Bulletin de la S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 1-62 (supplément spécial)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__v1_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1913 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. VOLTERRA. ZEUTHEN.

Président..........................	MM. COSSERAT (F.).
Vice-Présidents....................	FONTENÉ. FOUCHÉ. MAILLET. VESSIOT.
Secrétaires........................	CARTAN. MONTEL.
Vice-Secrétaires...................	FATOU. HALPHEN.
Archiviste.........................	CAHEN.
Trésorier..........................	SERVANT.
Membres du Conseil (2)	ANDOYER, 1916. BLUTEL, 1915. BOULANGER, 1915. BRICARD, 1914. CARVALLO, 1916. D'OCAGNE, 1914. FOURET, 1915. GOURSAT, 1916. GRÉVY, 1914. GUICHARD, 1914. KOENIGS, 1915. LEBESGUE, 1915.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17e).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. ([1]).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5e).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6e).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7e).
1910. **ARCHIBALD** (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur adjoint honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, rue de l'Hospice, 69, à Châteauroux (Indre).
1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, quai de la République, 8, à Verdun (Meuse).
1906. **BARTHELS**, docteur en philosophie, professeur honoraire de Mathématiques, à Aschaffenburg (Bavière).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1912. **BERGER** (T.), Storgatan 16, à OErebro (Suède).
1904. **BERNSTEIN** (S.), docteur ès sciences, privat docent à l'Université, Apterkarsky, 22, à Kharkow (Russie).
1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Brémontier, 16, à Paris (17e). S. P.
1910. **BERTRAND** (G.), professeur à l'École Sainte-Geneviève, rue Lhomond, 18, à Paris (5e).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e) S. P.
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à la Technische Hochschule, Rütscherstrasse, 48, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger DU), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).
1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e). S. P.
1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des Ponts des Chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).
1896. **BOULANGER**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5e).
1896. **BOURGET** (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

([1]) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date de l'admission.

1896. **BOURLET**, docteur ès sciences, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, rue Raynouard, 56, à Paris (16e). S. P.
1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18e).
1904. **BOUTROUX** (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14e).
1911. **BRATU**, professeur, rue Galipeau, 3, à Antony (Seine).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14e).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. **BROWNE**, Collège des Irlandais, rue des Irlandais, 5, à Paris (5e).
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1893. **BURKHARDT**, professeur à la Technische Hochschule, Martinstrasse, 3, à Munich (Bavière).
1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16e).
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme (Italie).
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17e).
1896. **CARTAN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15e).
1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5e). S. P.
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), ancien astronome à l'Observatoire, cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
1888. **CHAILAN** (Édouard), professeur à l'Institut catholique, rue Denfert-Rochereau, 95, à Paris (14e).
1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6e).
1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1911. **CHATELET**, ancien élève de l'École Normale supérieure, rue de la Californie, 69, à Tours.
1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1901. **CLAIRIN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 *bis*, à Lille.
1896. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10e).
1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6e).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. **DELASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).

Date de l'admission.

1905. **DENJOY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, square Lagarde, 3, à Paris (5e).
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, Asylstrasse, 81, à Zurich (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Liberty Street, 55, New-York City.
1902 **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaÿa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1912. **EISENHARDT** (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. **FARAGGI**, professeur à Sétif (Algérie).
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-Parnasse, 172, à Paris (14e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).
1903. **FORD** (Walter B.), professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6e).
1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. **FRÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. **FUETER**, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9III, à Karlsruhe (Allemagne).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 32, à Paris (7e).
1900. **GALDEANO** (Z.-G. de), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7e).
1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).

Date
de
l'admission.

1908. **GARNIER**, docteur ès sciences, boulevard Arago, 99, à Paris (14e).
1911. **GAU**, maître des conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).
1907. **GOT** (Th.), ancien ingénieur de la marine, villa Bianca, rue Fanelli, quai Bompard, à Marseille.
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5e). S. P.
1912. **GRAMONT** (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthieu, 62, à Paris, (8e).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7e).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6e). S. P.
1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16e).
1907. **GUICHARD** (L.), rue Condorcet, 42, à Paris (9e).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 284, à Paris (14e).
1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.
1910. **HALPHEN** (Ch.), professeur de Géométrie descriptive au Collège Chaptal, Chaussée de la Muette, 8 *bis*, à Paris (16e).
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachere College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 *bis*, à Paris (17e). S. P.
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17e).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11e).

