BULLETIN DE LA S. M. F.

G. BOULIGAND

Sur les fonctions de Green et de Neumann du cylindre

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 168-242
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__168_0>

SUR LES FONCTIONS DE GREEN ET DE NEUMANN DU CYLINDRE;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

INTRODUCTION (1).

1. Nous considérerons un cylindre dont la section droite, supposée fermée, limite une aire simplement connexe : soient Σ cette aire et L son périmètre. Pour plan xOy, nous prendrons le plan d'une section droite quelconque Σ_0, et pour axe Oz, une parallèle aux génératrices. Nous appellerons Σ_z la section droite de cote z.

Nous appellerons *demi-cylindre* la portion de l'espace occupée par les points qui sont intérieurs au cylindre et se trouvent d'un certain côté d'une section droite donnée. Toute section droite Σ_h divisera le cylindre indéfini en deux demi-cylindres. Nous appellerons (h_+) celui qui est situé du côté des z positifs, (h_-) celui qui correspond aux z négatifs. Nous désignerons par (h, h') le cylindre droit limité aux sections Σ_h et $\Sigma_{h'}$.

Nous représenterons par des grandes lettres les points intérieurs au cylindre, par les petites lettres correspondantes leurs projections sur le plan de la section (Σ_0).

2. Nous considérerons les deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \Lambda U \tag{1}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \lambda u. \tag{2}$$

L'étude de ces équations est aujourd'hui fort avancée : le plus

(1) Les résultats contenus dans ce travail ont été résumés dans deux Notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (5 mai et 8 décembre 1913).

souvent on cherche à en déterminer une solution régulière dans un certain domaine, connaissant, le long de la frontière de ce domaine, les valeurs de cette solution ou celles de sa dérivée normale.

La théorie de Fredholm a permis d'établir la discussion complète de ces problèmes dans le cas où le domaine considéré est régulier et limité en tous sens. Les travaux qui ont trait à ces questions sont trop nombreux pour que nous puissions songer à les énumérer (¹). Nous nous contenterons de rappeler quelques résultats tout à fait classiques, mais d'une importance capitale pour la suite.

Nous poserons

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

et

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Une solution fondamentale de (1) sera

$$\frac{e^{-\sqrt{\Lambda}.R}}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos(\sqrt{-\Lambda}\,R)}{R},$$

suivant que Λ est positif ou négatif.

Comme solution fondamentale de (2), on peut prendre

$$K(i\sqrt{\lambda}\,r),$$

quel que soit le signe de λ : cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \lambda u = 0.$$

Si l'on considère la fonction de Bessel $J(i\sqrt{\lambda}r)$ qui est une autre solution de la même équation, définie en tout point du plan, par

(¹) Nous citerons seulement deux Mémoires de M. Picard, parus dans les *Rendiconti di Palermo* : *Sur quelques applications de l'équation de Fredholm* (t. XXII) et *Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann* (t. XXXVII). — *Voir* aussi comme Ouvrages didactiques : Fréchet et Heywood, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*. — Goursat, *Traité d'Analyse*, t. III, chap. XXVII et XXVIII.

la série

$$J(i\sqrt{\lambda}\, r) = 1 - \frac{\lambda r^2}{2^2} + \frac{\lambda^2 r^4}{2^2 . 4^2} - \frac{\lambda^3 r^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots,$$

la fonction K est de la forme

$$K(i\sqrt{\lambda}\, r) = H(i\sqrt{\lambda}\, r) + J(i\sqrt{\lambda}\, r) \log \frac{1}{r},$$

la fonction H étant holomorphe. On démontre en outre qu'on a

$$(3) \qquad \frac{e^{-\mu R}}{R} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(ir\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}) \cos \lambda(z - \zeta)\, d\lambda,$$

et cela en remarquant que le second membre est solution de l'équation (1), lorsqu'on y suppose

$$\Lambda = \mu^2;$$

il suffit alors de constater qu'on a bien une solution *fondamentale* (le pôle étant le point x, y, z), qui s'annule à l'infini ainsi que ses dérivées.

De la formule (3) on déduit immédiatement

$$(4) \qquad K(ir\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\mu R}}{R} \cos \lambda(z - \zeta)\, d\lambda.$$

Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(ir\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}) \cos \lambda(z - \zeta)\, d\lambda$$

en lui appliquant le raisonnement fait pour l'intégrale analogue qui figure au second membre de (3), nous voyons qu'elle représente une fonction de ξ, η, ζ qui s'annule à l'infini ainsi que ses dérivées, et que cette fonction est une solution fondamentale de l'équation (1) lorsqu'on y suppose $\Lambda = -\mu^2$: tout ce que nous pouvons en conclure ici (ce qui nous suffira d'ailleurs), c'est que cette intégrale représente une fonction de la forme

$$\frac{\cos \mu R + h \sin \mu R}{R}$$

(h étant une constante inconnue), c'est-à-dire une solution fondamentale de (1).

3. *Fonctions de Green et de Neumann.* — Considérons un volume (V) et un point P intérieur à ce volume [s'il s'agit de l'équation (1)] ou bien une aire (Σ) et un point p intérieur à cette aire [s'il s'agit de l'équation (2)]. Pour le moment, nous supposons ces domaines (V) ou (Σ) limités en tous sens.

La solution de notre équation, qui devient infinie au point considéré (P ou p) comme la solution fondamentale, et qui s'annule sur la frontière, s'appelle la *fonction de Green* : celle-ci est donc fonction de deux points du domaine, et nous la représenterons par l'une des notations

$$G(M, P; \Lambda) \quad \text{ou} \quad g(m, p; \lambda)$$

suivant qu'on est dans l'espace ou dans le plan. On démontre qu'elle est symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend. Une telle fonction existe toujours lorsqu'on suppose $\Lambda \geqq 0$.

Nous appellerons de même *fonction de Neumann* une solution qui devient infinie au point donné comme la solution fondamentale et dont la dérivée normale s'annule le long de la frontière. Nous représenterons une telle fonction par l'une des notations

$$\Gamma(M, P; \Lambda) \quad \text{ou} \quad \gamma(m, p; \lambda).$$

Une telle fonction est encore symétrique par rapport aux deux points dont elle dépend. *Il importe de remarquer que la définition précédente,* qui est toujours valable pour Λ positif (ou λ positif), *cesse de l'être lorsqu'on donne à* Λ *ou* λ *la valeur zéro.*

Dans le cas de l'équation de Laplace, il faut en effet la modifier, en supposant la dérivée normale non plus nulle, mais constante sur la frontière $\left(\text{cette constante étant } \frac{4\pi}{\sigma} \text{ pour l'espace, } \frac{2\pi}{L} \text{ pour le plan}\right)$: pour achever de déterminer la fonction de Neumann, on ajoute la condition que la moyenne de ses valeurs sur la frontière du domaine est une constante, d'ailleurs arbitraire. On conserve ainsi, comme l'a montré M. Hadamard [1], la

[1] *Propagation des ondes*, Chap. I.

propriété de symétrie. Nous représenterons cette fonction par l'une des notations

$$\Gamma(M, P) \quad \text{ou} \quad \gamma(m, p).$$

Il résulte de la théorie de Fredholm que les quatre fonctions

$$G(M, P; \Lambda), \quad g(m, p; \lambda), \quad \Gamma(M, P; \Lambda), \quad \gamma(m, p; \lambda)$$

sont des fonctions *méromorphes* de Λ ou λ. On démontre que tous leurs pôles sont *simples* et correspondent à des valeurs *réelles* du paramètre : ces valeurs sont toutes *négatives* pour la fonction de Green. Pour la fonction de Neumann, aucune n'est positive.

Par contre, *la valeur* $\Lambda = 0$ (*ou* $\lambda = 0$) *correspond à un pôle de cette fonction*.

On démontre facilement ([1]) qu'on a

$$\gamma(m, p; \lambda) = \frac{2\pi}{\lambda \Sigma} + \gamma'(m, p; \lambda), \tag{5}$$

où γ' est une fonction holomorphe par rapport à λ autour de la valeur $\lambda = 0$.

Dans le cas de l'espace, on aurait de même

$$\Gamma(M, P; \Lambda) = \frac{4\pi}{\Lambda V} + \Gamma'(M, P; \Lambda), \tag{6}$$

Γ' étant holomorphe en Λ pour $\Lambda = 0$.

4. Considérons la suite des pôles de la fonction $g(m, p; \lambda)$

$$-\alpha_1^2, \quad -\alpha_2^2, \quad \ldots, \quad -\alpha_n^2, \quad \ldots; \tag{α}$$

à chacun d'eux correspondent une ou plusieurs fonctions fondamentales, nulles sur le contour. Nous répéterons chaque terme de la suite (α) autant de fois qu'il lui correspond de telles fonctions. Enfin, nous supposerons ces fonctions écrites en une suite orthogonale et normale

$$\varphi_1(m), \quad \varphi_2(m), \quad \ldots, \quad \varphi_n(m), \quad \ldots; \tag{φ}$$

([1]) SANIELEVICI, *Thèse*, p. 63.

on a, entre ces divers éléments, les relations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \eta^2} + \alpha_n^2 \varphi_n = 0, \\ \displaystyle\iint_{(\Sigma)} \varphi_i(m)\, \varphi_k(m)\, d\Sigma_m = 0 \quad (i \neq k), \qquad \iint_{(\Sigma)} \varphi_i^2(m)\, d\Sigma_m = 1, \\ \displaystyle 2\pi\, \varphi_i(p) = \alpha_i^2 \iint_{(\Sigma)} \varphi_i(m)\, g(m, p)\, d\Sigma_m, \end{array}\right.$$

où $g(m, p)$ est la fonction de Green ordinaire. Cette fonction étant essentiellement positive, nous nous trouvons dans le cas d'application du théorème suivant, dû à M. Robert Jentzsch [1] :

« Étant donnée une équation intégrale de la forme

$$F(p) = \varphi(p) - \lambda \iint_{\Sigma} \varphi(m)\, K(m, p)\, d\Sigma_m,$$

dont le noyau K (m, p) est positif, la constante caractéristique de moindre module correspondant à ce noyau est réelle, positive ; en outre, c'est une racine simple de $D(\lambda)$. Il lui correspond une seule fonction fondamentale qui a le même signe dans toute l'aire. »

Ainsi, dans le cas actuel, les deux nombres α_1^2 et α_2^2 sont certainement distincts. En outre, la fonction $\varphi_1(m)$ a même signe en tout point de l'aire (Σ). Nous conviendrons, ce qui est évidemment permis, que ce signe est le signe $(+)$.

Nous utiliserons en outre le théorème suivant, dont la démonstration résulte des travaux de MM. Hilbert et Schmidt [2] :

Soit $F(m)$ *une fonction définie en tout point de l'aire* (Σ), *s'annulant sur le contour* (C) *et possédant en tout point de l'aire des dérivées du second ordre continues. Cette fonction est développable en une série absolument et uniformément*

---

(1) *Ueber Integralgleichungen mit positiver Kern* (*Journal de Crelle*, t. 141, fasc. 4).

(2) Fréchet et Heywood, *L'équation de Fredholm et ses applications*, etc., p. 108 et 131.

convergente de fonctions de la suite (φ) :

$$F(m) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \varphi_i(m);$$

la valeur du coefficient c_i *sera donnée par*

$$c_i = \int\int_{\Sigma} F(m)\,\varphi_i(m)\,d\Sigma_m.$$

De même, considérons la suite (β) des pôles de la fonction $\gamma(m, p; \lambda)$

$$(\beta) \qquad 0, \quad -\beta_1^2, \quad -\beta_2^2, \quad \ldots, \quad -\beta_n^2, \quad \ldots$$

et soit

$$(\psi) \qquad \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}, \quad \psi_1(m), \quad \psi_2(m), \quad \ldots, \quad \psi_n(m), \quad \ldots$$

la suite orthogonale et normale des fonctions fondamentales correspondantes. Toutes ces fonctions ont leurs dérivées normales nulles sur le contour. Toute fonction définie dans l'aire (Σ)*, continue en tout point de l'aire ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres* et ayant une *dérivée normale nulle sur le contour,* sera encore développable par rapport aux fonctions de la suite (ψ) en une *série absolument et uniformément convergente.*

5. Le présent Mémoire est consacré à l'étude des fonctions de Green et Neumann du cylindre indéfini, et de quelques questions qui s'y rattachent.

Les propositions que nous rencontrerons peuvent se classer en deux sortes :

1° Les unes sont négatives : du fait que le domaine considéré est infini, un certain nombre des propriétés des fonctions $G(M, P; \Lambda)$ et $\Gamma(M, P; \Lambda)$ cessent d'être vraies : ainsi nous verrons que ces fonctions ne sont plus méromorphes en Λ.

2° Les autres ont trait à des relations précises entre ces fonctions et les éléments correspondants de la section droite, et résultent directement des propriétés géométriques élémentaires du cylindre.

Pour l'étude des premières, je me suis inspiré de l'exemple singulier d'équation intégrale, donné par M. Picard ([1]) et désormais classique.

Pour les autres, je dois citer le Mémoire de M. Paul Lévy ([2]), qui contient une relation fort importante entre la fonction de Green ordinaire d'un cylindre indéfini et celle de sa section droite. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(M, P)\, d\zeta = 2g(m, p).$$

L'objet principal du précédent Mémoire est de montrer comment l'équation aux dérivées fonctionnelles de la fonction de Green permet le calcul complet de cette fonction dans le cas d'un cylindre de révolution indéfini : ce calcul se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati. M. Paul Lévy indique aussi incidemment un fait important que nous généraliserons ici :

La fonction de Green ordinaire du cylindre de révolution a une expression asymptotique de la forme

$$k\,J(\lambda r)\, e^{-\lambda|\zeta|},$$

r désignant la distance à l'axe du point ξ, η, ζ, et λ la plus petite racine positive de l'équation

$$J(\lambda \mathcal{R}) = 0 \qquad (\mathcal{R} = \text{rayon du cylindre}).$$

L'expression de la fonction de Green du cylindre de révolution est d'ailleurs connue depuis très longtemps ([3]) (au moins formellement) sous forme d'un développement où figurent les fonctions de Bessel.

J'ai également tiré parti de la Thèse de M. Vergne ([4]) : je fais allusion à la méthode fort élégante par laquelle l'auteur a résolu le problème des petites oscillations d'un fluide parfait, uniquement soumis à l'action de son poids, et contenu dans un cylindre vertical infiniment profond. Le principe de cette méthode utilise un

---

([1]) Picard, *C. R. Acad. Sc.*, 13 octobre 1910, et *Annales de l'École Normale*, 1911.

([2]) Paul Lévy, *Sur la fonction de Green ordinaire du cylindre de révolution*, etc. (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 2e semestre 1912).

([3]) Heine, *Anwendungen der Kügelfunctionen*, p. 186.

([4]) Vergne, *Thèse*, p. 72 et suiv.

développement procédant suivant les fonctions fondamentales de la section droite : nous verrons dans la suite tout le parti qu'on peut tirer de pareils développements.

6. Le Chapitre I est réservé à l'étude du cylindre droit : il est très facile de trouver comment se prolonge analytiquement, dans le cylindre indéfini, la fonction de Green ou de Neumann d'un cylindre limité. On démontre que la fonction ainsi prolongée est périodique par rapport à la cote du point M, la période étant double de la hauteur du cylindre. On est donc conduit à représenter cette fonction par un développement de Fourier, dont les coefficients sont des fonctions de Green de la section droite, relatives à l'équation (2), pour des valeurs de λ qui sont de la forme

$$\Lambda + \frac{n^2\pi^2}{H^2},$$

H étant la hauteur de notre cylindre droit. En outre, les dérivées, par rapport à ζ de la fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$ du cylindre droit, sont elles-mêmes représentables par des développements de Fourier, qui se déduisent par dérivation terme à terme du développement précédent. On en déduit très simplement que, lorsque λ augmente indéfiniment par valeurs positives, les fonctions $g(m, p; \lambda)$ et $\gamma(m, p; \lambda)$ tendent vers zéro plus rapidement que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{\lambda}$. Ce résultat n'est pas d'ailleurs absolument nouveau, mais la méthode précédente en donne une démonstration tout à fait intuitive.

Nous passons alors au cylindre indéfini : avant de définir les fonctions de Green et de Neumann, il est nécessaire de rechercher quelles conditions il convient d'imposer à une solution de l'équation (1) pour en assurer l'unicité. La réponse à cette question nous est fournie par les deux propositions suivantes :

1° Quel que soit Λ, si une solution de (1) s'annule sur le cylindre et tend uniformément vers zéro quand $|\zeta|$ croît indéfiniment (auquel cas nous dirons *qu'elle est régulière à l'infini*), elle est identiquement nulle à l'intérieur du cylindre.

2° Si l'on a au sens strict $\Lambda + \alpha_1^2 > 0$, toute solution de (1) qui est bornée dans le cylindre et qui est nulle sur sa surface est nulle à l'intérieur.

P étant un point fixe intérieur au cylindre, nous appellerons donc *fonction de Green* une solution qui devient infinie en P comme la solution fondamentale, qui s'annule sur le cylindre et qui est régulière à l'infini.

On démontre alors aisément le résultat suivant :

1° Si $\Lambda + \alpha_1^2$ est positif, il y a une fonction de Green donnée par

$$G(M, P; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(m, p; \Lambda + \lambda^2) \cos \lambda(\zeta - z)\, d\lambda.$$

2° Si $\Lambda + \alpha_1^2$ est négatif ou nul, il n'y a pas de fonction de Green.

On obtient des résultats analogues pour la fonction de Neumann $\Gamma(M, P; \Lambda)$; sa définition est analogue à celle de la fonction de Green : il suffit de remplacer la condition $G = 0$ sur le cylindre par la condition $\frac{d\Gamma}{dn} = 0$. Il n'y a de fonction de Neumann que si Λ est essentiellement positif.

Les fonctions G $(M, P; \Lambda)$ et Γ $(M, P; \Lambda)$ du cylindre indéfini (Λ étant tel qu'elles existent) peuvent être considérées comme la limite vers laquelle tendent les fonctions de Green et de Neumann d'un cylindre droit (pour la même valeur de Λ) lorsque les bases s'éloignent indéfiniment de part et d'autre.

