les cosinus directeurs de la demi-tangente au rayon lumineux dans le sens de propagation de la lumière.  $A_4$  devient

$$\int n^2 [m \delta y \delta z + p \delta z \delta x + q \delta x \delta y] \frac{\delta p \delta q}{m}.$$

Or  $\frac{\delta p \delta q}{m} = \delta \omega$  (angle solide ou surface élémentaire d'une sphère de rayon  $un$ ), soit  $\theta$  l'angle de la demi-normale à un élément  $\delta \sigma$  de surface, alors

$$n^2 \cos \theta \delta \sigma \delta \omega = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Ce dernier résultat peut s'obtenir plus rapidement en partant de l'invariant relatif <sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \int \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial x'} \delta x \\ &+ \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial z'} \delta z. \end{aligned}$$

En reprenant les cosinus directeurs  $m, p, q$ , on pourra écrire

$$J_1 \equiv \int n (m \delta x + p \delta y + q \delta z).$$

---

<sup>(1)</sup> *Étude sur les invariants intégraux* [Rendiconti Circolo matematico di Palermo, t. XVI, 1902 (Chap. XIII)].

Par différentiation symbolique, on introduit l'invariant intégral absolu (2-uple)

$$I_2 = \int \delta n (m \delta x + p \delta y + q \delta z) + n (\delta m \delta x + \delta p \delta y + \delta q \delta z).$$

En multipliant  $I_2$  par  $I_2$  symboliquement et en tenant compte de ce que  $\delta x \delta y \delta z$  dans ce théorème d'optique est nul, on obtient

$$\begin{aligned} I_4^* &= \int n^2 (\delta x \delta y \delta m \delta p + \delta y \delta z \delta p \delta q + \delta z \delta x \delta q \delta m) \\ &= \int n^2 \left( q \delta x \delta y \frac{\delta m \delta p}{q} + m \delta y \delta z \frac{\delta p \delta q}{m} + p \delta z \delta x \frac{\delta q \delta m}{p} \right) \\ &= \int n^2 \cos \theta \delta \sigma \delta \omega. \end{aligned}$$

---