Date de l'admission.

1896. **JACQUET** (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5e).
1898. **JAHNKE** (E.), professeur à l'Académie des Mines, Darmstädter strasse, 11, à Berlin, W.15 (Allemagne).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7e). S. P.
1910. **KÉRAVAL**, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14e).
1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14e).
1913. **KORN** (A.), ancien professeur à l'Université de Munich, Schlüterstrasse, 25, à Charlottenburg (Allemagne).
1912. **KOWALEWSKI** (G.), professeur à la Technische Hochschule, Husgasse, 5, à Prague (Bohême).
1907. **KRYLOFF**, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17e).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. **LALESCO**, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. **LANCELIN**, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).
1899. **LANDAU**, professeur à l'Université, Herzbergerchaussee, 48, à Göttingen (Allemagne).
1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14e).
1908. **LATTÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14e).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17e). S. P.
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. **LEBESGUE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avenue de la Tourelle, 7, à Saint-Mandé.
1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. **LECORNU**, membre de l'Institut, Inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. **LEMOYNE** (T.), rue Claude-Bernard, 41, à Paris (5e).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. **LE ROY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6e).
1891. **LERY**, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. **LESCOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6e).
1909. **LÉVY** (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6e).
1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur des mines, professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne, à Saint-Étienne.
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).

Date
de
l'admission.

1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4e).
1912. **LOVETT** (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16e).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7e).
1895. **MAILLET**, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1912. **MALAISE** (J.), rue Grandgagnage, 7, à Liége (Belgique).
1905. **MALUSKI**, proviseur du lycée de Nimes.
1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue de Rambervilliers, 6, à Paris (12e).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).
1884. **MARTIN** (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1897. **MEHMKE**, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7e). S. P.
1902. **MERLIN** (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie, à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1907. **MERLIN** (Jean), astronome à l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. **MICHEL** (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14e).
1893. **MICHEL** (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1907. **MONTEL**, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15e).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. **MOORE** (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1903. **MULLER** (J.-O.), Venusbergerweg, 32, à Bonn (Allemagne).
1909. **NEOVIUS**, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.
1905. **OUIVET**, 49, rue d'Arras, à Douai.

Date de l'admission.

1873. **OVIDIO** (E. D'), professeur à l'Université, Corso Sommeiller, 16, à Turin (Italie).

1901. **PADÉ** (H.), recteur de l'Académie de Besançon.

1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6e).

1912. **PANGE** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François Ier, 32, à Paris (8e).

1888. **PAPELIER**, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.

1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.

1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.

1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17e).

1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26. à Belgrade (Serbie).

1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Pétersbourg.

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).

1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 *bis*, à Paris (8e).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).

1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.

1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).

1894. **POTRON** (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).

1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Münich (Bavière).

1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16e).

1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1903. **RÉMOUNDOS**, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).

1906. **REMY**, docteur ès sciences, ingénieur des mines, rue Jeanne-d'Arc, 25, à Arras (Pas-de-Calais).

1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.

1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), anc. élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.

1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7e).

1903. **ROCHE**, agrégé de mathématiques, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1909. **ROSENBLATT**, docteur en philosophie, rue Basztowa, 19, à Cracovie (Autriche).

Date
de
l'admission.

1908. **ROTHROCK**, Professeur à l'Université, à Bloomington (Indiana, États-Unis).
1896. **ROUGIER**, professeur au lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14e).
1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14e).
1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **SCHŒNFLIES**, professeur à l'Université, Schumannstrasse, 62, à Francfort (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Hollaendervez, 12, à Copenhague (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7e).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg. S. P.
1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. **SIRE**, docteur ès sciences, rue Royer-Collard, 4, à Paris (5e).
1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. **SPEISER** (Andreas), privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de Mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1912. **STEINHAUS** (H.), docteur de l'Université de Göttingen, à Jaslo (Rynek) (Autriche-Hongrie).
1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).
1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14e).
1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1882. **TARRY** (G.), membre de la Société Philomathique de Paris, boulevard de Strasbourg, 182, au Havre. S. P.
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5e).
1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1912. **TOUCHARD**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 15, à Paris (8e).
1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15e).
1907. **TRIPIER** (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e).
1911. **TURRIÈRE**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Poitiers.
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, rue de la Station, 149, à Louvain (Belgique).