Le Chapitre III contient les développements des fonctions G $(M, P; \Lambda)$ et Γ $(M, P; \Lambda)$ en séries de fonctions fondamentales; ces séries ont l'avantage de fournir immédiatement l'expression asymptotique de ces fonctions à l'infini : elles convergent uniformément dans toute section droite différente de celle du point fixe P. Leur examen fournit en outre une preuve du fait que ces fonctions G $(M, P; \Lambda)$ et Γ $(M, P; \Lambda)$ ne peuvent être méromorphes en Λ.

Au Chapitre IV, j'ai étudié les relations entre la fonction de Green du cylindre et celle de sa section droite : l'une de ces relations est due à M. Paul Lévy. J'ai montré comment on peut en obtenir une autre de la forme

$$\iint_{\Sigma_0} G_m^p G_q^m \, d\Sigma_m = 2\pi g_p^q,$$

cette relation s'applique à toutes les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \Lambda\, R(\xi, \eta) U,$$

où $R(\xi, \eta)$ est une fonction positive dans toute la section droite : comme on le voit, elle ne fait intervenir que les valeurs de la fonction G qui correspondent à des points situés dans une même section droite.

De cette propriété se déduit la résolution d'équations fonctionnelles de forme simple, dont le noyau est la fonction $G(m, p; \Lambda)$; m et p désignant toujours deux points d'une même section droite Σ_0.

Au Chapitre V, j'ai abordé la discussion du problème de Dirichlet en essayant de montrer ce que le fait de considérer un domaine infini peut introduire de nouveau. Voici à cet égard les résultats que j'ai obtenus : suivant le signe de $\Lambda + \alpha_1^2$, on est amené à se poser deux problèmes différents :

1° Si $\Lambda + \alpha_1^2$ est > 0, on peut énoncer la question sous une forme plus générale : « Trouver une solution de l'équation (1), régulière et bornée à l'intérieur du cylindre et prenant sur le cylindre des valeurs données, continues et bornées. » J'ai montré que ce problème a une solution et une seule.

2° Lorsque $\Lambda + \alpha_1^2$ est $\leqq 0$, j'ai dû me restreindre à étudier la question suivante : « Soit $H(s, z)$ une fonction donnée sur le cylindre; on la suppose continue, tendant vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment et telle que son intégrale le long d'une génératrice soit absolument et uniformément convergente : trouver une solution de (1) régulière dans le cylindre et régulière à l'infini, et prenant sur la surface les valeurs $H(s, z)$. » Ce problème est en général impossible, j'ai donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse le résoudre, en introduisant la notion de fonction de Green généralisée. Si Λ est compris entre les deux nombres $-\alpha_p^2$ et $-\alpha_{p+1}^2$, ces conditions sont au nombre de $2p$. Si l'on supprime, dans l'énoncé précédent, la condition de régularité à l'infini, le problème, d'impossible, devient indéterminé.

Enfin, dans un dernier Chapitre, j'ai consacré quelques mots à la fonction de Neumann ordinaire, qui est bien entendu analogue aux fonctions de Green généralisées.

Qu'il me soit maintenant permis d'exprimer à M. Hadamard mes bien sincères remercîments; non seulement, j'ai toujours trouvé auprès de lui l'accueil le plus cordial et les plus précieux encouragements, mais c'est dans son œuvre que j'ai puisé les idées directrices de mes propres recherches.

C'est pour moi un plaisir non moins vif de remercier M. Picard et M. Borel dont je suis aussi l'élève, et dont j'ai éprouvé maintes fois l'extrême bienveillance. Je suis heureux de leur en témoigner ici ma profonde reconnaissance.

CHAPITRE I.

LE CYLINDRE LIMITÉ.

7. Nous attirerons d'abord l'attention sur le fait suivant :

Les fonctions de Green et de Neumann d'un cylindre limité se prolongent aisément dans le cylindre indéfini : les fonctions, ainsi prolongées, sont périodiques par rapport à la cote du point variable, et leur période est double de la hauteur du cylindre.

Prenons, par exemple, la fonction de Green ordinaire $G(M, P)$ relative au cylindre (h, h'); considérons le cylindre $(h, 2h - h')$, symétrique du précédent par rapport au plan Σ_h, et la fonction qui prend au point M' symétrique du point M par rapport à Σ_h la valeur $-G(M, P)$: cette fonction est définie dans notre nouveau cylindre, et elle y prolonge $G(M, P)$, car le long du plan Σ_h, elle s'annule tout comme $G(M, P)$, et sa dérivée par rapport à ζ coïncide avec celle de $G(M, P)$. Enfin, le long du cylindre, elle prolonge bien $G(M, P)$, puisqu'elle est nulle. La fonction de Green du cylindre (h, h') est donc dès à présent définie dans le cylindre double $(2h - h', h')$: sur les sections $\Sigma_{2h-h'}$ et $\Sigma_{h'}$ elle s'annule, et en des points de ces sections situés sur une parallèle aux génératrices, sa dérivée par rapport à ζ a la même valeur : c'est dire que si nous imprimons au cylindre $(2h - h', h')$ le groupe de translations rectilignes $2n(h' - h)$ (parallèlement aux génératrices), n désignant un entier quelconque, nous réaliserons le prolongement annoncé. Nous obtiendrons bien une fonction périodique de ζ, et sa période sera $2(h' - h)$.

La fonction $G(M, P)$ possédera deux points singuliers dans chacun des cylindres de hauteur $2(h'-h)$ que nous juxtaposons ainsi. En désignant par P′ le symétrique de P par rapport à Σ_h, dans le cylindre $(2h-h', h')$, sa partie singulière sera

$$\frac{1}{MP}-\frac{1}{MP'}.$$

Ce raisonnement s'applique sans modification à $G(M, P; \Lambda)$ (pourvu que Λ ne soit pas une constante caractéristique).

Pour $\Gamma(M, P; \Lambda)$, on procédera d'une manière tout à fait analogue : toutefois, ici, pour opérer le prolongement dans le cylindre $(h, 2h-h')$, il faudra considérer la fonction qui prend au point M′ la valeur $\Gamma(M, P; \Lambda)$ elle-même.

8. Voici maintenant une conséquence de cette proposition :

Soit une parallèle aux génératrices, intérieure au cylindre, et ne passant pas par P : si le point M se trouve sur cette droite, nos fonctions G et Γ dépendent seulement de ζ; nous venons de voir qu'elles sont périodiques. Remarquons de plus que, quel que soit ζ_0, elles sont développables en série entière autour de cette valeur. Il en résulte qu'elles satisfont aux *conditions de Dirichlet;* elles sont donc développables en séries de Fourier, dans un intervalle d'amplitude $2(h'-h)$; et ces séries seront *uniformément convergentes dans tout l'intervalle,* puisque, nulle part, G ni Γ ne présentent de discontinuité [1].

Mais nous pouvons répéter identiquement le même raisonnement pour une dérivée d'ordre quelconque, par rapport à ζ, de G ou de Γ : celle-ci sera encore développable en une série de Fourier uniformément convergente. De là résulte immédiatement ce fait :

Les développements en série trigonométrique de G *ou* Γ *sont indéfiniment dérivables terme à terme.*

9. Supposons, pour fixer les idées, Λ positif, soit

$$\Lambda = \mu^2,$$

et cherchons le développement de $G(M, P; \mu^2)$. Il est clair que G

(1) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 2e édition, p. 259.

est une fonction impaire de $\zeta - h$. Le développement cherché sera donc de la forme

$$G(M, P; \mu^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n(m, P; \mu^2) \sin\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right),$$

le coefficient Φ_n ayant pour expression

$$\Phi_n(m, P; \mu^2) = \frac{2}{h' - h} \int_h^{h'} G(M, P; \mu^2) \sin\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right) d\zeta;$$

on vérifie fort aisément, par une différentiation sous le signe *somme* et une double intégration par parties, que le coefficient Φ_n considéré comme fonction du point m est solution de l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta^2} = \left[\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(h' - h)^2}\right] \Phi_n;$$

en outre, Φ_n s'annule lorsque le point m appartient au contour (C).

Pour achever de caractériser Φ_n, nous allons chercher quelle singularité elle présente lorsque les points m et p tendent à se confondre.

Or, dans le cylindre (h, h'), on a

$$G(M, P; \mu^2) = \frac{e^{-\mu R}}{R} - \Omega(M, P; \mu),$$

la fonction Ω étant régulière en tout point M intérieur à ce cylindre. La singularité de Φ_n nous sera donc fournie par l'intégrale

$$\frac{2}{h' - h} \int_h^{h'} \frac{e^{-\mu\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \sin\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right) d\zeta,$$

qui satisfait elle-même à l'équation (8). Puisqu'elle ne dépend que de r, elle est donc de la forme

$$AK\left[ir\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(h' - h)^2}}\right] + BJ\left[ir\sqrt{\mu^2 + \frac{n^2\pi^2}{(h' - h)^2}}\right];$$

c'est A qu'il nous faut connaître, et nous n'altérerons pas ce coefficient en remplaçant dans l'intégrale précédente les limites h et h' par $-\infty$ et $+\infty$, car une telle transformation ne modifie cette intégrale que d'une fonction holomorphe. Nous sommes ainsi ramenés à

$$\frac{2}{h'-h}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}\sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)d\zeta;$$

transformons cette intégrale au moyen de la formule

$$\begin{aligned}\sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right) = {} & \sin\left(n\pi\frac{\zeta-z}{h'-h}\right)\cos\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)\\ & +\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)\cos\left(n\pi\frac{\zeta-z}{h'-h}\right),\end{aligned}$$

notre intégrale se décomposera en une somme de deux termes : le premier reste fini même pour $r=0$, le second s'écrit

$$\frac{2}{h'-h}\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}\cos\left(n\pi\frac{\zeta-z}{h'-h}\right)d\zeta,$$

c'est-à-dire, en vertu de (4),

$$\text{(9)}\qquad \frac{4}{h'-h}\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)\mathrm{K}\left[ir\sqrt{\mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}}\right];$$

en résumé, Φ_n est une solution de (8) qui s'annule sur le bord et qui ne diffère de l'expression (9) que par une fonction holomorphe en tout point m de (Σ).

On en conclut immédiatement

$$\Phi_n = \frac{4}{h'-h}\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)g\left[m, p;\ \mu^2+\frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right],$$

d'où le développement cherché

$$\text{(10)}\qquad \mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P};\ \mathrm{A}) = \frac{4}{h'-h}\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)\times\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)g\left[m, p;\ \mathrm{A}+\frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right];$$

nous y avons, il est vrai, supposé A positif; si nous supposons A négatif et différent d'une constante caractéristique, la démonstration précédente subsistera [1] et le développement (10) continuera à être valable.

---

[1] En posant cette fois $\mathrm{A}=-\mu^2$, il n'y aura qu'à changer dans le raisonnement précédent $\frac{e^{-\mu\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}$ en $\frac{\cos\mu\mathrm{R}}{\mathrm{R}}$.

10. Il est d'ailleurs facile de déterminer *a priori* ces constantes caractéristiques. Désignons par $-K^2$ l'une d'elles et par $\Phi(M)$ une fonction fondamentale correspondante : cette fonction pourra se prolonger analytiquement dans tout le cylindre absolument par le même procédé que la fonction de Green elle-même : nous obtiendrons ainsi une fonction périodique de ζ, dont la période sera encore $2(h'-h)$. Cette fonction sera impaire par rapport à $\zeta - h$. Dans son développement en série de Fourier, le coefficient de

$$\sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)$$

sera donné par

$$\varphi(\xi,\eta) = \frac{2}{h'-h}\int_h^{h'} \Phi(\xi,\eta,\zeta)\sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)d\zeta;$$

donc φ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \left[K^2 - \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right]\varphi = 0,$$

et comme φ s'annule lorsque le point (ξ,η) appartient au contour (C), nous en concluons :

1° Que $K^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}$ est égal à l'un des nombres de la suite (α);

2° Que $\varphi(\xi,\eta)$ est une fonction fondamentale correspondante de la section droite.

Réciproquement, soit $\varphi_p(m)$ une fonction quelconque de la suite (φ) : quel que soit l'entier n, la fonction

$$\varphi_p(m)\sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)$$

sera une fonction fondamentale de notre cylindre droit et la constante caractéristique correspondante sera

$$-\alpha_p^2 - \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}. \tag{11}$$

Ainsi, toutes les constantes caractéristiques s'obtiendront en donnant à p et à n dans l'expression (11) toutes les valeurs entières possibles [1] : nous voyons qu'elles seront toutes inférieures au nombre $-\alpha_1^2$.

---

[1] Toutefois, on doit supposer n différent de zéro.

Il nous est facile de vérifier maintenant que, si Λ n'est égal à aucune de ces valeurs caractéristiques, tous les termes de la série (10) ont des valeurs finies; en effet, s'il en est ainsi, quel que soit l'entier n, le nombre

$$\Lambda + \frac{n^2 \pi^2}{(h' - h)^2}$$

n'appartient pas à la suite (α), et la série en question ne présentera pas de terme infini.

11. Par un raisonnement tout pareil à celui qui nous a donné le développement (10) de $G(M, P; \Lambda)$, on trouve celui de $\Gamma(M, P; \Lambda)$:

$$\Gamma(M, P; \Lambda) = \frac{4}{h' - h}\left[\frac{\gamma(m, p; \Lambda)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right) \times \cos\left(n\pi \frac{z - h}{h' - h}\right) \gamma\left(m, p; \Lambda + \frac{n^2\pi^2}{(h' - h)^2}\right)\right] \tag{12}$$

naturellement, on doit supposer que Λ n'est pas une constante caractéristique, et *en particulier que* Λ *n'est pas nul.* En posant pour l'uniformité des notations

$$0 = -\beta_0^2, \qquad \frac{1}{\sqrt{\Sigma}} = \psi_0(m),$$

toutes les constantes caractéristiques seront de la forme

$$-\beta_p^2 - \frac{n^2 \pi^2}{(h' - h)^2};$$

ici, on devra donner à p et n toutes les valeurs entières possibles, zéro y compris. Les fonctions fondamentales correspondantes seront de la forme

$$\psi_p(m) \cos\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right).$$

12. Il est possible d'écrire, pour la fonction de Neumann ordinaire $\Gamma(M, P)$, un développement analogue à (12). Mais, pour cela, il est nécessaire de modifier un peu la définition de cette fonction, telle que nous l'avons donnée dans l'Introduction. Nous ne changerons que les conditions à la frontière, et cela de la façon suivante :

Au lieu de supposer la dérivée normale de Γ constante sur toute la surface, nous l'assujettirons à s'annuler sur les deux bases, et, le long du cylindre lui-même, elle prendra la valeur

$$\frac{4\pi}{(h'-h)L};$$

pour achever de la déterminer et pour assurer la symétrie par rapport aux deux points M et P, nous ajouterons que la moyenne des valeurs de Γ sur la surface latérale est une constante, d'ailleurs arbitraire ([1]).

Le procédé de prolongement donné pour $\Gamma(M, P; \Lambda)$ s'applique sans modification à la fonction $\Gamma(M, P)$ ainsi définie, du fait que sa dérivée normale est nulle sur les bases : par rapport à la cote ζ du point M, cette fonction est donc périodique, la période étant encore $2(h'-h)$, et son développement s'écrira

$$\Gamma(M, P) = \frac{\Psi_0(m, P)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_n(m, P) \cos\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right).$$

Le calcul des coefficients Ψ_n s'effectue par la méthode que nous avons indiquée pour $G(M, P; \Lambda)$; on trouve facilement

$$(13) \quad \Gamma(M, P) = \frac{4}{h'-h}\left\{\frac{\gamma(m,p)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)\cos\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)\gamma\left[m,p;\frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right]\right\}.$$

Remarque. — Dans le courant de la démonstration des développements (12) et (13) on rencontre les égalités

$$(14) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_h^{h'} \Gamma(M, P; \Lambda)\, d\zeta = 2\gamma(m, p; \Lambda), \\ \displaystyle\int_h^{h'} \Gamma(M, P)\, d\zeta = 2\gamma(m, p), \end{cases}$$

qui fournissent une relation entre la fonction de Neumann du cylindre et celle de sa section droite. M. Hadamard, qui a signalé

([1]) J'emprunte cette définition à M. Hadamard (*C. R. Acad. Sc.*, t. CLVI, p. 1364).

cette relation [1], a fait remarquer qu'elle est de même forme que celle de M. Paul Lévy, citée au paragraphe 5 de l'Introduction, et qui a trait à la fonction de Green du cylindre indéfini.

13. De la forme des développements (10) et (12) [ou (13)], et du fait qu'ils sont indéfiniment dérivables terme à terme, se dégage immédiatement la proposition suivante :

En désignant par α *un nombre positif quelconque, les produits*

$$\lambda^\alpha g(m, p\,;\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda^\alpha \gamma(m, p\,;\lambda)$$

tendent vers zéro lorsque λ *croît indéfiniment par valeurs positives* (on suppose les points m et p fixes).

Prenons par exemple le développement (10) : du moment qu'il est indéfiniment dérivable terme à terme, il est nécessaire que le produit

$$n^{2k} g\left[m,\, p\,;\, \Lambda + \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right]$$

(où k est un entier positif quelconque) tende vers zéro, puisque ce produit est (au signe près) le coefficient du terme en

$$\sin\left(n\pi\frac{\zeta - h}{h'-h}\right)\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right)$$

dans la dérivée d'ordre $2k$. Il suffit de faire

$$\Lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}$$

pour obtenir la proposition annoncée, lorsque le nombre positif α est entier : mais on voit immédiatement que, d'après sa nature même, le théorème, s'il est vrai pour α entier, l'est pour α quelconque.

On fera une démonstration identique pour la fonction de Neumann, en raisonnant sur le développement (13).