Date
de
dmission.

1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1909. **VEIL** (M[lle] S.), licenciée ès sciences, boulevard de Strasbourg, 55, à Paris (10[e]).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 234, à Paris (14[e]).
1911. **VILLAT**, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5[e]).
1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7[e]).
1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8[e]).
1906. **WILSON** (E.-B.), professeur à l'Institut de technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. **WINTER**, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16[e]).
1909. **WOODS** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, quai de Passy, 14, à Paris (16[e]).
1912. **YOUNG** (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, à la Nonette de la Forêt, Genève (Suisse).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université, rue Sw. Anny, 12, à Cracovie (Autriche).
1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Acharnon, 41, à Athènes (Grèce).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIWET**, professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1911. **ZOARD DE GÉOCZE**, professeur à l'Université, V. Ker főréal, à Budapest (Hongrie).
1909. **ZORETTI**, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1912 : MM. COMBEBIAC, HABICH, LÉVY (L.), POINCARÉ, ROUART, TOUCHE.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — CANET. — CHASLES. CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. — HIRST. LAFFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — RAFFY. TANNERY (PAUL). — TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.		MM.
1873	CHASLES.	1894	PICQUET.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1895	GOURSAT.
1875	BIENAYMÉ.	1896	KŒNIGS.
1876	DE LA GOURNERIE.	1897	PICARD.
1877	MANNHEIM.	1898	LECORNU.
1878	DARBOUX.	1899	GUYOU.
1879	O. BONNET.	1900	POINCARÉ.
1880	JORDAN.	1901	D'OCAGNE.
1881	LAGUERRE.	1902	RAFFY.
1882	HALPHEN.	1903	PAINLEVÉ.
1883	ROUCHÉ.	1904	CARVALLO.
1884	PICARD.	1905	BOREL.
1885	APPELL.	1906	HADAMARD.
1886	POINCARÉ.	1907	BLUTEL.
1887	FOURET.	1908	PERRIN (R.).
1888	LAISANT.	1909	BIOCHE.
1889	ANDRÉ (D.).	1910	BRICARD.
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.	1911	LÉVY (L.).
1891	COLLIGNON.	1912	ANDOYER.
1892	VICAIRE.	1913	COSSERAT (F.).
1893	HUMBERT.		

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark.
Cracovie	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax	Nova Scotian Institute of Science.	Nlle-Écosse (Canada)
Hambourg	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres..........	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg......	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.........	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico...........	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan............	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou...........	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich...........	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples...........	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.......	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York........	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa...........	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme..........	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris............	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris............	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris............	Société philomathique de Paris.	France.
Paris............	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris............	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris............	Institut des Actuaires français.	France.
Paris............	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise.............	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.............	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.............	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague...........	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague...........	*Casopis pro péstováni mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague...........	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton........	*Annals of Mathematics.*	New-Jersey, États-Unis
Rennes...........	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome............	Académie Royale des *Lincei.*	Italie
Rome............	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome............	Società per il progresso delle Scienze.	Italie
Saint-Pétersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia...........	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm........	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm........	*Archiv for Matematik.*	Suède.
Stockholm........	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo...........	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.........	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin............	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal...........	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.........	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise...........	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne...........	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne...........	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Zagreb (Agram)..	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich...........	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 23 OCTOBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

M. le Président prononce quelques paroles au sujet de la mort de M. H. Poincaré et de celle de M. L. Lévy et associe la Société mathématique au deuil de leurs familles.

Sur sa proposition, la séance est levée en signe de deuil.

SÉANCE DU 13 NOVEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. CARTAN.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. W.-H. Young, présenté par MM. E. Picard et H. Lebesgue.

Communication :

M. Bioche : *Sur l'aire latérale du cône de révolution tronqué.*

L'auteur établit la formule

$$\Sigma = \pi \frac{SA + SA'}{2} \sqrt{SA.SA'} \sin \frac{1}{2} \widehat{ASA'},$$

dans laquelle Σ désigne l'aire latérale, S le sommet du cône, A et A′ les extrémités du grand axe de l'ellipse de section.

SÉANCE DU 27 NOVEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. J. Touchard, présenté par MM. Appell et d'Ocagne.