Remarque. — Écrivons les fonctions g et γ en mettant en évi-

---

[1] *Loc. cit.*

dence le terme singulier $K(i\sqrt{\lambda}\,r)$:

$$g(m,p;\lambda) = K(i\sqrt{\lambda}\,r) - \omega(m,p;\lambda),$$
$$\gamma(m,p;\lambda) = K(i\sqrt{\lambda}\,r) - \varpi(m,p;\lambda);$$

il résulte de l'expression asymptotique (¹) de la fonction K que le produit

$$\lambda^{\alpha} K(i\sqrt{\lambda}\,r)$$

tend lui-même vers zéro lorsque λ croît indéfiniment par valeurs positives. Dans ces conditions, il en sera donc de même de chacun des produits

$$\lambda^{\alpha}\omega(m,p;\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda^{\alpha}\varpi(m,p;\lambda).$$

14. Les résultats du paragraphe précédent nous seront très utiles dans la suite pour établir l'existence des fonctions de Green et de Neumann du cylindre indéfini. Je dois dire toutefois qu'ils ne sont pas entièrement nouveaux : depuis longtemps, on connaît en effet la proposition suivante :

Les solutions de l'équation (2), *définies et régulières dans l'aire limitée par un contour* (C) *et satisfaisant au contour à une condition donnée* (de Dirichlet ou Neumann) *indépendante de λ, tendent rapidement vers zéro en tout point intérieur à l'aire lorsque λ augmente indéfiniment par valeurs positives.*

En ce qui concerne la solution de (2) qui prend sur (C) des valeurs données indépendantes de λ, M. Hadamard a donné (²) une preuve très simple du fait précédent : soient un point intérieur à l'aire, δ sa plus petite distance au contour (C), M la borne supérieure du module des valeurs données sur (C). Il a montré que la solution en ce point est moindre en valeur absolue que

$$\frac{M}{J(i\sqrt{\lambda}\,\delta)}.$$

(¹) Le produit

$$e^{\theta}\sqrt{\frac{2\theta}{\pi}}\,K(i\theta)$$

tend vers 1 lorsque θ augmente indéfiniment.

(²) HADAMARD, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1902, p. 420.

Si donc δ n'est pas nul, c'est-à-dire si le point n'est pas sur le contour, cette valeur tend rapidement vers zéro : plus rapidement que n'importe quelle puissance positive de $\frac{1}{\lambda}$. C'est ce qu'on voit facilement en se reportant à l'expression asymptotique ([1]) de la fonction J.

Les considérations qui précèdent nous conduisent à un résultat analogue et nous permettent de démontrer la proposition suivante :

Soit $\varphi_\lambda(p)$ *la solution d'un problème de Dirichlet ou de Neumann relatif à l'équation* (2) : *si les données au contour* $H(s, \lambda)$ *répondent* (à partir d'une certaine valeur positive de λ) *à la condition*

$$|H(s, \lambda)| < A\lambda^\beta,$$

où A *et* β *sont deux constantes positives quelconques* ([2]), *le produit*

$$\lambda^\alpha \varphi_\lambda(p)$$

tend vers zéro lorsque λ *croît indéfiniment par valeurs positives et cela quel que soit le nombre positif* α (le point p étant strictement intérieur à l'aire donnée).

Pour le démontrer il suffit de remarquer que la solution sera donnée par l'une ou l'autre des deux intégrales suivantes :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} H(s, \lambda)\frac{dg}{dn}(s, p; \lambda)\, ds \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} H(s, \lambda)\gamma(s, p; \lambda)\, ds,$$

suivant qu'il s'agit du problème de Dirichlet ou de celui de Neumann ; celles-ci sont moindres en valeur absolue que

$$\frac{A\lambda^\beta}{2\pi}\int_{(C)} \frac{dg}{dn}(s, p; \lambda)\, ds \qquad \text{et} \qquad \frac{A\lambda^\beta}{2\pi}\int_{(C)} |\gamma(s, p; \lambda)|\, ds ;$$

or si le point p est strictement intérieur à l'aire, quels que soient les nombres positifs α et β, les produits

$$\lambda^{\alpha+\beta}\frac{dg}{dn}(s, p; \lambda) \qquad \text{et} \qquad \lambda^{\alpha+\beta}\gamma(s, p; \lambda)$$

([1]) Lorsque θ croît indéfiniment, $J(i\theta)$ et $\frac{e^\theta}{\sqrt{2\pi\theta}}$ sont des infiniment grands équivalents.

([2]) β pouvant *a fortiori* être nul ou négatif.

tendent vers zéro ([1]) lorsque λ croît indéfiniment par valeurs positives.

15. Il n'y a aucune difficulté à étendre les résultats précédents à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \lambda R(\xi, \eta) u, \tag{15}$$

où $R(\xi, \eta)$ représente une fonction positive dans toute l'aire Σ_0. Pour cela, nous considérerons encore notre cylindre (h, h') et la fonction de Green de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + R(\xi, \eta) \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0; \tag{16}$$

on peut lui appliquer le même mode de prolongement qu'à la la fonction de Green ordinaire et la développer comme elle en une série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n(m, p) \sin\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right)$$

avec

$$\Phi_n = \frac{2}{h' - h} \int_h^{h'} G(M, P) \sin\left(n\pi \frac{\zeta - h}{h' - h}\right) d\zeta;$$

on vérifie aisément que Φ_n satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \eta^2} = \frac{n^2 \pi^2}{(h' - h)^2} R(\xi, \eta) \Phi_n$$

([1]) Il y a une difficulté apparente pour le premier de ces produits, du fait que ce n'est pas g lui-même qui intervient, mais $\frac{dg}{dn}$: elle est facile à lever; on remarque que, puisque p est intérieur à l'aire Σ_0, la quantité $\frac{dG}{dn}$ (où G = fonction de Green du cylindre h, h') est développable sur la surface du cylindre en une série trigonométrique : celle-ci coïncide avec celle qu'on obtiendrait si l'on dérivait directement terme à terme le développement (10), suivant la normale. En reprenant pour $\frac{dG}{dn}$ le raisonnement fait pour G, on trouve que, quel que soit le nombre positif α, le produit

$$\lambda^\alpha \frac{dg}{dn}(s, p; \lambda)$$

tend bien vers zéro lorsque λ croît indéfiniment par valeurs positives.

et, comme précédemment, on trouve

$$G(M, P) = \frac{4}{h'-h}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right)\sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right) g\left[m, p; \frac{n^2\pi^2 R}{(h'-h)^2}\right]$$

en représentant par la notation

$$g(m, p; \lambda R)$$

la fonction de Green de l'équation (15) (il est bien entendu que g n'est pas une fonction, mais bien une fonctionnelle de R).

En reprenant tous les raisonnements indiqués précédemment, nous démontrerons que, quel que soit le nombre positif α, les produits

$$\lambda^\alpha g(m, p; \lambda R), \qquad \lambda^\alpha \gamma(m, p; \lambda R)$$

tendent vers zéro lorsque λ croît indéfiniment par valeurs positives, etc.

Il est à remarquer en outre que la méthode précédente conduit à des résultats absolument analogues pour l'équation à n variables indépendantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} = \lambda R(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) u \qquad (R > 0);$$

on passera par l'intermédiaire de la fonction de Green de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_n^2} + R\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0$$

pour un cylindre droit de l'espace à $(n+1)$ dimensions, ayant ses génératrices parallèles à l'axe $O\zeta$.

CHAPITRE II.

LE CYLINDRE INDÉFINI.

Théorèmes d'existence des fonctions de Green et de Neumann.

16. Pour faciliter l'exposition, nous rappellerons d'abord quelques propositions [1] qui nous seront utiles dans la suite :

---

[1] Je me borne à les énoncer, vu leur caractère élémentaire.

Lemme I. — Soit $\varphi(\lambda)$ *une fonction continue dans l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et telle que le produit* $\lambda^\alpha\varphi(\lambda)$ *tende vers zéro lorsque* λ *croît indéfiniment, quel que soit le nombre positif* α. *L'intégrale*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda)\cos\lambda z\, d\lambda$$

possède par rapport à z *des dérivées de tous les ordres : celles-ci se calculent par la règle ordinaire de dérivation sous le signe somme. En outre, la fonction* $f(z)$ *et toutes ses dérivées tendent vers zéro lorsque* z *croît indéfiniment.*

(Énoncé analogue en changeant $\cos\lambda z$ en $\sin\lambda z$.)

Lemme II. — *Soit* $\psi(\lambda)$ *une fonction continue dans l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et satisfaisant* (à partir d'une certaine valeur de λ) *à l'inégalité*

$$|\psi(\lambda)| < \frac{A}{\lambda^\alpha},$$

où A *est un nombre positif et* α *un nombre supérieur à* 1. *L'expression*

$$\frac{1}{\mu}\left[\psi\left(\frac{1}{\mu}\right) + \psi\left(\frac{2}{\mu}\right) + \ldots + \psi\left(\frac{n}{\mu}\right) + \ldots\right],$$

lorsque μ *croît indefiniment, a pour limite l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \psi(\lambda)\, d\lambda.$$

[On pourra prendre *a fortiori* pour fonction $\psi(\lambda)$ la fonction $\varphi(\lambda)$ remplissant les conditions du lemme I.]

17. La recherche de toute fonction de Green est un cas particulier du problème de Dirichlet, lequel consiste ici à déterminer une solution de (1) connaissant les valeurs qu'elle prend sur notre cylindre indéfini. On comprend immédiatement qu'une telle donnée serait insuffisante pour assurer l'*unicité* de cette solution : pour achever de déterminer celle-ci, il faut encore dire comment elle se comporte *à l'infini*.

C'est ce qui nous apparaîtra clairement en résolvant la question suivante :

Λ *ayant une valeur donnée quelconque, trouver toutes les solutions de* (1) *qui s'annulent sur le cylindre.*

Soit $F(x, y, z)$ une telle solution : dans toute section droite, elle remplit les conditions du théorème d'Hilbert-Schmidt (§ 4). Elle est donc représentable sous la forme

$$(\mathrm{F}) \qquad F(x, y, z) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(z) \varphi_i(x, y);$$

cette série est absolument convergente et, dans toute section droite, elle converge uniformément. En outre, la fonction F, étant analytique, admet par rapport à z des dérivées de tout ordre qui sont nulles elles-mêmes sur le cylindre : on pourra donc les développer en des séries analogues à la précédente. On aura par exemple

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i^{(1)}(z) \varphi_i(x, y);$$

ces séries successives s'obtiendront en dérivant terme à terme la série (F) : ainsi, je dis qu'on a

$$c_i^{(1)}(z) = c_i'(z);$$

en effet, nous avons

$$c_i^{(1)}(z) = \int\int_{\Sigma_z} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \varphi_i(x, y)\, dx\, dy,$$
$$c_i(z) = \int\int_{\Sigma_z} F(x, y, z) \varphi_i(x, y)\, dx\, dy,$$

et la première intégrale est manifestement la dérivée de la seconde.

En outre, puisque F est solution de (1), on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Lambda F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2};$$

par suite, le premier membre est développable en une série de la forme précédente, qui peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{+\infty} d_i(z) \varphi_i(x, y)$$

avec

$$d_i(z) = \Lambda c_i(z) - c_i''(z);$$

mais, d'autre part,

$$\begin{aligned} d_i(z) &= \int\int_{\Sigma_z} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \varphi_i(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int\int_{\Sigma_z} F \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}\right) dx\, dy = -\,\alpha_i^2\, c_i(z); \end{aligned}$$

donc les coefficients $c_i(z)$ vérifieront des équations différentielles (¹) de la forme

$$(\Lambda + \alpha_i^2) c_i(z) - c_i''(z) = 0. \tag{17}$$

Si $\Lambda + \alpha_i^2$ est positif, cette équation s'intègre par des exponentielles; si $\Lambda + \alpha_i^2$ est négatif, ses solutions sont des sinus et des cosinus.

Les solutions de l'équation (1) qui s'annulent sur le cylindre seront donc des combinaisons linéaires, en nombre fini ou infini de fonctions de l'une des formes suivantes :

$$\varphi_i(m) \begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left(\sqrt{\Lambda + \alpha_i^2}\, z\right) \qquad \text{pour } \Lambda + \alpha_i^2 > 0,$$

$$\varphi_i(m) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\sqrt{-\Lambda - \alpha_i^2}\, z\right) \qquad \text{pour } \Lambda + \alpha_i^2 < 0.$$

Si l'on a $\Lambda + \alpha_1^2 > 0$, il n'y aura que des solutions de la première forme.

Il est donc bien prouvé qu'une solution de (1) n'est pas déterminée lorsqu'on se borne à se donner les valeurs qu'elle prend sur le cylindre. Par contre, je dis qu'elle le sera si l'on donne, en outre, la manière dont elle se comporte à l'infini. C'est ce que nous montre le théorème suivant :

Toute solution $F(x, y, z)$ *de l'équation* (1) *qui s'annule sur le cylindre et qui tend uniformément vers zéro lorsque* $|z|$ *croît indéfiniment est identiquement nulle* (²).

(¹) On aurait pu écrire ces équations par dérivation directe; mais il importe ici de montrer que cette opération est légitime.

(²) On voit que cet énoncé n'exige aucune hypothèse sur la façon dont se comportent à l'infini les dérivées de $F(x, y, z)$.

En effet, F (x, y, z) sera représentable par le développement (F). Le coefficient $c_i(z)$ du terme général s'écrit

$$c_i(z) = \iint_{\Sigma_z} F(x, y, z)\, \varphi_i(x, y)\, dx\, dy,$$

c'est dire que la fonction $c_i(z)$ tend vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment, et comme elle doit être choisie parmi les solutions de l'équation (17), nous avons nécessairement, quel que soit l'entier i,

$$c_i(z) \equiv 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il importe de remarquer que cet énoncé est valable, *quel que soit* Λ.

18. *Nous dirons qu'une solution* F (x, y, z) *de* (1) *est régulière à l'infini si elle tend uniformément vers zéro lorsque* $|z|$ *croît indéfiniment.*

Le théorème précédent peut alors s'énoncer ainsi :

Une solution de (1), *sans singularité à l'intérieur du cylindre et régulière à l'infini, ne peut s'annuler sur sa surface sans s'annuler identiquement à l'intérieur.*

19. De l'analyse précédente, on peut tirer d'autres conséquences. Supposons que $\Lambda + \alpha_1^2$ soit positif et que F (x, y, z) soit encore une solution de (1) qui s'annule sur le cylindre (sans singularité à l'intérieur). Je dis que *si elle est bornée, elle est identiquement nulle*. En effet, si elle est bornée, il en sera de même de $c_i(z)$, mais nous avons

$$c_i(z) = a_i \operatorname{ch}\left(\sqrt{\Lambda + \alpha_i^2}\, z\right) + b_i \operatorname{sh}\left(\sqrt{\Lambda + \alpha_i^2}\, z\right);$$

il est nécessaire qu'on ait, quel que soit i,

$$a_i = b_i = 0;$$

en particulier, nous avons le théorème suivant :

Si une fonction harmonique à l'intérieur d'un cylindre s'annule sur sa surface et est bornée à l'intérieur, elle est identiquement nulle.

20. Toutes les considérations précédentes s'étendent aisément au cas où, au lieu de supposer connues les valeurs de la fonction sur le cylindre, on se donne celles de sa dérivée normale. En particulier, on peut énoncer, quel que soit Λ, le théorème suivant :

Toute solution de (1), *dépourvue de singularités à l'intérieur du cylindre, régulière à l'infini, et dont la dérivée normale s'annule sur la surface, est identiquement nulle.*

21. Soit P un point fixe quelconque intérieur au cylindre. *La fonction de Green* $G(M, P; \Lambda)$ *est par définition une solution de l'équation* (1), *qui devient infinie en* P *comme la solution fondamentale, qui s'annule sur le cylindre et qui est régulière à l'infini.*

D'après ce qui précède, il y a au plus une fonction répondant à cet ensemble de conditions.

Nous allons montrer que si l'on a, *au sens strict*, l'inégalité

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0,$$

cette fonction existe et a pour expression

$$G(M, P; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(m, p;\, \Lambda + \lambda^2)\cos\lambda(z-\zeta)\,d\lambda; \tag{18}$$

on vérifie aisément que le second membre (18) satisfait à toutes les conditions précédentes en l'écrivant sous la forme [1] (*cf.* § 13, Remarque) :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K\left(ir\sqrt{\Lambda+\lambda^2}\right)\cos\lambda(z-\zeta)\,d\lambda \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(m, p;\, \Lambda+\lambda^2)\cos\lambda(z-\zeta)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{18 bis}$$

Nous avons vu dans l'Introduction (§ 2) que la première de ces

---

[1] La formule (18) ne donne, en apparence, la valeur de G que lorsque nos deux points M et P ne sont pas sur une parallèle aux génératrices; en réalité, elle continue à donner sa valeur dans ce cas : il suffit d'écrire le second membre sous la forme (18 *bis*); la deuxième intégrale a un sens, quels que soient les deux points. Quant à la première, on peut la remplacer par sa valeur, facile à calculer.

intégrales représente toujours une solution fondamentale de (1), qui tend vers zéro à l'infini. De plus, nous pouvons (§ 13, Remarque), dans l'énoncé du lemme I, choisir pour fonction $\varphi(\lambda)$ la fonction $\omega(m, p; \lambda^2 + \Lambda)$; ceci nous permet de voir que la seconde intégrale est une solution de (1) qui est régulière à l'infini ([1]). Le second membre de (18) représente bien une solution de (1), qui est infinie en P comme la solution fondamentale, qui est régulière à l'infini, et qui manifestement s'annule sur le cylindre : c'est la fonction de Green cherchée.

Tout ceci suppose vérifiée, au sens strict, l'inégalité

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0,$$

sinon l'élément de notre intégrale deviendrait infini, et celle-ci divergerait.

22. Nous allons maintenant montrer que si l'on suppose

$$\Lambda + \alpha_1^2 \leqq 0,$$

la *fonction de Green n'existe pas;* autrement dit, il est impossible de trouver une fonction $G(M, P; \Lambda)$ répondant à l'ensemble des conditions précédemment indiquées. Nous allons montrer, en effet, qu'en admettant l'existence d'une telle fonction, on est conduit à une absurdité.

Admettons donc l'existence d'une fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$ relative au point P : par définition, c'est une solution de (1) qui s'annule sur le cylindre et devient infinie en P comme

$$\frac{\cos(\sqrt{-\Lambda}\,MP)}{MP}.$$

([1]) Le lemme I montre que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(m, p; \Lambda + \lambda^2) \cos\lambda(z - \zeta)\, d\lambda$$

tend vers zéro quand ζ croît indéfiniment; *l'uniformité* de cette convergence par rapport au point m résulte du fait suivant : Quand l'expression

$$\lambda^\alpha \omega(m, p; \lambda)$$

tend vers zéro (pour λ infini), sa convergence est uniforme par rapport au point m.

En outre, elle est régulière à l'infini ; je dis que sa dérivée par rapport à z sera, elle aussi, régulière à l'infini. En effet, considérons une section droite quelconque, *située au-dessus du point* P par exemple. Notre fonction de Green est représentable par un développement de la forme

$$\sum_{i=1}^{+\infty} c_i(\zeta)\,\varphi_i(\xi, \eta),$$

qui est valable au-dessus de cette section droite ; les coefficients $c_i(\zeta)$ vérifient des équations telles que (17). Comme G est régulière à l'infini, les $c_i(\zeta)$ sont nécessairement de la forme

$$c_i(\zeta) = a_i e^{-K_i\zeta},$$

où les K_i sont des nombres positifs.

Or la dérivée par rapport à ζ de la fonction G sera elle-même représentable par un tel développement, qui s'obtiendra (§ 17) en dérivant le précédent terme à terme. La quantité $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ est donc bien *régulière à l'infini.*

Cela posé, considérons les deux fonctions

$$U = G(M, P; \Lambda) \qquad \text{et} \qquad V = \varphi_1(m)\cos\left[\sqrt{-\Lambda - \alpha_1^2}\,(z - \zeta)\right];$$

ce sont deux solutions de (1). Nous allons écrire qu'on a

$$\int\!\!\int\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)dS = 0.$$

La surface d'intégration sera constituée :

1° Par une petite sphère de centre P;

2° Par la surface totale d'un cylindre droit, dont nous ferons ensuite éloigner indéfiniment les bases de part et d'autre.

Grâce à la remarque précédente, les portions de l'intégrale relatives à ces bases tendent vers zéro ; car V et $\frac{\partial V}{\partial \zeta}$ sont essentiellement bornées et les quantités U et $\frac{\partial U}{\partial \zeta}$ tendent vers zéro.

La portion de l'intégrale relative au cylindre est nulle.

Il faudrait donc que la portion de l'intégrale relative à notre petite sphère de centre P eût pour limite zéro. Or il est facile de la calculer et de voir qu'elle a pour limite

$$-4\pi\varphi_1(P).$$

Nous arrivons à une absurdité. Donc la fonction de Green n'existe pas.

Il est à remarquer que ce raisonnement subsiste pour $\Lambda = -\alpha_1^2$: il n'y a donc pas non plus de fonction de Green pour cette valeur.

23. P désignant toujours un point fixe intérieur au cylindre, nous appellerons *fonction de Neumann* $\Gamma(M, P; \Lambda)$ une solution de l'équation (1) qui devient infinie en P comme la solution fondamentale, qui a sa dérivée normale nulle sur le cylindre et qui est régulière à l'infini. En raisonnant comme nous venons de le faire pour la fonction de Green, nous verrons que la *fonction de Neumann n'existe que si* Λ *est positif et non nul* [il faut, en effet, remplacer le nombre $-\alpha_1^2$, premier terme de la suite (α), par le nombre 0, premier terme de la suite (β)]. Dans cette hypothèse, elle a pour expression

$$(19) \qquad \Gamma(M, P; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(m, p; \Lambda + \lambda^2)\cos\lambda(z-\zeta)\,d\lambda;$$

cette formule se démontre comme (18).

24. La question d'existence de nos fonctions de Green et de Neumann est donc maintenant complètement résolue. Quand ces fonctions existent, elles nous sont données par les formules (18) et (19). Comme on pouvait s'y attendre, elles ne dépendent des cotes z et ζ de nos deux points M et P que par leur différence $z-\zeta$, et, en outre, sur ces formules, la symétrie par rapport aux points M et P apparaît immédiatement.

Montrons enfin que ces expressions (18) ou (19) fournissent une vérification très simple du fait suivant :

Soit un cylindre droit (h, h') *dont les sections limites* Σ_h *et* $\Sigma_{h'}$ *s'éloignent indéfiniment de part et d'autre. La fonction de Green* (ou de Neumann) *de ce cylindre a une limite qui est la fonction de Green* (ou de Neumann) *du cylindre indéfini.*

Bien entendu, on suppose remplie, au sens strict, l'inégalité

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0,$$

en supposant, par exemple, qu'il s'agisse de la fonction de Green (il faudrait la remplacer par $\Lambda > 0$ s'il s'agissait de la fonction de Neumann). Plaçons-nous dans cette hypothèse. Quel que soit le cylindre droit considéré, Λ n'est jamais une constante caractéristique (§ 10) et nous pourrons écrire (§ 9)

$$\begin{aligned} &G_{(h,h')}(M, P; \Lambda) \\ &= \frac{4}{h'-h}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\pi\frac{\zeta-h}{h'-h}\right) \times \sin\left(n\pi\frac{z-h}{h'-h}\right) g\left[m, p; \Lambda + \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right], \end{aligned}$$

en réservant la notation $G_{(h,h')}$ pour représenter la fonction de Green de notre cylindre droit; le second membre peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{2}{h'-h}\Bigg\{ &\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(n\pi\frac{\zeta-z}{h'-h}\right) g\left[m, p; \Lambda + \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right] \\ &-\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(n\pi\frac{\zeta+z-2h}{h'-h}\right) g\left[m, p; \Lambda + \frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Servons-nous du lemme II en prenant

$$\mu = \frac{h'-h}{\pi}, \qquad \psi(\lambda) = g(m, p; \Lambda + \lambda^2)\cos\lambda(\zeta - z);$$

nous voyons que le premier de nos deux termes a pour limite l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(m, p; \Lambda + \lambda^2)\cos\lambda(\zeta - z)\, d\lambda;$$

c'est précisément la fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$ du cylindre indéfini.

Il ne nous reste donc qu'à montrer que zéro est la limite du second terme : pour cela, il suffit de vérifier qu'à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre A tel que les inégalités

$$h' > A, \qquad -h > A$$

aient pour conséquence de rendre le module de ce second terme moindre que ε. Or ce module est évidemment moindre que

$$\left|\frac{2}{h'-h}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(n\pi\frac{\zeta+z-2h}{h'-h}\right)g\left[m,p;\Lambda+\frac{n^2\pi^2}{(h'-h)^2}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}g(m,p;\Lambda+\lambda^2)\cos\lambda(\zeta+z-2h)\,d\lambda\right|$$
$$+\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{+\infty}g(m,p;\Lambda+\lambda^2)\cos\lambda(\zeta+z-2h)\,d\lambda\right|;$$

une seconde application du lemme II nous montre que la première ligne a pour limite zéro quand h' croît indéfiniment, et cela quel que soit le nombre négatif h. C'est dire que nous pourrons toujours prendre h' assez grand pour la rendre inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, nous avons vu que l'intégrale écrite à la seconde ligne tend vers zéro quand $-h$ augmente indéfiniment. Nous pourrons donc prendre h assez grand pour la rendre elle-même moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ et le théorème est démontré.

CHAPITRE III.

LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE FONCTIONS FONDAMENTALES.

25. Nous avons obtenu, au moyen des formules (18) et (19), une première expression des fonctions $G(M,P;\Lambda)$ et $\Gamma(M,P;\Lambda)$, sous la forme d'une intégrale définie, où n'interviennent que des éléments de la section droite; ainsi, on saura calculer les fonctions G et Γ si l'on connaît les expressions des fonctions $g(m,p;\lambda)$ et $\gamma(m,p;\lambda)$, quelle que soit la valeur du paramètre λ.

Nous allons maintenant donner une autre expression des mêmes fonctions G et Γ. Celle-ci se présente, non plus sous forme d'intégrale, mais sous la forme d'une série par rapport aux fonctions fondamentales de la section droite, ces fonctions étant celles de la suite (φ) s'il s'agit de G, celles de la suite (ψ) s'il s'agit de Γ.

Un tel développement est valable toutes les fois que les deux points M et P ne sont pas dans une même section droite.

26. Prenons par exemple la fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$ relative au point P. Dans toute section droite qui ne passe pas par ce point, cette fonction remplit les conditions du théorème d'Hilbert-Schmidt. Donc, pour $z - \zeta \neq 0$, nous aurons un développement de la forme

$$\begin{aligned} G(M, P; \Lambda) = {} & \varphi_1(m) f_1(p; |\zeta - z|; \Lambda) + \ldots \\ & + \varphi_n(m) f_n(p; |\zeta - z|; \Lambda) + \ldots; \end{aligned}$$

la valeur du coefficient f_n est donnée par

$$f_n(p; |\zeta - z|; \Lambda) = \int\int_{\Sigma_\zeta} \varphi_n(M) G(M, P; \Lambda)\, d\Sigma_M.$$

Pour calculer cette intégrale, on s'appuie sur les propriétés des potentiels de simple couche généralisés : la notion de potentiel de simple couche, classique pour l'équation de Laplace, s'étend d'elle-même [1] à l'équation (1) où Λ a une valeur quelconque. On voit facilement que f_n ne diffère d'un tel potentiel étendu à Σ_ζ que par un terme régulier. Si donc nous considérons f_n comme une fonction du point P, c'est une solution de l'équation (1) qui s'annule sur le cylindre, qui est régulière à l'infini, et dont la dérivée normale le long du plan Σ_h prend les valeurs $-2\pi\varphi_n$.

Nous connaissons une fonction remplissant toutes les conditions précédentes; c'est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_n^2 + \Lambda}} e^{-\sqrt{\alpha_n^2 + \Lambda}\,|\zeta - z|} \varphi_n(p)$$

et nous avons vu (§ 17) qu'il ne peut y en avoir plus d'une. Nous avons donc

$$f_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_n^2 + \Lambda}} e^{-\sqrt{\alpha_n^2 + \Lambda}\,|\zeta - z|} \varphi_n(p).$$

D'où le développement cherché

$$G(M, P; \Lambda) = 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{\Lambda + \alpha_n^2}\,|\zeta - z|} \frac{\varphi_n(m)\varphi_n(p)}{\sqrt{\Lambda + \alpha_n^2}}. \tag{20}$$

---

(1) *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. Picard, *Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann* (*Rendiconti di Palermo*, 1er semestre, 1914).

Naturellement, ce calcul n'est valable que si toutes les quantités $\Lambda + \alpha_n^2$ sont positives; il en est bien ainsi, puisque, pour l'existence même de la fonction de Green, il nous faut supposer

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0.$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on démontrera de même que l'on a

$$(21)\quad \Gamma(M, P; \Lambda)$$
$$= \frac{2\pi}{\Sigma} \frac{e^{-\sqrt{\Lambda}|\zeta - z|}}{\sqrt{\Lambda}} + 2\pi \sum_{n=1}^{-\infty} e^{-\sqrt{\Lambda + \beta_n^2}|\zeta - z|} \frac{\psi_n(m)\psi_n(p)}{\sqrt{\Lambda + \beta_n^2}},$$

où l'on devra supposer que Λ est positif.

Nous aurons ainsi une nouvelle manière de calculer G et Γ au moyen d'éléments de la section droite.

27. De la forme des développements qui précèdent résulte immédiatement la conséquence suivante :

Les fonctions $G(M, P; \Lambda)$ *et* $\Gamma(M, P; \Lambda)$ *ne sont pas méromorphes en* Λ.

Considérons par exemple $G(M, P; \Lambda)$. Nous avons vu (§ 4) que α_2^2 est différent de α_1^2. Dans le voisinage de la valeur $\Lambda = -\alpha_1^2$, la série

$$(\sigma)\qquad \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-\sqrt{\Lambda + \alpha_n^2}|\zeta - z|} \frac{\varphi_n(m)\varphi_n(p)}{\sqrt{\Lambda + \alpha_n^2}}$$

représente, grâce à ce fait, une fonction holomorphe de Λ : c'est ce que nous allons montrer dans un instant. Ce point étant admis, il est évident que G ne peut être méromorphe en Λ, puisque dans le domaine du point $\Lambda = -\alpha_1^2$ elle se présente comme la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction non uniforme.

Considérons la série précédente et supposons que nous ayons, au sens strict,

$$\Lambda + \alpha_2^2 > 0;$$

tout d'abord, elle est *absolument convergente* (1) : en effet,

(1) Cela n'est nullement évident si Λ est compris entre $-\alpha_2^2$ et $-\alpha_1^2$.

soit μ^2 un nombre positif quelconque; la série

$$(\sigma') \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-\sqrt{\mu^2+\alpha_n^2}\,|\zeta - z|} \frac{\varphi_n(m)\,\varphi_n(p)}{\sqrt{\mu^2+\alpha_n^2}}$$

est absolument convergente; or, le rapport des termes généraux de nos deux séries (σ) et (σ') a pour limite 1 quand n croît indéfiniment. La convergence absolue de (σ') entraîne donc celle de (σ).

En outre, il résulte de la forme même de la série σ que *sa convergence est uniforme* dans tout intervalle fini dont la limite inférieure est supérieure à $-\alpha_2^2$ (car la fonction $\frac{e^{-u}}{u}$, lorsque u est positif, est décroissante).

Il existe donc un intervalle fini entourant le point $-\alpha_1^2$, dans lequel tous les termes de la série (σ) sont des fonctions holomorphes de Λ et où la convergence est uniforme. La série (σ) représente donc elle-même une fonction holomorphe autour de $(-\alpha_1^2)$.

Il suffit de répéter ce raisonnement pour Γ, en remplaçant $-\alpha_1^2$ par o.

28. Nous allons maintenant étudier comment les fonctions G et Γ se comportent à l'infini. Par définition même, elles tendent vers zéro lorsque, P restant fixe, M s'éloigne indéfiniment dans le cylindre. Les formules (18) et (19) montrent immédiatement qu'il en est de même de leurs dérivées [car, dans l'énoncé du lemme I (§ **16**), on peut prendre pour $\varphi(\lambda)$ une des fonctions g ou γ]. Nous allons obtenir des renseignements beaucoup plus précis en recourant aux développements (20) et (21) qui, comme nous l'avons vu (§ **17**), sont indéfiniment dérivables terme à terme.

La première constante caractéristique $-\alpha_1^2$ étant simple (§ **4**), nous pourrons écrire le développement (20) sous la forme

$$\begin{aligned} G(M, P; \Lambda) = {} & 2\pi \frac{e^{-\sqrt{\alpha_1^2+\Lambda}\,|\zeta - z|}}{\sqrt{\alpha_1^2+\Lambda}} \varphi_1(m)\,\varphi_1(p) \\ & + 2\pi \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\alpha_n^2+\Lambda}\,|\zeta - z|}}{\sqrt{\alpha_n^2+\Lambda}} \varphi_n(m)\,\varphi_n(p); \end{aligned}$$

lorsque $|\zeta - z|$ augmente indéfiniment, la partie principale de cette série est évidemment son premier terme.

Ainsi, P restant fixe et M s'éloignant indéfiniment, la fonction $G(M, P; \Lambda)$ est un infiniment petit équivalent à

$$2\pi \frac{e^{-\sqrt{\alpha_1^2+\Lambda}\,|\zeta - z|}}{\sqrt{\alpha_1^2+\Lambda}} \varphi_1(m)\,\varphi_1(p).$$

Telle est l'expression asymptotique de la fonction de Green. Il est d'ailleurs à remarquer que les dérivées successives de cette expression par rapport à ζ fournissent, dans les mêmes conditions, des expressions asymptotiques des dérivées de G par rapport à ζ.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Lorsque, P *étant fixe*, M *s'éloigne indéfiniment*, G *et ses dérivées par rapport à* ζ *tendent vers zéro comme l'exponentielle*

$$e^{-\sqrt{\alpha_1^2+\Lambda}\,|\zeta - z|}.$$

Pour la fonction de Neumann $\Gamma(M, P; \Lambda)$ (Λ positif), nous trouverons un résultat analogue en nous adressant au développement (21). Ici, zéro est le premier terme de la suite (β) et la fonction fondamentale correspondante se réduit à la constante $\frac{1}{\sqrt{\Sigma}}$. L'expression asymptotique de $\Gamma(M, P; \Lambda)$ se réduit donc à

$$\frac{2\pi}{\Sigma}\,\frac{e^{-\sqrt{\Lambda}|\zeta - z|}}{\sqrt{\Lambda}};$$

elle ne dépend pas de la position dans Σ_0 *des points* m *et* p, *projections de* M *et de* P.

Ainsi se trouve généralisé le résultat de M. Paul Lévy, concernant l'expression asymptotique de la fonction de Green ordinaire du cylindre de révolution (*voir* Introduction, § 5) : M. Paul Lévy l'avait obtenu en s'appuyant sur ce fait que les deux fonctions

$$G(M, P) \quad \text{et} \quad J(\lambda r)e^{-\lambda|\zeta - z|},$$

où λ représente la plus petite racine de l'équation

$$J(\lambda \mathfrak{R}) = 0,$$

sont toutes deux *positives à l'intérieur du cylindre :* il en déduisait que leur rapport a une limite quand $|\zeta - z|$ croît indéfiniment.

29. La méthode précédente ne se borne pas à nous fournir des expressions asymptotiques pour les fonctions de Green et de Neumann.

Considérons une solution quelconque $F(\xi, \eta, \zeta)$ de l'équation (1), qui s'annule sur le cylindre pour

$$\zeta \geqq \zeta_0.$$

Supposons que cette solution soit *régulière à l'infini.*

Il nous sera alors très facile d'écrire son expression asymptotique; en effet cette solution est représentable par un développement en série de fonctions fondamentales, qui sera de la forme (§ 17)

$$\Sigma c_i e^{-K_i(\zeta-\zeta_0)} \varphi_i(\xi, \eta),$$

où tous les nombres

$$K_i = \sqrt{\Lambda + \alpha_i^2}$$

sont positifs.