Communications :

M. P. Fatou : *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.*

L'auteur avait montré dans sa Thèse (*Acta math.*, t. XXX, p. 398) l'intérêt que présente l'étude des points de convergence absolue des séries trigonométriques et avait établi qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ où $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ne peut être absolument convergente pour les points d'un intervalle, si petit soit-il, sans que la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge. Récemment M. Denjoy et M. Lusin sont revenus sur ce sujet dans les *Comptes rendus* et ont montré que la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est nécessairement convergente si l'ensemble des points de convergence absolue a une mesure non nulle. M. Fatou établit d'abord ce théorème en ne s'appuyant que sur les principes fondamentaux de la théorie de la mesure. Il remarque ensuite, à l'aide de la transformation très simple

$$A_n(x_0 + h) + A_n(x_0 - h) = 2 A_n(x_0) \cos nh,$$

que, si x_0 est un point de convergence absolue, les points de convergence absolue, de convergence ordinaire, de divergence, de sommabilité; les arcs de convergence uniforme sont deux à deux symétriques par rapport à x_0. Donc, si les points de convergence absolue sont en nombre fini, ce sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de rayon un; s'ils sont en nombre infini, leur ensemble est partout dense sur la circonférence. Une dernière remarque, susceptible d'applications diverses, permet de retrouver ce résultat de M. Lusin que, dans l'hypothèse de l'existence d'une infinité de points de convergence absolue, la mesure de l'ensemble des points de convergence est égale à 0 ou à 2π.

M. H. Lebesgue : *Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire.*

Soit un domaine D et une fonction f continue sur la frontière F de D, le problème de Dirichlet ordinaire consiste à trouver une fonction harmonique V continue dans D et sur F et se réduisant sur F à la fonction f donnée. Lorsque la fonction V existe quelle que soit la fonction continue f on dit que le problème de Dirichlet est possible pour le domaine D.

L'auteur rappelle qu'il a démontré dans les *Rendiconti* de Palerme que le problème de Dirichlet est possible pour tous les domaines plans qui sont des ensembles ouverts bornés et tels que tout point de leur frontière appartienne à un continu frontière. De sorte, par exemple, que tous les domaines limités par un nombre fini de courbes ordinaires rentrent dans cette catégorie. Le cas de l'espace conduit à des résultats tout différents; il existe dans l'espace des domaines simplement connexes limités par des surfaces de révolution dont la méridienne est une courbe analytique présentant un seul point singulier et pour lesquelles le problème de Dirichlet est impossible.

Considérons un segment OA porteur d'une masse attirante dont la densité, en chaque point P, est égale à la distance OP. Les surfaces équipotentielles $V = \alpha$ sont des surfaces de révolution entourant le segment attirant; pour $\alpha \geqq 1$ elles passent par le point O, en lequel $V = 1$. Soit D le domaine limité par les deux surfaces équipotentielles $V = 2$, $V = \frac{1}{2}$; si l'on essaie de résoudre le problème de Dirichlet pour ce domaine avec, comme fonction continue f sur sa frontière, une fonction égale au potentiel, sauf en O où l'on prendra $f = 2$ pour la continuité, on voit facilement que, si ce problème avait une solution, ce serait la fonction potentielle dont on est parti, laquelle ne satisfait pas en O aux conditions de continuité du problème.

Le problème de Dirichlet est donc impossible pour ce domaine D. En modifiant légèrement l'exemple indiqué on arriverait à un domaine simplement connexe de la nature indiquée ci-dessus.

M. P. Montel : *Sur quelques généralisations nouvelles des théorèmes de M. Picard.*

Dans un travail récent (¹), l'auteur a étudié systématiquement les

(¹) *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent dans un domaine des valeurs exceptionnelles* (*Annales de l'École normale*, 1912, p. 487).

familles de fonctions holomorphes dans un domaine D où elles ne prennent ni la valeur zéro, ni la valeur un, ou bien ne prennent qu'un nombre fini de fois ces valeurs. Il en a déduit des démonstrations et des extensions nouvelles des propositions classiques de MM. Picard, Landau, Schottky.

Il s'occupe maintenant des familles de fonctions méromorphes dans un domaine D. Soient m, n, p des entiers dont la somme des inverses est inférieure à l'unité et considérons les équations

$$(\alpha) \qquad f(x) = 0 \qquad f(x) = 1 \qquad f(x) = \infty.$$

Les racines de la première équation, dont l'ordre de multiplicité est divisible par m, seront appelées *régulières* et les autres seront dites *irrégulières*. Les mêmes dénominations s'appliquent aux autres équations en remplaçant m par n ou par p. En substituant une fonction de Schwarz à la fonction modulaire qui joue, dans ces questions, un rôle fondamental, on démontre, avec MM. Carathéodory et Landau [1], que la famille des fonctions $f(x)$ méromorphes dans un domaine D où toutes les racines des équations (α) sont régulières, forment une famille *normale*, c'est-à-dire que toute suite infinie de fonctions de la famille admet au moins une fonction limite méromorphe qui peut être une constante finie ou infinie. On est alors conduit aux propositions suivantes :

I. *Si $f(x)$ est méromorphe dans tout le plan, l'une au moins des équations (α) admet une racine irrégulière.*

II. *Si*

$$a_0 + a_1 x + \ldots \qquad (a_1 \neq 0)$$

est le développement taylorien d'une fonction $f(x)$ autour de l'origine, il existe un nombre R *dépendant de a_0 et a_1 seulement, tel que, dans tout cercle de centre origine et de rayon plus grand que* R, *une des équations (α) ait une racine irrégulière, ou la fonction $f(x)$ un point singulier essentiel.*

III. *Dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé d'une fonction $f(x)$, l'une au moins des équations (α) admet une infinité de racines irrégulières.*

Dans le cas où $m = n = p = \infty$, on retrouve des propositions classiques.

---

(1) *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften*, 1911, p. 605).

M. Bioche : *Sur les courbes de largeur constante.*

L'auteur présente le tracé de la courbe enveloppe de la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (8 + \cos 3 \alpha) = 0.$$

Cette courbe est convexe, chaque normale est orthogonale à la courbe aux deux points où elle la coupe et la distance de ces points est 16. La longueur de la courbe est 16π. Euler avait signalé dans un Mémoire de l'Académie de Saint-Pétersbourg, daté de 1778, des courbes de cette espèce possédant des propriétés qu'on aurait pu croire caractéristiques du cercle.

SÉANCE DU 11 DÉCEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communication :

M. Halphen : *Sur un problème d'énumération.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu à l'unanimité M. Tage Berger, présenté par MM. von Koch et Émile Borel.

Communications :

M. E. Cahen : *Sur un théorème généralisation des lois de réciprocité.*

M. Kellogg : *Sur l'indépendance linéaire des fonctions de plusieurs variables.*

Il semble qu'on n'ait pas encore précisé les conditions pour l'indépendance linéaire des fonctions de plusieurs variables, au moins pas les conditions différentielles. Les conditions de Gram permettent de décider la question moyennant des intégrales définies, mais il m'a paru utile de donner des conditions analogues à celles qui, pour le cas d'une variable indépendante, se rattachent aux déterminants de Wronski.

Pour plus de simplicité dans l'écriture, je me borne à des fonctions de deux variables. Les résultats sont généraux.

Soient $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ des fonctions d'une seule détermination en chaque point d'un domaine D. Nous admettons que ce domaine est tel qu'on puisse passer de chacun de ses points à chaque autre par des chemins continus qui contiennent seulement des points intérieurs à D.

Appelons $M_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ la matrice

$$\left\| \begin{matrix} f_1, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} f_1}{\partial x^{n-1}} & \dfrac{\partial^{n-1} f_1}{\partial x^{n-2}\partial y} & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} f_1}{\partial y^{n-1}} \\ f_2, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} f_2}{\partial x^{n-1}} & \dfrac{\partial^{n-1} f_2}{\partial x^{n-2}\partial y} & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} f_2}{\partial y^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \\ f_n, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} f_n}{\partial x^{n-1}} & \dfrac{\partial^{n-1} f_n}{\partial x^{n-2}\partial y} & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} f_n}{\partial y^{n-1}} \end{matrix} \right\|.$$

Cette matrice contient toutes les dérivées de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des ordres $1, 2, \ldots, n-1$.