Ici nous sommes naturellement conduits à distinguer deux cas :

1° Si $\Lambda + \alpha_1^2$ est positif, le premier terme du développement sera en général

$$c_1 e^{-\sqrt{\Lambda+\alpha_1^2}(\zeta-\zeta_0)} \varphi_1(\xi, \eta);$$

2° Si $\Lambda + \alpha_1^2$ est négatif, soit $-\alpha_p^2$ le premier terme de la suite (α) tel que l'on ait, au sens strict,

$$\Lambda + \alpha_p^2 > 0,$$

le premier terme du développement sera en général

$$c_p e^{-\sqrt{\Lambda+\alpha_p^2}(\zeta-\zeta_0)} \varphi_p(\xi, \eta);$$

il s'ensuit immédiatement que dans la section droite Σ_{ζ_0} et dans toute section située au-dessus, nous aurons nécessairement

$$\int\int_{\Sigma_\zeta} F(\xi, \eta, \zeta)\, \varphi_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

En tout cas, du moment que nous raisonnerons sur une solution parfaitement déterminée et régulière à l'infini, nous aurons ainsi, par un développement en série de fonctions fondamentales, son expression asymptotique, sachant qu'elle s'annule sur le cylindre pour $\zeta \geqq \zeta_0$. Il en serait de même si cette dernière condition était remplacée par la suivante : pour $\zeta \geqq \zeta_0$, sa dérivée normale s'annule sur le cylindre.

CHAPITRE IV.

RELATIONS ENTRE LA FONCTION DE GREEN OU DE NEUMANN DU CYLINDRE ET CELLE DE LA SECTION DROITE.

30. Nous allons maintenant étudier quelques propriétés des fonctions G (M, P; Λ) et Γ (M, P; Λ) qui découlent de la forme simple du domaine que nous avons choisi. Reprenons les formules

$$(18) \qquad G(M, P; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(m, p; \Lambda + \lambda^2) \cos\lambda(z-\zeta)\, d\lambda,$$

$$(19) \qquad \Gamma(M, P; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(m, p; \Lambda + \lambda^2) \cos\lambda(z-\zeta)\, d\lambda$$

(dans la première, nous supposons $\Lambda + \alpha_1^2$ positif et dans la seconde Λ positif). Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, les cotes ζ et z de nos deux points M et P n'y interviennent que par leur différence. Il en résulte qu'on a

$$\frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} = 0;$$

on en déduit qu'on a

$$\Delta_M G(M, P; \Lambda) = \Delta_P G(M, P; \Lambda),$$
$$\Delta_M \Gamma(M, P; \Lambda) = \Delta_P \Gamma(M, P; \Lambda),$$

en posant

$$\Delta_M = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \qquad \Delta_P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

On déduit des équations (18) et (19) les suivantes :

$$2\, g(m, p; \Lambda + \lambda^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, P; \Lambda) \cos\lambda(z-\zeta)\, d\zeta,$$

$$2\, \gamma(m, p; \Lambda + \lambda^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(M, P; \Lambda) \cos\lambda(z-\zeta)\, d\zeta,$$

qui pour $\lambda = 0$ se réduisent à

$$2\,g(m, p; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, P; \Lambda)\, d\zeta,$$

$$2\,\gamma(m, p; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(M, P; \Lambda)\, d\zeta;$$

ces formules constituent une relation (¹) entre la fonction de Green ou de Neumann du cylindre et celle de sa section droite : c'est cette relation (*voir* Introduction) que M. Paul Lévy a signalée dans son Mémoire.

31. Nous allons maintenant développer des considérations qui vont nous conduire à une seconde relation, de forme toute différente entre les mêmes fonctions. Pour plus de simplicité dans l'écriture, nous allons raisonner sur l'équation de Laplace et sur la fonction de Green ordinaire. Les résultats obtenus se généraliseront ensuite aisément à G (M, P; Λ) quand Λ a une valeur quelconque supérieure à $-\alpha_1^2$.

Considérons la section droite (Σ_0) et le demi-cylindre (σ_+). Nous appellerons (H) toute fonction harmonique jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle s'annule sur le demi-cylindre;

2° Elle est régulière à l'infini;

3° Elle reste finie au voisinage du contour (C) de la section droite (Σ_0).

Nous commencerons par traiter deux problèmes préliminaires.

Posons-nous d'abord le problème suivant :

Problème I. — *Déterminer celle des fonctions* (H) *qui prend sur* (Σ_0) *des valeurs données* U (p).

Ce problème se résout immédiatement, car nous en connaissons la fonction de Green. En désignant par P′ le symétrique de P par rapport à Σ_0, celle-ci sera

$$G(M, P) - G(M, P');$$

(¹) Nous avons indiqué plus haut (§ 12) une relation de même forme pour la fonction de Neumann d'un cylindre limité.

si donc il existe une solution du problème, on démontre très simplement qu'elle est donnée par la formule

$$U(P) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\Sigma_0)} U(m) \frac{\partial G}{\partial \zeta}(m, P)\, d\Sigma_m.$$

Réciproquement, cette intégrale fournit bien une solution du problème proposé : en effet, elle représente une fonction harmonique du point P, s'annulant sur le cylindre, régulière à l'infini, et restant finie au voisinage du contour (C). Il est alors facile, à l'aide des propriétés classiques des potentiels de double couche, de constater qu'elle prend bien sur (Σ_0) les valeurs demandées. On peut encore écrire

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\, G(m, P)\, d\Sigma_m.$$

La dérivée de cette fonction par rapport à z nous sera donnée par

$$\frac{\partial U(P)}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\, G(m, P)\, d\Sigma_m$$

ou

$$\frac{\partial U(P)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \Delta_P \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\, G(m, P)\, d\Sigma_m;$$

tant que P n'est pas dans (Σ_0), le second membre peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi} \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\, \Delta_P\, G(m, P)\, d\Sigma_m \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\, \Delta_m\, G(m, P)\, d\Sigma_m;$$

en transformant cette dernière intégrale par la formule de Green, il nous vient

$$(22) \qquad \frac{\partial U(P)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\Sigma_0)} \Delta U(m)\, G(m, P)\, d\Sigma_m - \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} U(c) \frac{dG}{dn}(c, P)\, ds,$$

c désignant un point quelconque du contour de Σ_0. Chacune de ces intégrales est continue pour $z = 0$: donc le long de (Σ_0) la dérivée normale $V(p)$ de la fonction U sera donnée par

$$(23) \qquad V(p) = \frac{1}{2\pi} \Delta \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\, G(m, p)\, d\Sigma_m$$

ou

$$(23\ bis)\qquad V(p) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} \Delta U(m)\, G(m,p)\, d\Sigma_m - \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U(c)\frac{dG}{dn}(c,p)\, ds.$$

Le passage de la première de ces expressions à la seconde constitue une formule de différentiation que nous aurons l'occasion d'utiliser dans la suite.

Le second terme de (22) [ou celui de (23 *bis*)] disparaît lorsqu'on a $U(c) = 0$ en tout point du contour (C) de l'aire (Σ_0) : lorsqu'il en est ainsi, les valeurs prises par la fonction harmonique considérée sur la frontière constituée par le demi-cylindre et la portion de plan (Σ_0) sont continues au voisinage du contour (C); on voit alors que $\frac{\partial U}{\partial z}$ restera finie au voisinage de ce contour. Au contraire, si l'on a $U(c) \neq 0$, la distribution des valeurs de notre fonction, le long de la frontière précédente, présente, sur le contour (C), une discontinuité : considérons alors, dans la formule (22), le deuxième terme de $\frac{\partial U}{\partial z}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} U(c)\frac{dG}{dn}(c, P)\, ds.$$

Il est facile de voir que ce terme devient infini quand P tend vers un point du contour (C). Supposons par exemple que P tende vers un point p_0 du contour (C) en restant dans le plan (Σ_0) et en outre que le contour (C) soit rectiligne dans le voisinage du point p_0 (*fig.* 1), le long de la portion ab par exemple. Lorsque p est voisin de p_0, en appelant p' le symétrique de p par rapport à la droite ab, la fonction de Green ne diffère de

$$\frac{1}{mp} - \frac{1}{mp'}$$

que par un terme holomorphe. De sorte que l'intégrale précédente se comportera alors comme

$$-\frac{1}{\pi}\int_{ab} U(c)\frac{\cos\varphi}{\overline{cp}^2}\, ds,$$

laquelle devient logarithmiquement infinie lorsque p tend vers p_0.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

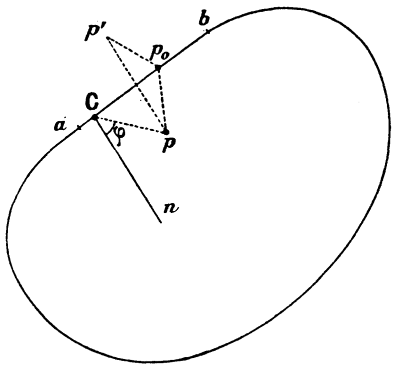
Étant donnée une fonction de l'ensemble (H), *pour que sa dérivée par rapport à z appartienne au même ensemble, il faut et il suffit que la fonction considérée s'annule sur le contour* (C).

Nous avons eu dans ce qui précède à considérer des intégrales de la forme

$$\int_{(C)} U(c)\frac{dG}{dn}(c, P)\,ds,$$

quelle que soit la fonction $U(c)$ sur le contour (C). Cette intégrale représente une fonction du point P, qui est régulière à

Fig. 1.



l'infini, s'annule sur le demi-cylindre, et enfin qui possède en tout point de (Σ_0) une dérivée normale nulle. En dépit de ce concours de circonstances, l'intégrale précédente n'est pas identiquement nulle, puisqu'elle devient infinie au voisinage du contour (C).

De même l'intégrale

$$\int_{C} U(c)\frac{\partial}{\partial z}\frac{dG}{dn}(c, P)\,ds$$

nous fournit un exemple de fonction harmonique s'annulant sur la surface totale de notre demi-cylindre et régulière à l'infini, sans être identiquement nulle, grâce à cette circonstance qu'elle peut devenir infinie au voisinage de (C).

Abordons maintenant, relativement aux fonctions (H), un second problème :

PROBLÈME II. — *Déterminer celle des fonctions* (H) *dont la dérivée normale, le long de* (Σ_0), *prend des valeurs données* $V(p)$.

Soit $V(p)$ une fonction régulière dans l'aire (Σ_0) : il résulte des propriétés élémentaires des potentiels de simple couche qu'il existe une solution et une seule du problème donnée par

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\,G(m, P)\,d\Sigma_m. \tag{24}$$

32. Ces deux problèmes préliminaires étant résolus, nous arrivons à notre seconde relation entre la fonction de Green du cylindre et celle de sa section droite.

Nous supposerons que les points M et P soient dans une même section droite ; dans ces conditions, nous pourrons toujours, sans diminuer la généralité, les supposer confondus aux deux points m et p de la section (Σ_0).

Nous allons démontrer qu'on a

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} G(m, q)\,G(q, p)\,d\Sigma_q = g(m, p). \tag{25}$$

Pour cela, proposons-nous le problème I, en prenant pour distribution sur (Σ_0)

$$U(p) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\,G(m, p)\,d\Sigma_m,$$

où $V(m)$ sera une fonction quelconque, régulière dans (Σ_0) et finie sur (C). La solution de ce problème sera donnée par

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\,G(m, P)\,d\Sigma_m.$$

D'après ce qui a été vu, relativement au problème II, la dérivée normale de cette fonction le long de (Σ_0) est précisément égale à V. Or la formule (23) nous apprend que cette dérivée normale est encore égale à

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\int\int U(q)\,G(q, p)\,d\Sigma_q;$$

en remplaçant U par son expression au moyen de V, nous obtenons l'identité

$$4\pi^2 V(p) + \Delta \int\int_{(\Sigma_0)} V(m) \left[\int\int_{(\Sigma_0)} G(m, q)\, G(q, p)\, d\Sigma_q \right] d\Sigma_m = 0,$$

qui a lieu quelle que soit la fonction V.

Il est très facile de transformer cette identité; utilisons pour cela la proposition suivante [1] :

Soient p un point fixe, m un point variable intérieurs à l'aire (Σ_0). *La différence*

$$\int\int_{\Sigma_0} \frac{1}{mq} \frac{1}{pq} d\Sigma_q - 2\pi \log \frac{1}{mp}$$

est une fonction holomorphe des coordonnées du point m.

Écrivons alors

$$G(m, q) = \frac{1}{mq} - \Omega(m, q),$$

$$G(q, p) = \frac{1}{pq} - \Omega(q, p);$$

on voit immédiatement que si l'on considère p comme fixe et m comme variable, la différence

$$\frac{1}{2\pi} \int\int G(m, q)\, G(q, p)\, d\Sigma_q - \log \frac{1}{mp}$$

sera une fonction holomorphe des coordonnées de m.

Cela nous permet d'effectuer, dans l'identité précédente, la différentiation indiquée, en remarquant qu'on a, d'après la formule de Poisson,

$$\Delta \int\int V(m) \log \frac{1}{mp} d\Sigma_m = -2\pi V(p);$$

les termes en dehors du signe *somme* disparaîtront et il nous res-

---

(1) *Voir* FRÉCHET et HEYWOOD, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique.* Note de M. Hadamard sur l'itération des noyaux infinis.

tera seulement

$$\iint_{(\Sigma_0)} V(m)\,\Delta \iint_{(\Sigma_0} G(m, q)\, G(q, p)\, d\Sigma_q\, d\Sigma_m = 0;$$

pour qu'une telle égalité ait lieu, quelle que soit la fonction V, il faut et il suffit qu'on ait

$$\Delta \iint_{(\Sigma_0)} G(m,\ q)\, G(q,\ p)\, d\Sigma_q = 0.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Sigma_0)} G(m,\ q)\, G(q, p)\, d\Sigma_q$$

sera donc une fonction harmonique plane des coordonnées du point m quand on considère p comme fixe. Cette fonction s'annule sur (C) et devient infinie en p comme $\log \frac{1}{mp}$. C'est donc la fonction de Green de la section droite, et la formule (25) est démontrée.

33. On peut donner de la formule (25) une démonstration un peu différente, qui va nous conduire en même temps à un théorème d'addition de la fonction de Green lorsque l'on considère celle-ci comme fonction de $z - \zeta$.

Pour cela, proposons-nous de calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(\Sigma_0)} G(M,\ q)\, G(q,\ P)\, d\Sigma_q,$$

lorsque nous ne supposons plus forcément les points M et P dans (Σ_0). Nous pouvons toujours supposer que ces deux points soient de part et d'autre de (Σ_0), car, s'il en était autrement, il suffirait de remplacer l'un d'eux par son symétrique par rapport au plan (Σ_0), ce qui ne change pas la valeur de notre intégrale. Supposons par exemple la cote z de P positive et la cote ζ de M négative. Le point M étant fixe et différent d'un point du plan (Σ_0), notre intégrale définit une fonction du point P qui appartient à l'ensemble (H); la dérivée normale de celle-ci le long de (Σ_0) est

$$V(p) = -\,G(p,\ M);$$

d'autre part, il est immédiat que la fonction (H) qui satisfait à cette condition a pour valeur

$$\int_{z}^{+\infty} G(P, M)\, dz;$$

égalons cette valeur à celle que nous fournit la formule de résolution du problème II. Il nous vient

$$(26)\qquad 2\pi \int_{z}^{+\infty} G(P, M)\, dz = \int\int_{(\Sigma_0)} G(M, q)\, G(q, P)\, d\Sigma_q.$$

L'intégrale du second membre est une fonction continue des cotes z et ζ lorsque celles-ci tendent vers zéro, la première par valeurs positives et la seconde par valeurs négatives.

Quant au premier membre, pour $z = \zeta = 0$, il se réduit à

$$2\pi \int_{0}^{+\infty} G(P, m)\, dz$$

ou, d'après la relation de M. Paul Lévy, à

$$2\pi\, g(m, p).$$

Nous retrouvons donc bien la formule (25) comme cas particulier de la relation (26) qui peut encore s'écrire

$$(27)\qquad G(M, P) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\int_{(\Sigma_0)} G(M, q)\, G(q, P)\, d\Sigma_q$$

dans le premier membre, la différence des cotes de nos deux points M et P est $|z| + |\zeta|$. Dans le deuxième, la différence des cotes des points M et q est $|\zeta|$, celle des points P et q est $|z|$. La formule (27) constitue donc un théorème d'addition par rapport à la différence des cotes; ce théorème est peu commode, il est vrai, puisqu'il revêt la forme intégro-différentielle.

34. Proposons-nous de résoudre l'équation intégrale de première espèce

$$(28)\qquad F(p) = -\frac{1}{2\pi} \int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\, G(m, p)\, d\Sigma_m.$$

Tout d'abord elle ne peut avoir plus d'une solution. Autrement dit, $G(m, p)$ est un noyau fermé; cela résulte immédiatement du fait suivant : si l'on itère ce noyau, on trouve, nous l'avons vu, la fonction de Green de la section droite, qui est elle-même un noyau fermé.

L'équation (28) se résout alors immédiatement en remarquant que V doit être la dérivée normale le long de (Σ_0) de la fonction (H) qui prend sur cette section les valeurs F, de sorte que nous aurons

$$V(p) = \frac{1}{2\pi}\Delta\int\int_{(\Sigma_0)} F(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m.$$

On aurait encore obtenu ce résultat en multipliant les deux membres de (28) par la quantité

$$G(p,q)\,d\Sigma_p$$

et en intégrant dans (Σ_0) ; il suffit alors de se servir de la formule (25) et d'appliquer la formule classique de Poisson.

35. Étudions de même l'équation fonctionnelle

$$F(p) = \frac{1}{2\pi}\Delta\int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m. \tag{29}$$

Nous en avons immédiatement une solution qui est

$$U(p) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} F(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m;$$

en effet, F doit être la distribution le long de (Σ_0) des valeurs de la dérivée normale de celle des fonctions (H) qui prend au point p de cette section la valeur $U(p)$.

Cette solution n'est d'ailleurs pas la seule. Considérons en effet l'équation homogène

$$\Delta\int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m = 0; \tag{30}$$

il est facile d'en indiquer la solution générale quand on se borne à considérer les fonctions régulières en tout point intérieur (au sens strict) à l'aire (Σ_0) : soit $\varphi(p)$ une fonction harmonique quelconque dans l'aire (Σ_0) ; nous aurons

$$\int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m = 2\pi\,\varphi(p),$$

d'où nous déduisons [en supposant que φ n'a pas de singularités à l'intérieur de (Σ_0)]

$$U(p) = -\frac{1}{2\pi}\Delta\int\int_{(\Sigma_0)}\varphi(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m$$

ou, d'après ce qu'on a vu au paragraphe **31** [formules (23), (23 *bis*)],

$$U(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\varphi(c)\frac{dG}{dn}(c,P)\,ds,$$

la distribution φ le long du contour (C) correspondant à une fonction continue arbitraire.

Toutes les solutions de l'équation (29) régulières en un point intérieur (au sens strict) à (Σ_0) sont donc données par

$$U(p) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)}F(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\varphi(c)\,\frac{dG}{dn}(c,P)\,ds,$$

mais il faut bien remarquer qu'une seule de ces solutions est bornée dans notre aire, c'est celle indiquée précédemment qui correspond à $\varphi = 0$.

Remarque. — Si l'on prend pour $\varphi(p)$ une fonction harmonique présentant, dans l'aire (Σ_0), des points singuliers, on obtiendra des solutions singulières de (30); ainsi soit a un point quelconque intérieur à (Σ_0). Si nous prenons

$$\varphi(p) = g(a,p),$$

il correspondra la solution

$$U(p) = G(a,p).$$

36. Considérons l'opérateur linéaire défini par

$$\Omega[U] = \frac{1}{2\pi}\Delta\int\int_{(\Sigma_0)}U(m)\,G(m,p)\,d\Sigma_m;$$

nous en connaissons la signification : il nous fournit les valeurs prises, le long de (Σ_0), par la dérivée normale de celle des fonctions (H) qui prend au point p de (Σ_0) la valeur $U(p)$.

Je dis qu'on a

$$\Omega[\Omega[U]] = -\Delta U.$$

Tout d'abord, si l'on a $U(c)=0$, le fait est évident, car la dérivée $\frac{\partial U}{\partial z}$ de la fonction $U(P)$ de l'ensemble (H) qui prend sur (Σ_0) les valeurs $U(p)$ appartient elle-même à l'ensemble (H); si donc nous superposons deux opérations Ω, nous trouverons les valeurs de $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, c'est-à-dire $-\Delta U$, le long de (Σ_0).

Si U est différent de zéro sur (C), on peut poser

$$U(p)=U_1(p)+\varphi(p),$$

$\varphi(p)$ étant la fonction harmonique dans l'aire (Σ_0) et prenant sur (C) les mêmes valeurs que U, de sorte que U_1 est nul sur (C). Nous avons alors

$$\Delta U=\Delta U_1.$$

Il nous suffit alors de vérifier qu'on a

$$\Omega[\Omega[\varphi]]=0;$$

or nous avons

$$\Omega(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\varphi(c)\frac{dG}{dn}(c,p)\,ds;$$

or, nous avons vu au paragraphe précédent que le deuxième membre $V(p)$ de cette équation est solution de l'équation (30), c'est-à-dire qu'on a bien

$$\Omega(V)=\Omega[\Omega[\varphi]]=0.$$

La proposition est donc démontrée.

37. Soit maintenant A un nombre quelconque supérieur à la constante caractéristique $-\alpha_1^2$. Tous les résultats qui précèdent peuvent s'étendre à l'équation (1). Bornons-nous à faire cette généralisation, dans ses grandes lignes, pour les plus importants d'entre eux.

Reprenons notre demi-cylindre (0_+); appelons encore fonction (H) toute solution de l'équation (1) dépourvue de singularités à l'intérieur de ce demi-cylindre et remplissant en outre les conditions suivantes :

1° Elle s'annule sur le demi-cylindre;

2° Elle est régulière à l'infini;

3° Elle reste finie au voisinage du contour (C) de la section (Σ_0).

Comme précédemment, il y a une fonction (H) et une seule prenant le long de (Σ_0) des valeurs données $U(p)$; elle a pour expression

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\,G(m, P; \Lambda)\,d\Sigma_m;$$

de même, il y a une fonction (H) et une seule dont la dérivée normale le long de (Σ_0) prend des valeurs données $V(p)$. Elle est donnée par

$$U(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\,G(m, P; \Lambda)\,d\Sigma_m.$$

Ceci nous permet de reprendre le raisonnement fait au paragraphe 33. Soient M et P deux points situés de part et d'autre de $(\Sigma_0)\,[z > 0 > \zeta]$. Calculons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} G(M, q; \Lambda)\,G(q, P; \Lambda)\,d\Sigma_q;$$

le point M étant regardé comme fixe, elle nous définit une fonction du point P qui appartient à l'ensemble (H), à savoir celle dont la dérivée normale le long de (Σ_0) prend les valeurs

$$V(p) = -G(M, p; \Lambda);$$

mais il est immédiat qu'une telle fonction peut s'écrire

$$\int_z^{+\infty} G(M, P; \Lambda)\,dz,$$

d'où la relation, analogue à (26),

$$(31)\qquad 2\pi\int_z^{+\infty} G(M, P; \Lambda)\,dz = \int\int_{(\Sigma_0)} G(M, q; \Lambda)\,G(q, P; \Lambda)\,d\Sigma_q.$$

Les deux membres de cette relation sont des fonctions continues pour $z = \zeta = 0$. Pour ces valeurs, le premier membre, en vertu de la relation de M. Paul Lévy, se réduit à $2\pi g(m, p; \Lambda)$. Nous avons donc la relation suivante qui généralise (25) :

$$(32)\qquad 2\pi g(m, p; \Lambda) = \int\int_{(\Sigma_0)} G(m, q; \Lambda)\,G(q, p; \Lambda)\,d\Sigma_q.$$

Supposons que nous donnions à Λ une valeur positive μ^2.

L'égalité suivante

$$2\pi K(i\mu r) = \iint \frac{e^{-\mu mq}}{mq} \frac{e^{-\mu pq}}{pq} d\Sigma_q, \qquad \text{où} \qquad r = mp,$$

où l'intégrale qui figure au second membre est étendue à tout le plan, peut être considérée comme un cas limite de la relation (32).

38. On peut encore étendre les résultats précédents. Bornons-nous au cas où l'on considère, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \Lambda R(\xi, \eta) U, \tag{33}$$

où R représente une fonction positive en tout point de l'aire (Σ_0). On peut alors montrer qu'il existe un nombre $-\alpha^2$ (¹) jouissant de la propriété suivante : Lorsque $\Lambda + \alpha^2$ est positif, il existe une fonction de Green donnée par

$$G(M, P; \Lambda R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(m, p; \Lambda R + \lambda^2) \cos\lambda(z - \zeta)\, d\lambda \tag{34}$$

(dans ce mode d'écriture, il va sans dire que G est une fonctionnelle de ΛR; remarque analogue pour g). Nous aurons encore la relation de M. Paul Lévy

$$2g(m, p; \Lambda R) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, P; \Lambda R)\, dz,$$

et, comme au numéro précédent, nous démontrerons la relation

$$2\pi \int_z^{+\infty} G(M, P; \Lambda R)\, dz = \iint_{(\Sigma_0)} G(M, q; \Lambda R)\, G(q, P; \Lambda R)\, d\Sigma_q,$$

où M et P désignent deux points situés de part et d'autre de (Σ_0). Quand M et P viennent dans (Σ_0), on a à la limite

$$2\pi g(m, p; \Lambda R) = \iint_{(\Sigma_0)} G(m, q; \Lambda R)\, G(q, p; \Lambda R)\, d\Sigma_q.$$

Nos deux formes de relations entre la fonction de Green du cylindre et celle de sa section droite, d'abord établies pour

(¹) Lequel, lorsque R est égal à 1, se réduit à $-\alpha_1^2$.

l'équation de Laplace, s'appliquent donc sans modification à l'équation (33).

39. Enfin, on obtient des résultats identiques pour la fonction de Neumann; il est inutile d'en reprendre la démonstration qui suit une marche toute parallèle à la précédente; nous devrons ici supposer que Λ est essentiellement positif, et, dans ces conditions, il nous suffira, dans les formules précédemment obtenues, de changer G en Γ et g en γ.

CHAPITRE V.

DISCUSSION DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

40. Nous avons vu (Chap. II, § **17**) qu'une solution de l'équation (1) n'est pas déterminée lorsque l'on connaît uniquement les valeurs qu'elle prend sur un cylindre indéfini.

Il convient donc, lorsqu'on parle du problème de Dirichlet pour un tel domaine, d'en préciser l'énoncé. Rappelons à cet égard deux résultats déjà obtenus (§ **18** et **19**) :

1° Lorsque $\Lambda + \alpha_1^2$ est positif, il existe au plus une solution de l'équation (1) prenant des valeurs données sur le cylindre et bornée à l'intérieur;

2° Lorsque $\Lambda + \alpha_1^2$ est quelconque, l'équation (1) admet au plus une solution prenant des valeurs données sur le cylindre et régulière à l'infini.

Il est donc naturel d'examiner successivement les deux problèmes suivants :

1° $\Lambda + \alpha_1^2$ étant positif au sens strict, soit $H(s, z)$ une fonction continue et bornée sur tout le cylindre; l'équation (1) admet-elle une solution régulière et bornée à l'intérieur du cylindre et prenant sur le cylindre les valeurs $H(s, z)$?

2° $\Lambda + \alpha_1^2$ étant négatif ou nul, soit $H(s, z)$ une fonction qui, outre les conditions précédentes, remplisse celle de régularité à l'infini (c'est-à-dire elle tend uniformément vers zéro lorsque z croît indéfiniment). Y a-t-il une solution de (1), régulière à l'intérieur du cylindre et régulière à l'infini, prenant sur le cylindre les valeurs $H(s, z)$?

41. Commençons par le premier de ces problèmes, de beaucoup le plus facile. Nous supposons donc, vérifiée au sens strict, l'inégalité

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0.$$

Il existe donc une fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$. Soit μ un point quelconque (s, z) de la surface du cylindre, et soit

$$H(\mu) = H(s, z)$$

la distribution des valeurs données : $H(\mu)$ étant continue et bornée, nous allons montrer qu'il y a une solution de (1) régulière et bornée dans le cylindre et prenant sur sa surface les valeurs $H(\mu)$. Elle est donnée par

$$(35) \qquad U(P) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\mathfrak{C}} H(\mu)\frac{dG}{dn}(\mu, P; \Lambda)\, dS_\mu$$

$\left(\int\int_{\mathfrak{C}}\right.$ représente une intégrale double étendue à tout le cylindre$\left.\right)$.

Tout d'abord, il n'y a aucune difficulté à démontrer que la fonction U est bornée et qu'elle vérifie l'équation (1). Mais il nous faut en outre établir le point suivant : ϖ désignant un point quelconque sur le cylindre, la fonction $U(P)$ tend vers $H(\varpi)$ lorsque P tend vers ϖ.

Nous prendrons comme plan des xy le plan de section droite du point ϖ. Nous utiliserons les deux remarques suivantes (¹) :

1° La fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$ est toujours positive; il en est donc de même de sa dérivée normale;

2° Quand M décrit une parallèle aux génératrices en s'éloignant indéfiniment de P, la fonction $G(M, P; \Lambda)$ tend vers zéro en décroissant; il en est donc de même de $\frac{dG}{dn}(\mu, P; \Lambda)$ quand μ, décrivant une génératrice, s'éloigne indéfiniment de P : c'est ce qui résulte immédiatement de l'expression asymptotique de $\frac{\partial G}{\partial z}$.

Remarquons enfin que, si l'on donne à H la forme particulière suivante :

$$H(s, z) = A(s)\,{\cos \atop \sin}\,\omega z,$$

(¹) La première de ces remarques est démontrée, dans une Note, à la fin de ce Mémoire.

où ω est une constante, nous sommes assurés de l'existence d'une solution qui sera

$$U(x, y, z) = f(x, y) \frac{\cos}{\sin} \omega z,$$

en appelant $f(x, y)$ la solution de l'équation

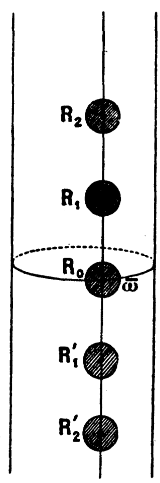
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\Lambda + \omega^2) u,$$

qui prend le long du contour (C) de (Σ_0) les valeurs $A(s)$; en outre, cette solution U est nécessairement susceptible de s'écrire sous la forme (35) (ce qu'il serait d'ailleurs facile de vérifier directement).

En reprenant le raisonnement classique qui sert à étudier l'intégrale de Poisson, nous sommes conduits à démontrer la proposition suivante :

Considérons la rondelle R_0 découpée dans le cylindre par une

Fig. 2.



sphère de centre ϖ, de rayon p, aussi petit qu'on veut, mais déterminé. On peut prendre le point P assez voisin de ϖ pour que l'intégrale

$$\int\int_{\mathfrak{S} - R_0} \frac{dG}{dn}(\mu, P; \Lambda)\, dS_\mu,$$

étendue à toute la surface du cylindre, *moins la rondelle* R_0, soit aussi petite qu'on veut.

En effet, soient $A(s)$ et $B(s)$ deux fonctions positives, la seconde au sens strict, la première n'ayant d'autre zéro que la valeur $s = 0$ que nous ferons correspondre au point ϖ. Si nous prenons alors

$$H(s, z) = A(s) + (1 - \cos\omega z)\, B(s),$$

notre problème aura certainement une solution fournie par (35). Les zéros de $H(s, z)$ forment une division régulière sur la génératrice du point ϖ, la distance de deux consécutifs d'entre eux étant $\frac{2\pi}{\omega}$; partout ailleurs, $H(s, z)$ est positive. Enlevons de notre cylindre, non seulement la rondelle R_0 qui entoure ϖ, mais encore toutes les rondelles égales R_1, R_2, ..., R'_1, R'_2, ... entourant les autres zéros de la fonction H. Sur le cylindre ainsi perforé, H a un certain minimum positif. Il en résulte que l'intégrale

$$\int\!\!\int_{\mathfrak{S}-R_0-R_1-R_2-\ldots-R'_1-R'_2-\ldots} \frac{dG}{dn}\, dS_\mu,$$

étendue à cette surface, tend nécessairement vers zéro lorsque P tend vers ϖ.

Pour nous débarrasser maintenant des rondelles auxiliaires R_1, R_2, ..., R'_1, R'_2, ..., il nous suffit de remarquer que l'intégrale

$$\int\!\!\int_{R_1+R_2+\ldots+R'_1+R'_2+\ldots} \frac{dG}{dn}\, dS_\mu,$$

étendue à la somme des aires de ces rondelles, est moindre qu'une portion de l'intégrale précédente, grâce au fait que $\frac{dG}{dn}$ décroît à partir d'un certain moment lorsque μ s'éloigne de P sur une génératrice : nous en serons du moins assurés si la quantité arbitraire ω est prise suffisamment petite.

La proposition annoncée est donc établie.

Il est maintenant facile de vérifier que $U(P)$ tend vers $H(\varpi)$ lorsque P tend vers ϖ. On écrit pour cela

$$\begin{aligned} U(P) = {} & \frac{H(\varpi)}{4\pi}\int\!\!\int \frac{dG}{dn}(\mu, P; \Lambda)\, dS_\mu \\ & + \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int_{\mathfrak{S}} [H(\mu) - H(\varpi)]\, \frac{dG}{dn}(\mu, P; \Lambda)\, dS_\mu. \end{aligned}$$

La première de ces intégrales représente la solution régulière et bornée de (1) qui prend sur le cylindre la valeur constante H (ϖ). Il suffit donc de montrer que la seconde tend vers zéro quand P tend vers ϖ ; c'est ce que l'on fera en la décomposant en deux parties : l'une étendue à R_0, l'autre à $\mathcal{C} - R_0$. Nous n'insisterons pas sur ce raisonnement qui est classique, et dont la proposition précédente constitue la pierre de touche essentielle.

Il est donc établi que notre problème admet une solution et une seule, donnée par la formule (35).

Supposons maintenant que la fonction H (s, z) soit régulière à l'infini. Il est alors facile de vérifier que la solution U (x, y, z) fournie par (35) est elle-même régulière à l'infini. Cela tient au fait suivant :

P étant un point quelconque intérieur au cylindre, on peut toujours trouver une section droite Σ_h, déterminant deux demi-cylindres h_+ et h_-, telle que l'intégrale

$$\iint \frac{dG}{dn} dS,$$

étendue à celui de ces deux demi-cylindres situé par rapport à Σ_h de côté différent de P, soit aussi petite qu'on veut. Ceci revient à dire que la même intégrale, étendue à tout le cylindre, est convergente.

Par un raisonnement analogue, on voit que, dans la même hypothèse, les dérivées par rapport à z de U (x, y, z) tendront vers zéro sur toute parallèle aux génératrices strictement intérieure au cylindre : c'est dire que si les dérivées de H jusqu'à un certain ordre sont régulières à l'infini, il en sera de même des dérivées de U jusqu'à cet ordre.

42. Supposons maintenant que nous ayons

$$A + \alpha\xi \leq 0$$

et considérons une fonction H (s, z) continue sur le cylindre et régulière à l'infini. Nous supposerons en outre que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(s, z)| \, dz$$

a un sens et que sa convergence est uniforme par rapport à s. Nous cherchons s'il y a une solution de (1) régulière dans le cylindre, régulière à l'infini et prenant sur le cylindre les valeurs $H(s, z)$.