Pour les fonctions analytiques en chaque point de D, *la condition nécessaire et suffisante pour une relation linéaire avec des coefficients constants non tous nuls entre $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est que le rang de $M_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ soit constamment moindre que n.*

Le rang de M_n est évidemment fonction de x et y. Si nous appelons le maximum de cette fonction dans D *le rang de* M_n *en* D, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si r est le rang de M_n en D, toutes les n fonctions sont en D des combinaisons linéaires avec coefficients constants de r de ces fonctions, mais non pas d'un nombre moindre de ces fonctions.

Pour les fonctions non analytiques, nous devons supposer l'existence des dérivées qui se trouvent dans M_n. Nous admettons de plus que ces dérivées sont finies et indépendantes de l'ordre de différentiation.

Si le rang de $M_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ en D est $n-1$, tandis qu'à chaque point de D le rang de $M_{n-1}(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ est aussi $n-1$, il existe une relation linéaire avec coefficients constants entre les f, et le coefficient de f_n sera différent de zéro.

Remarques :

1° Il ne semble pas nécessaire d'insister sur le fait que les conditions du déterminant de Wronski formé avec les dérivées par rapport à x et le déterminant formé avec les dérivées par rapport à y soient nuls ne sont pas suffisantes pour une relation linéaire entre les f avec des coefficients constants. Les fonctions $(x-1)$, $(y-1)$, $(xy-1)$ le montrent.

2° Pasch (*Journal für reine u. angewandte Math.*) examine des déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1 & \delta f_1 & \ldots, & \delta^{n-1} f_1 \\ f_2 & \delta f_2 & \ldots, & \delta^{n-1} f_2 \\ f_n & \delta f_n & \ldots, & \delta^{n-1} f_n \end{vmatrix}$$

où

$$\delta f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k,$$

comme extensions des déterminants de Wronski. Mais, il n'est pas suffisant que ce déterminant soit nul pour qu'il existe une relation linéaire, comme le montrent les trois fonctions $x, y, 1$.

SÉANCE DU 8 JANVIER 1913.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et d'une partie du Conseil; elle entend le Rapport de la Commission des comptes et en approuve les conclusions à l'unanimité.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société, M. Korn, présenté par MM. Picard et Montel, et M. Malaise, présenté par MM. Laisant et Neuberg.

Communications :

M. Sire : *Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières.*

La fonction entière $h(y) = c + iyg(y^2)$, où

$$g(y^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^{2\nu}}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\nu\sigma)} \qquad (\sigma > 0)$$

et où c est un nombre positif supérieur à β $\left[\beta = \frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)}\right]$ converge uniformément vers le nombre positif $c + \beta$ lorsque y s'éloigne à l'infini en restant à l'intérieur de l'un des deux angles :

$$\frac{\pi\sigma}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \theta \leqq \pi - \frac{\pi\sigma}{4} - \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\pi + \frac{\pi\sigma}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \theta \leqq 2\pi - \frac{\pi\sigma}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\varepsilon \text{ nombre positif arbitraire}),$$

tandis qu'elle converge uniformément vers le nombre positif $c - \beta$ lorsque y s'éloigne à l'infini en restant à l'intérieur de l'autre angle.

Soient C le cercle concentrique à l'origine O et de rayon 1, C_1 la demi-circonférence de ce cercle située au-dessus de l'axe des quantités réelles. Divisons cette demi-circonférence C_1 en trois parties égales et excluons tous les points intérieurs au sens étroit à l'arc médian, de même que tous les points intérieurs au sens étroit à l'arc de la circonférence C diamétralement opposé au précédent. Opérons de même pour chacun des arcs restants de C et continuons ainsi indéfiniment. Nous désignerons par E l'ensemble des points restants de la circonférence, les extrémités de C_1 étant supposées également enlevées. Le nombre des arcs de la demi-circonférence C_1 enlevés pendant la $n^{\text{ième}}$ opération est égal à $\lambda(n) = 2^{n-1}$, nous désignerons par σ_n leur longueur commune et par $\theta_{n,j}$ l'angle que fait la demi-droite joignant le point O au milieu de l'un de ces arcs avec l'axe des quantités réelles et positives. Posons

$$f_n(y) = \sum_{j=1}^{\lambda(n)} f_{n,j}(y)$$

où $f_{n,j}(y)$ est la fonction qui se déduit de la fonction $h(y)$ considérée plus haut, en remplaçant σ par σ_n, y par $ye^{-i\theta_{n,j}}$, et c par le nombre $c_{n,j}$ convenablement choisi, et désignons par η_n le maximum de $f_n(y)$ dans la région du plan dont tous les points sont extérieurs au sens large aux angles ayant l'origine O pour sommet et interceptant entre leurs côtés les arcs de la circonférence C exclus à la $n^{\text{ième}}$ opération. Si nous déterminons la suite des nombres positifs $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ...,