En général, on doit répondre à cette question par la négative.

Nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

Soit une solution de (1) *régulière dans le cylindre et régulière à l'infini, prenant sur le cylindre les valeurs* $H(s, z)$ qui remplissent toutes les conditions précédemment énoncées. *Si l'on a*

$$\Lambda + \alpha_p^2 \leqq 0, \tag{36}$$
$$\Lambda + \alpha_{p+1}^2 > 0, \tag{37}$$

on a nécessairement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos}{\sin}\left(\sqrt{-\Lambda - \alpha_i^2}\, z\right) dz \int_{(C)} H(s, z) \frac{d\varphi_i}{dn}\, ds = 0 \tag{38}$$

pour

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Les égalités (38) nous fournissent donc des conditions nécessaires de résolubilité de notre problème : ces conditions sont au nombre de $2p$ si l'inégalité (36) est vérifiée au sens strict; si, par contre, elle est vérifiée au sens large, et si α_p^2 est d'ordre de multiplicité h, h de ces conditions se trouveront vérifiées d'elles-mêmes et leur nombre se réduira à $2p - h$.

Un premier moyen de présenter la proposition précédente est de se servir de la formule de Green : c'est là du moins une manière très simple d'opérer, si nous considérons une solution $U(x, y, z)$ de (1) qui soit régulière à l'infini, *et qui, en outre, possède une dérivée* $\frac{\partial U}{\partial z}$ *jouissant de la même propriété.* En effet, remarquons que la fonction

$$V_i(x, y, z) = \varphi_i(x, y) \frac{\cos}{\sin}\left(\sqrt{-\Lambda - \alpha_i^2}\, z\right)$$

est elle-même une solution de (1), essentiellement bornée ainsi que $\frac{\partial V_i}{\partial z}$. Considérons alors un cylindre droit obtenu en coupant par deux sections droites quelconques. Nous avons

$$\int\int\left(U\frac{dV_i}{dn}-V_i\frac{dU}{dn}\right)dS=0,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface totale de ce cylindre. Lorsque les deux bases s'éloignent indéfiniment de part et d'autre, les portions de cette intégrale qui leur correspondent tendent vers zéro, et nous trouvons bien les formules (38).

Mais la restriction précédemment imposée à la solution U, soit *d'avoir une dérivée par rapport à z régulière à l'infini,* ne saurait être admise; nous allons donner une deuxième méthode où elle devient tout à fait inutile.

Nous allons pour cela nous appuyer sur les propositions suivantes, bien connues dans la théorie des équations linéaires : Désignons par $f(z)$ une fonction définie et continue pour toute valeur de z et tendant vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment. Elles s'énoncent comme suit :

1° L'équation différentielle

$$(a)\qquad v''(z)-\omega^2 v(z)=f(z)$$

a toujours une solution et une seule qui tend vers zéro quand $|z|$ croît indéfiniment; c'est

$$v(z)=-\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega|z-\zeta|}f(\zeta)\,d\zeta.$$

2° Considérons par contre l'équation

$$(b)\qquad v''(z)+\omega^2 v(z)=f(z);$$

pour qu'elle admette une telle solution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\zeta)\cos\omega\zeta\,d\zeta=0,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(\zeta)\sin\omega\zeta\,d\zeta=0.$$

Cela posé, considérons la fonction suivante :

$$v_i(z)=\int\int_{\Sigma_z}U(\xi,\eta,z)\,\varphi_i(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

La solution considérée étant régulière à l'infini, il est nécessaire que la fonction $v_i(z)$ tende vers zéro quand $|z|$ augmente indéfiniment. Mais, d'autre part, il est facile de former une équation différentielle à laquelle satisfait $v_i(z)$. Nous avons en effet

$$v_i''(z) = \iint \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \varphi_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta;$$

tenant compte du fait que U est solution de l'équation (1) et appliquant la formule de Green, il nous vient

$$v_i''(z) - (\Lambda + \alpha_i^2)\, v_i(z) = -\int_{(C)} H(s, z) \frac{d\varphi_i}{dn}\, ds. \tag{39}$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, p$, cette équation est du type (b); pour $i \geqq p+1$, elle est du type (a). Exprimons qu'elle admet, quel que soit l'indice i, une solution qui tend vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment, nous trouvons bien les conditions (38).

Le théorème est donc démontré par une méthode qui n'exige aucune hypothèse sur la manière dont se comporte à l'infini $\frac{\partial U}{\partial z}$.

Ainsi donc, $H(s, z)$ remplissant les conditions énoncées au commencement de ce paragraphe, *il n'y a pas en général de solution* $U(x, y, z)$ de (1), *régulière dans le cylindre et régulière à l'infini, qui prenne sur le cylindre les valeurs* $H(s, z)$. *Pour qu'il existe une pareille solution, il est nécessaire que* H *vérifie les conditions* (38).

Inversement, nous allons nous proposer de montrer *que ces conditions* (38) *sont suffisantes.* Pour parvenir à ce résultat, nous commencerons par définir ce qu'on doit entendre par *fonction de Green généralisée.*

43. *Les fonctions de Green généralisées.* — Quand $\Lambda + \alpha_1^2$ est négatif ou nul, il n'y a plus de fonction de Green et le problème de Dirichlet tel que nous l'avons énoncé est généralement impossible. Nous allons construire une fonction qui, dans les cas de possibilité, jouera le même rôle que la fonction de Green $G(M, P; \Lambda)$ dans la résolution de notre premier problème ($\Lambda + \alpha_1^2 > 0$, § 41) [1].

---

[1] Au fond, nous faisons ici quelque chose d'analogue à ce que l'on fait pour

Faisons toujours l'hypothèse

$$\mathrm{A} + \alpha_p^2 \leqq 0, \qquad \mathrm{A} + \alpha_{p+1}^2 > 0.$$

Dans ces conditions, nous appellerons *fonction de Green généralisée* $\mathcal{G}$ (M, P; A) une solution de l'équation (1) s'annulant sur le cylindre, régulière à l'infini et régulière en tout point à distance finie non situé dans la section droite du point P; au passage de cette section droite, sa dérivée $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \zeta}$ subit une discontinuité; sur la face supérieure de cette section droite, on a

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \zeta_{\zeta=z+0}} = 2\pi[\varphi_1(m)\varphi_1(p) + \ldots + \varphi_p(m)\varphi_p(p)];$$

sur la face inférieure, $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \zeta}$ prend la valeur opposée :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \zeta_{\zeta=z-0}} = -2\pi[\varphi_1(m)\varphi_1(p) + \ldots + \varphi_p(m)\varphi_p(p)];$$

enfin, la différence $\mathcal{G} - \frac{\cos\sqrt{-\mathrm{A}}\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}}$ reste partout finie.

Il est évident qu'il y a au plus une fonction répondant à cet ensemble de conditions. Cette fonction existe effectivement et elle est donnée par la formule

$$(40) \quad \begin{aligned} &\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}; \mathrm{A}) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ g(m, p; \lambda^2 + \mathrm{A}) \\ &\qquad - \left[\frac{2\pi\varphi_1(m)\varphi_1(p)}{\lambda^2 + \mathrm{A} + \alpha_1^2} + \ldots + \frac{2\pi\varphi_p(m)\varphi_p(p)}{\lambda^2 + \mathrm{A} + \alpha_p^2}\right] \Big\} \\ &\qquad \times \cos\lambda(\zeta - z)\, d\lambda. \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que, lorsque $\mathrm{A} + \alpha_1^2$ est positif, le deuxième membre peut se décomposer et s'écrire

$$\mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}; \mathrm{A}) - 2\pi \sum_{n=1}^{p} \frac{e^{-\sqrt{\mathrm{A}+\alpha_n^2}\,|\zeta - z|}}{\sqrt{\mathrm{A} + \alpha_n^2}} \varphi_n(m)\varphi_n(p).$$

$\mathcal{G}$ (M, P; A) vérifie, on le voit alors immédiatement, toutes les

résoudre le problème de Neumann relatif à l'équation de Laplace, dans le cas d'un domaine limité; ce problème n'est en général pas possible; on construit une fonction de Neumann pour le cas de possibilité.

conditions que nous lui avons imposées, et, en outre, il résulte de la formule (20) qu'on a, *dans cette hypothèse*,

$$(41) \qquad \mathcal{G}(\mathrm{M},\, \mathrm{P}\,;\, \Lambda) = 2\pi \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\Lambda+\alpha_n^2}\,|\zeta - z|}}{\sqrt{\Lambda+\alpha_n^2}} \varphi_n(m)\,\varphi_n(p).$$

D'autre part, tant que l'on a au sens strict de l'inégalité

$$\Lambda + \alpha_{p+1}^2 > 0,$$

le second membre de (40) a un sens : il en est de même du deuxième membre de (41) (*cf.* § 27), la série qui y figure converge absolument et uniformément dans une section droite déterminée (différente de celle de P). Il n'y a aucune difficulté à démontrer l'identité de ces deux seconds membres de (40) et de (41) pour une valeur quelconque de Λ supérieure à $-\alpha_{p+1}^2$; en effet, dans ces conditions la fonction $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}; \Lambda)$, représentée par le deuxième membre de (40), possède dans toute section droite des dérivées des deux premiers ordres et s'annule sur le contour de cette section; elle est donc développable en série de fonctions fondamentales; si l'on effectue ce développement, on tombe forcément sur (41).

Sous la forme (41), apparaît immédiatement ce fait que $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}; \Lambda)$ est solution de (1); sous la forme (40), on démontre aisément que la différence

$$\mathcal{G} - \frac{\cos\sqrt{-\Lambda}\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}}$$

reste partout finie; il suffit pour cela d'opérer comme on l'a fait pour la fonction $\mathrm{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}; \Lambda)$ elle-même; on décomposera g sous la forme

$$g(m, p\,;\, \lambda^2 + \Lambda) = \mathrm{K}\left(i\sqrt{\lambda^2+\Lambda}\, r\right) - \omega(m, p\,;\, \lambda^2+\Lambda),$$

et l'on écrira

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{P}\,;\, \Lambda) = {} & \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{K}\left(i\sqrt{\lambda^2+\Lambda}\, r\right) \cos\lambda(\zeta - z)\, d\lambda \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\omega(m, p\,;\, \lambda^2+\Lambda) - 2\pi \sum_{n=1}^{n=p} \varphi_n(m)\,\varphi_n(p)\right] \\ & \times \cos\lambda(\zeta - z)\, d\lambda\,; \end{aligned}$$

sous cette forme, la propriété en question est immédiate.

Il reste à montrer, et c'est là un point très important, que $\frac{\partial \mathcal{G}_1'}{\partial \zeta}$ éprouve au passage du plan $z = \zeta$ une discontinuité. Pour cela, écrivons le second membre de (40) sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{A}\left[g(m, p; \lambda^2 + \Lambda) - 2\pi\sum_{n=1}^{n=p}\frac{\varphi_n(m)\varphi_n(p)}{\lambda^2 + \Lambda + \alpha_n^2}\right]\cos\lambda(\zeta - z)\,d\lambda$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_A^{+\infty} g(m, p; \lambda^2 + \Lambda)\cos\lambda(\zeta - z)\,d\lambda$$
$$-4\sum_{n=1}^{p}\varphi_n(m)\varphi_n(p)\int_A^{+\infty}\frac{\cos\lambda(\zeta - z)}{\Lambda + \lambda^2 + \alpha_n^2}\,d\lambda,$$

en désignant par A un nombre positif quelconque supérieur à $\sqrt{-\Lambda - \alpha_1^2}$; dans ces conditions, toutes les intégrales écrites ont un sens, et les deux premières d'entre elles sont continues ainsi que leurs dérivées, même pour $z = \zeta$. Considérons, par contre, la troisième. Sa dérivée par rapport à ζ est

$$+4\sum_{n=1}^{p}\varphi_n(m)\varphi_n(p)\int_A^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda(\zeta - z)}{\lambda^2 + \Lambda + \alpha_n^2}\,d\lambda,$$

ce que nous écrivons encore

$$4\sum_{n=1}^{p}\varphi_n(m)\varphi_n(p)\left[\int_A^{+\infty}\frac{\sin\lambda(\zeta - z)}{\lambda}\,d\lambda - \int_A^{+\infty}\frac{(\Lambda + \alpha_n^2)\sin\lambda(\zeta - z)}{\lambda(\lambda^2 + \Lambda + \alpha_n^2)}\,d\lambda\right].$$

La seconde des intégrales entre parenthèses est continue pour $z = \zeta$; finalement, $\frac{\partial \mathcal{G}_1'}{\partial \zeta}$ se comporte donc comme

$$4\sum_{n=1}^{p}\varphi_n(m)\varphi_n(p)\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(\zeta - z)}{\lambda}\,d\lambda.$$

Or, quand $\zeta - z$ est positif, cette dernière expression a pour valeur

$$2\pi\sum_{n=1}^{p}\varphi_n(m)\varphi_n(p);$$

lorsque $\zeta - z$ est négatif, sa valeur est

$$-2\pi\sum_{n=1}^{p}\varphi_n(m)\varphi_n(p),$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Ainsi, il existe une fonction de Green généralisée, définie comme nous l'avons dit et donnée par l'une des formules (40) ou (41).

44. Reprenons alors notre distribution $H(s, z)$, et soit $H(x, y, z)$ la fonction harmonique prenant sur le cylindre les valeurs $H(s, z)$, et qui en tout point intérieur est bornée et régulière. La fonction $H(s, z)$ étant régulière à l'infini, il en sera de même de $H(x, y, z)$. Considérons l'intégrale

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi}\iiint H(M)\mathcal{G}(M, P; \Lambda)\, dV_M, \tag{42}$$

où $\mathcal{G}$ désigne toujours notre fonction de Green généralisée. La fonction $\varphi(P)$ s'annule sur le cylindre, et elle est elle-même régulière à l'infini. Nous allons former une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait cette fonction φ. Pour y parvenir facilement, il suffit de résumer les singularités de $\mathcal{G}$ dans l'énoncé suivant :

Le point P *étant fixe, la fonction* $\mathcal{G}(M, P; \Lambda)$ *ne diffère de l'expression*

$$\frac{\cos(\sqrt{-\Lambda}\,MP)}{MP} - \sum_{n=1}^{n=p}\varphi_n(p)\int\int_{\Sigma}\frac{\varphi_n(Q)\cos(\sqrt{-\Lambda}\,MQ)}{MQ}\,d\Sigma_Q$$

que par une fonction holomorphe en tout point M.

En s'appuyant sur cette propriété et sur la formule de Poisson, on démontre immédiatement que φ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \Lambda\varphi = H - \sum_{n=1}^{p}\varphi_n(p)\iint\varphi_n(\xi, \eta)H(\xi, \eta, z)\,d\xi\,d\eta. \tag{43}$$

45. Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les conditions (38) sont suffisantes. Si notre problème admet une solution $U(x, y, z)$ et si nous posons

$$U(x, y, z) = H(x, y, z) + V(x, y, z),$$

la fonction $V(x, y, z)$ sera régulière à l'infini et nulle sur le cylindre; en outre, elle vérifiera l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \Lambda V = \Lambda H; \tag{44}$$

cette fonction V sera susceptible d'être développée en une série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales

$$V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(z) \varphi_u(x, y).$$

Considérons les p premiers termes de cette série. Nous avons

$$v_n(z) = \int\int V(\xi, \eta, z) \varphi_n(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

La fonction $v_n(z)$ est solution de l'équation différentielle

$$v''_n(z) - (\Lambda + \alpha_n^2) v_n(z) = \Lambda \int\int H(\xi, \eta, z) \varphi_n(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta; \tag{45}$$

nous considérons les p premières de ces équations, qui sont de la forme (b) (§ **42**).

Considérons la fonction

$$\sum_{n=1}^{p} v_n(z) \varphi_n(x, y) - \frac{\Lambda}{4\pi} \int\int\int H(M) \mathcal{G}(M, P; \Lambda) \, dV_M;$$

c'est une solution de l'équation (44) qui s'annule sur le cylindre. Il suffit donc de montrer qu'en vertu des conditions (38) nos p premières équations possèdent des solutions $v_n(z)$ qui tendent vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment.

Cela revient à prouver que les conditions (38) ont pour conséquence

$$\int\int\int H(\xi, \eta, \zeta)\,\varphi_i(\xi, \eta) \frac{\cos}{\sin}\left(\sqrt{-\Lambda-\alpha_i^2}\,\zeta\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta = 0$$
$$(i=1, 2, \ldots, p),$$

où l'intégrale triple est étendue à tout le cylindre.

Remarquons pour cela que la fonction

$$V_i = \varphi_i(m) \frac{\cos}{\sin}\left(\sqrt{-\Lambda-\alpha_i^2}\,\zeta\right)$$

est une solution de (1). Nous avons donc

$$\int\int H V_i\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{1}{\Lambda}\int\int\int H\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V_i}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 V_i}{\partial\zeta^2}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Appliquons à cette intégrale la formule de Green, en prenant pour volume d'intégration un cylindre droit : en faisant éloigner indéfiniment de part et d'autre les bases de ce cylindre, nous tombons sur les intégrales qui figurent au premier membre de (38); toutefois, il nous faut, pour l'exactitude du résultat, démontrer que la quantité

$$\int\int \frac{\partial H}{\partial z}(\xi, \eta, z)\,\varphi_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment. Ceci résulte du fait que la fonction

$$f_i(z) = \int\int H(\xi, \eta, z)\,\varphi_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

est solution de l'équation

$$f_i''(z) + \alpha_i^2 f_i(z) = -\int_C H\frac{d\varphi_i}{dn}\, ds.$$

Comme $f_i(z)$ tend vers zéro, il en est de même de f_i'' et par suite de $f_i'(z)$.

Les conditions (38) *sont donc nécessaires et suffisantes.*

Remarque. — L'analyse précédente nous montre que, lorsque les conditions (38) ne sont pas remplies, il y a une infinité de solutions de l'équation (1), dépendant en général de $2p$ constantes arbitraires, qui prennent les valeurs données sur le cylindre et qui sont en outre régulières et bornées en tout point intérieur au cylindre, mais aucune de ces solutions n'est régulière à l'infini.

46. Les considérations précédentes nous fournissent un exemple d'équation intégrale singulière, analogue à celui de M. Picard.

Considérons l'équation

$$(46) \qquad U(P) + \frac{\Lambda}{4\pi}\int\int\int U(M)G(M, P)\,dV_M = H(P),$$

dont le noyau est la fonction de Green ordinaire du cylindre indéfini, et où l'intégrale triple est étendue à tout le cylindre. Si nous supposons que H(P) désigne une fonction harmonique bornée et régulière dans tout le cylindre, c'est à l'équation (46) que nous serons conduits lorsque nous chercherons à déterminer une solution U(P) de l'équation (1) qui soit elle-même bornée et régulière dans tout le cylindre, et qui prenne sur sa surface les mêmes valeurs que H(P). Il résulte de l'analyse développée au paragraphe **41** que, si l'on a

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0,$$

il y a une fonction U(P), et une seule, répondant à cette condition : elle est donnée par la formule (35). On démontre d'ailleurs aisément qu'on peut écrire cette solution sous la forme

$$U(P) = H(P) - \frac{\Lambda}{4\pi}\int\int\int U(M)G(M, P; \Lambda)\,dV_M.$$

Supposons maintenant qu'on ait $\Lambda + \alpha_1^2 \leqq 0$, et considérons l'équation sans second membre

$$(47) \qquad U(P) + \frac{\Lambda}{4\pi}\int\int\int U(M)G(M, P)\,dV_M = 0.$$

Si nous supposons que Λ satisfait aux inégalités

$$\Lambda + \alpha_p^2 \leqq 0, \qquad \Lambda + \alpha_{p+1}^2 > 0,$$

les fonctions

$$V_i = \varphi_i(x, y)\,\frac{\cos}{\sin}\left(\sqrt{-\Lambda - \alpha_i^2}\,z\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

seront des solutions de cette équation, ainsi qu'on le vérifie au moyen de la formule de Green.

Ces solutions ne sont pas les seules : nous voyons en effet que les fonctions

$$W_i = \varphi_i(x, y)\, e^{\pm\left(\sqrt{\Lambda + \alpha_i^2}\, z\right)}$$

vérifieront l'équation (47) sous les conditions

$$\Lambda + \alpha_i^2 \geqq 0, \qquad \sqrt{\Lambda + \alpha_i^2} < \alpha_1$$

(la dernière de ces conditions étant remplie, nous sommes assurés du fait que

$$G \frac{\partial W_i}{\partial z} - W_i \frac{\partial G}{\partial z}$$

tendra vers zéro lorsque $|z|$ croît indéfiniment, cela résulte de ce que l'expression asymptotique de G fait intervenir $e^{-\alpha_1 |z|}$), c'est-à-dire pour les valeurs de Λ comprises dans l'intervalle

$$(-\alpha_i^2, \quad -\alpha_i^2 + \alpha_1^2).$$

Nous avons d'ailleurs ainsi, en vertu de l'analyse du paragraphe **17**, toutes les solutions de l'équation (47).

Prenons maintenant l'équation (46) avec second membre, et supposons que la fonction H(P) soit régulière à l'infini, et telle que son intégrale, le long de toute parallèle aux génératrices, converge absolument et uniformément $\left(\text{c'est ce qui arrivera si l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} |H(s, z)|\, dz \text{ est uniformément convergente}\right)$. Dans ces conditions, nous savons (§ **45**, Remarque) que l'équation admet une infinité de solutions. Si, parmi ces solutions, on n'accepte que celles qui sont régulières à l'infini, la fonction H devra satisfaire aux conditions (38) pour que le problème soit résoluble.

CHAPITRE VI.

LA FONCTION DE NEUMANN ORDINAIRE.

47. La discussion du problème de Neumann suit une marche toute parallèle à celle du problème de Dirichlet. Nous laisserons donc de côté l'étude approfondie de ce problème. Bornons-nous à indiquer à grands traits les résultats de cette discussion :

1° Lorsque Λ est strictement positif, si $H(s, z)$ est une fonction continue et bornée sur tout le cylindre, il existe une solution et une seule de l'équation (1), régulière et bornée dans le cylindre et dont la dérivée normale prenne les valeurs $H(s, z)$. Elle est donnée par

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\int H(\mu)\Gamma(\mu, P; \Lambda)\, dS_\mu.$$

2° Si Λ est $\leqq 0$, supposons pour fixer les idées qu'on ait

$$\Lambda + \beta_p^2 \leqq 0, \qquad \Lambda + \beta_{p+1}^2 > 0,$$

et que $H(s, z)$ vérifie les conditions stipulées au commencement du paragraphe **42**. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une solution de (1) régulière dans le cylindre et régulière à l'infini, dont la dérivée normale prenne les valeurs $H(s, z)$, est qu'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\sqrt{-\Lambda}.z)\, dz \int_{(C)} H(s, z)\, ds = 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\sqrt{-\Lambda - \beta_i^2}\, z)\, dz \int_{(C)} H(s, z)\,\psi_i(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Comme dans le Chapitre précédent, nous aurons à introduire ici les fonctions de Neumann généralisées, dont la définition est absolument calquée sur celle des fonctions de Green généralisées.

48. En particulier, si nous considérons la valeur $\Lambda = 0$, c'est-à-dire l'équation de Laplace, la fonction de Neumann, telle que nous l'avons définie au Chapitre II, n'existe pas. Mais il nous est facile de construire une fonction de Neumann généralisée, au sens précédent, qu'on pourra utiliser, pour la résolution du problème de Neumann, toutes les fois que celui-ci sera possible, c'est-à-dire toutes les fois que l'intégrale $\int\int H(\mu)\, dS_\mu$ étendue au cylindre sera nulle.

Cette fonction de Neumann ordinaire du cylindre sera définie comme suit : le point P étant fixe, c'est une fonction harmonique, sauf dans la section droite du point P, où elle se comporte comme

$$\frac{1}{MP} - \frac{1}{\Sigma}\int\int \frac{d\Sigma_Q}{MQ}$$

(où l'intégrale double est étendue à la section droite du point P) qui est régulière à l'infini et dont la dérivée normale s'annule sur le cylindre. Soit $\Gamma(M, P)$ la fonction ainsi construite.

Conformément à la théorie générale, la quantité $\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta}$ subit une discontinuité dans le plan $z = \zeta$. C'est ainsi qu'on peut écrire

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_{\zeta = z+o}} = \frac{2\pi}{\Sigma}, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta_{\zeta = z-o}} = -\frac{2\pi}{\Sigma}.$$

On a

$$(48) \qquad \Gamma(M, P) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\gamma(m, p; \lambda^2) - \frac{2\pi}{\lambda^2 \Sigma}\right]\cos\lambda(z - \zeta)\,d\lambda;$$

on peut encore représenter $\Gamma(M, P)$ lorsque M n'est pas dans la section droite de P par une série procédant suivant les fonctions fondamentales (ψ) de la section droite. Nous aurons

$$(49) \qquad \Gamma(M, P) = 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\psi_n(m)\,\psi_n(p)}{\beta_n}e^{-\beta_n|\zeta - z|}.$$

(On suppose naturellement tous les β_n positifs.)

Il est facile de développer pour cette fonction une théorie assez semblable à celle que nous avons exposée au Chapitre IV; nous rencontrerons toutefois quelques différences qui tiennent au fait que la valeur $\Lambda = o$ est singulière ([1]).

Considérons l'ensemble (K) des fonctions définies dans le demi-cylindre (o_+) et jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles sont harmoniques ;
2° Leur dérivée normale s'annule sur le cylindre ;
3° Elles sont régulières à l'infini ;
4° Elles restent finies, même au voisinage de (C).

On vérifie immédiatement que toute fonction de l'ensemble (K) jouit des deux propriétés suivantes :

Si l'on appelle $U(p)$ et $V(p)$ les valeurs respectives de cette

---

[1] On pourrait faire une théorie analogue pour toute fonction de Green ou de Neumann généralisée, quel que soit Λ; cela n'a pas d'ailleurs grand intérêt et n'offre pas la moindre difficulté. Le cas de $\Lambda = o$ pour la fonction de Neumann est intéressant à cause de ses applications à l'Hydrodynamique.

fonction et de sa dérivée normale en un point p de (Σ_1), on a

$$(50) \qquad \int\int_{\Sigma_0} U(m)\, d\Sigma_m = 0, \qquad \int\int_{\Sigma_0} V(m)\, d\Sigma_m = 0.$$

En effet, la fonction U (P) considérée est au plus, à l'infini, de l'ordre de $e^{-\beta_1 z}$; remarquons alors que les deux fonctions

$$v = z \qquad \text{et} \qquad w = 1$$

sont des solutions de l'équation de Laplace dont la dérivée normale s'annule sur notre demi-cylindre. Nous avons donc

$$\int\int\left(U\frac{dv}{dn} - v\frac{dU}{dn}\right) dS = 0, \qquad \int\int\left(U\frac{dw}{dn} - w\frac{dU}{dn}\right) dS = 0,$$

où les intégrales sont étendues à la surface totale de notre demi-cylindre [1]; mais on voit immédiatement que ces égalités se réduisent aux formules (50).

Il en résulte en particulier que le demi-cylindre n'admet qu'une fonction de Green généralisée, par rapport au problème mixte suivant :

« Déterminer une fonction harmonique connaissant ses valeurs sur la section Σ_0 et les valeurs H (s, z) de sa dérivée normale sur le demi-cylindre $\Big[$on suppose comme précédemment que H (s, z) tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |H(s, z)|\, dz$ est uniformément convergente$\Big]$, et sachant qu'elle est régulière à l'infini. »

Ceci posé, soit $U(p)$ une fonction donnée dans la section droite Σ_0 et dont la valeur moyenne dans cette section soit nulle. Il existe une fonction (K) et une seule prenant les valeurs U (p) dans (Σ_0), elle est définie par

$$(51) \qquad U(P) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\int_{\Sigma_0} U(m)\Gamma(m, P)\, d\Sigma_m;$$

il suffit pour le vérifier de remarquer que la différence

$$\Gamma(m, P) - \frac{1}{mP} - \frac{1}{\Sigma}\int\int\frac{d\Sigma_q}{qP}$$

---

(1) L'une de ces intégrales, étendue à une section droite dont la cote croît indéfiniment, tend vers zéro.

est une fonction paire de la cote du point P, dont la dérivée par rapport à z ne présente pas de discontinuité, et de se reporter aux propriétés classiques des potentiels de simple couche.

Le long du plan Σ_0, la dérivée normale $V(p)$ de la fonction U (P) nous sera donnée par

$$(52) \qquad V(p) = \frac{1}{2\pi}\Delta \int\int_{(\Sigma_0)} U(m)\Gamma(m,p)\, d\Sigma_m.$$

De même, on vérifie aisément qu'il y a une fonction (K) et une seule dont la dérivée normale le long de (Σ_0) prend des valeurs données $V(p)$ pourvu que la moyenne de cette fonction dans (Σ_0) soit nulle. Cette fonction a pour expression

$$(53) \qquad U(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\Gamma(m, P)\, d\Sigma_m.$$

La formule (52) peut encore s'écrire

$$V(p) = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} \Delta\, U(m)\Gamma(m, p)\, d\Sigma_m + \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \frac{dU}{dn}\Gamma(c, p)\, ds.$$

Si $\frac{dU}{dn}$ n'est pas nul, le second terme présente une singularité logarithmique lorsque p s'approche du bord (C) de la section droite (Σ_0) ; par contre, si $\frac{dU}{dn}$ est nul en tout point de (C), la fonction $V(p)$ restera finie, même sur (C) (*cf.* § 31).

Quoi qu'il en soit, en comparant les égalités (52) et (53), on trouve aisément l'identité

$$4\pi^2 V(p) + \Delta_p \int\int_{\Sigma_0} V(m)\left[\int\int_{\Sigma_0} \Gamma(m,q)\Gamma(q,p)\, d\Sigma_q\right] d\Sigma_m = 0,$$

qui devra avoir lieu quelle que soit la fonction V satisfaisant à la condition

$$\int\int_{\Sigma_0} V(m)\, d\Sigma_m = 0.$$

Comme dans le cas de la fonction de Green, cette identité se transforme aisément en

$$\int\int_{(\Sigma_0)} V(m)\left(\Delta_p \int\int_{\Sigma_0} \Gamma(m, q)\Gamma(q, p)\, d\Sigma_q\right) . d\Sigma_m = 0.$$

Il faut donc que l'expression

$$\Delta_p \int\int_{\Sigma_0} \Gamma(m, q)\, \Gamma(q, p)\, d\Sigma_q$$

soit indépendante du point m; il est d'ailleurs facile de voir que cette expression est symétrique en m et p ; elle se réduit donc à une constante absolue, qu'on détermine immédiatement au moyen de la formule de Green, ce qui nous donne

$$\Delta_p \int\int_{\Sigma_0} \Gamma(m, q)\, \Gamma(q, p)\, d\Sigma_q = \frac{4\pi^2}{\Sigma}.$$

On pourrait refaire une théorie complète assez analogue à celle que nous avons exposée pour la fonction de Green ordinaire. On pourrait obtenir ainsi une relation entre la fonction $\Gamma(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ et la fonction de Neumann ordinaire $\gamma(m, p)$ de la section droite. On est conduit à la relation

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\Sigma_0)} \Gamma(m,q)\Gamma(q,p)\,d\Sigma_q = \gamma(m,p) - \frac{1}{\Sigma}\int\int_{\Sigma_0} [\gamma(m,q)+\gamma(q,p)]\,d\Sigma_q + \alpha,$$

α étant une constante arbitraire, laquelle s'introduit naturellement, puisque la fonction γ n'est définie qu'à une constante additive près.

On pourrait d'ailleurs obtenir cette relation par une autre méthode absolument analogue à celle que nous avons donnée au paragraphe 33 ; il convient à cet égard de remarquer que le succès de cette méthode tient à ce fait que, quels que soient les deux points q et M, on a

$$\int\int_{\Sigma_0} \Gamma(q, \mathrm{M})\, d\Sigma_q = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à la section droite du point M ; c'est ce qu'on vérifie aisément au moyen de l'expression (48). Si donc M est un point fixe situé au-dessous du plan Σ_0, il existera une fonction de l'ensemble (K) dont la dérivée normale prendra sur Σ_0 les valeurs

$$\mathrm{V}(q) = \Gamma(q, \mathrm{M})$$

et notre méthode sera applicable.

NOTE

SUR LE SIGNE DE LA FONCTION DE GREEN.

Considérons un cylindre indéfini et l'équation (1). Il existe une fonction de Green tant qu'on a, au sens strict,

$$\Lambda + \alpha_1^2 > 0. \tag{54}$$

Je me propose de montrer que cette fonction de Green est toujours positive.

Nous utiliserons pour cela le fait suivant (§ **24**) : cette fonction de Green peut être considérée comme la limite de la fonction de Green d'un cylindre droit dont les bases s'éloignent indéfiniment de part et d'autre.

Nous allons, en supposant vérifiée l'inégalité (54), montrer que la fonction de Green d'un tel cylindre est toujours positive : le théorème annoncé en résultera évidemment.

Nous rattacherons ce fait à la propriété suivante :

Soit un volume fini quelconque V, *d'un seul tenant. Considérons sa fonction de Green* $G_V(M, P; \Lambda)$ *et soit* $-\alpha^2$ *la première constante caractéristique. Si* $\Lambda + \alpha^2$ *est positif, il en est de même de* G.

Lorsque Λ est positif ou nul, cette proposition est classique, et il n'y a pas lieu d'en donner ici la démonstration. Elle est un peu moins immédiate quand Λ appartient à l'intervalle $(-\alpha^2, 0)$.

Plaçons-nous dans cette hypothèse.

Quelle que soit la valeur Λ différente d'une constante caractéristique, il est aisé de démontrer qu'on a

$$\frac{\partial G_M^P}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{4\pi} \int\int\int_V G_M^Q G_Q^P \, dV_Q; \tag{55}$$

l'équation (55) est une équation intégro-différentielle à laquelle satisfait notre fonction $G(M, P; \Lambda)$. Soit $G(M, P)$ la fonction de Green ordinaire, c'est-à-dire relative à $\Lambda = 0$. La fonction $G(M, P; \Lambda)$ est la solution de (55) qui pour $\Lambda = 0$ se réduit à $G(M, P)$; elle est positive pour $\Lambda = 0$; faisons décroître Λ à partir de 0 ; d'après la forme même de l'équation (55), $\frac{\partial G}{\partial \Lambda}$ est négatif pour $\Lambda = 0$; donc si Λ reçoit une valeur négative $-\varepsilon$, de module très petit, nous aurons, quels que soient les deux points M et P,

$$G(M, P; -\varepsilon) > G(M, P, 0) > 0;$$

en raisonnant sur la valeur $-\varepsilon$, comme nous avons raisonné sur la valeur zéro, nous verrons de même que

$$G(M, P; -2\varepsilon) > G(M, P, -\varepsilon) > 0,$$

et ainsi de suite; ce raisonnement s'appliquera tant que nous ne franchirons pas la valeur singulière $-\alpha^2$.

En résumé, lorsque Λ croît de $-\alpha^2$ à $+\infty$, la fonction de Green est positive et décroît : elle décroîtra d'ailleurs, nous le savons, de $+\infty$ à 0 (M et P étant deux points fixes distincts quelconques, strictement intérieurs à l'aire).

Revenons à notre cylindre limite. La première constante caractéristique nous est donnée (§ 10) par

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \frac{\pi^2}{H^2}.$$

Si l'on a $\Lambda + \alpha_1^2 > 0$, on a *a fortiori* $\Lambda + \alpha^2 > 0$ et par suite la fonction de Green de ce cylindre droit est bien positive. Il en est de même du cylindre indéfini dont elle est la limite.

Remarque. — On démontre d'ailleurs aisément que l'équation (55) est valable pour la fonction de Green du cylindre indéfini; naturellement on suppose $\Lambda + \alpha^2 > 0$.