$\varphi(n), \ldots$ de telle façon que $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(y)}{\varphi(n)}$ soit une fonction entière et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{\varphi(n)}$ soit une série convergente, la fonction $f(y)$ convergera vers l'infini lorsque y s'éloignera à l'infini en suivant un rayon OM joignant l'origine au milieu d'un des arcs de la circonférence C exclus et elle convergera vers un nombre positif μ lorsque y convergera vers l'infini en suivant une demi-droite OL joignant l'origine à un point quelconque de E. A deux rayons OL distincts correspondront deux nombres μ distincts, l'ensemble des limites μ aura donc la puissance du continu. Il en résulte que l'*ensemble des points singuliers transcendants de la fonction inverse de cette fontion $f(y)$ a la puissance du continu.*

M. Andoyer : *Sur un changement de variables.*

Si dans le mouvement elliptique d'une planète, on désigne par ε, u, M l'excentricité, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne; puis que l'on pose

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iM}, \qquad y_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iu},$$

$$\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iM}, \qquad y_2 = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iu},$$

en nommant e la base des logarithmes népériens et i l'imaginaire $\sqrt{-1}$; ces variables seront liées entre elles par les relations

$$\lambda_1 = y_1 e^{y_2 - y_1},$$
$$\lambda_2 = y_2 e^{y_1 - y_2}.$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, y_1 et y_2 se réduisent à zéro; de plus, le déterminant fonctionnel de λ_1 et λ_2 par rapport à y_1 et y_2 n'est autre que $1 - y_1 - y_2$.

Par suite, y_1, et y_2 sont des fonctions holomorphes de λ_1 et λ_2 lorsque ces variables sont de modules suffisamment petits. Il s'agit de déterminer les rayons des cercles de convergence associés pour les développements de y_1 et y_2 en séries doubles procédant suivant les puissances de λ_1 et λ_2.

La question est facile à résoudre si l'on admet que la convergence a lieu tant que, pour des valeurs quelconques x_1 et x_2 prises à l'intérieur de deux cercles de rayons ρ_1 et ρ_2, le déterminant fonctionnel $1 - y_1 - y_2$ ne s'annule pas; et l'on retrouve ainsi très aisément, en les complétant, les résultats classiques sur la convergence des séries du mouvement elliptique ordonnées par rapport aux puissances de l'excentricité.

Mais le vrai problème est de savoir si l'hypothèse admise est exacte ; si cette généralisation des théorèmes bien connus relatifs aux fonctions d'une seule variable est légitime. M. Andoyer pose la question et serait heureux qu'on levât ses scrupules à ce sujet.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES.

(MM. G. Fouret, G. Humbert; Ch. Bioche, rapporteur.)

Messieurs et chers Collègues,

Conformément à l'article 16 de nos Statuts et aux articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée, par votre Conseil d'administration, de vous faire un rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

Les comptes de l'exercice clos s'étendant du 1er novembre 1911 au 31 octobre 1912, s'établissent comme il suit :

États des recettes et des dépenses courantes.

	fr
En caisse au 1er novembre 1911	1051,19

Recettes.

Cotisations	4085,00
Abonnements au *Bulletin*, vente de Volumes et Tables	1441,95
Subvention du Ministère	1000,00
Intérêts et revenus	1494,20
Total de l'actif	9072,34

Dépenses.

Bulletin (t. XL) : composition, impression, brochage, expédition	fr 5907,48
Tirages à part	421,25
Traitement de l'agent, gratifications	490,00
Frais de bureau, frais de poste, divers	316,75
Total des dépenses	7135,48
Excédent de l'actif au 31 octobre 1912	1936,86
Total comme ci-dessus	9072,34

PORTEFEUILLE DISPONIBLE.

Il y avait au 31 octobre 1911, à titre de réserve disponible, 498fr de rente 3 pour 100 sur l'État, ayant coûté	fr 16313,09
Excédent d'actif disponible en espèces	1936,86

Réserve inaliénable (art. 13 des Statuts).

La réserve inaliénable se composait, au 1er novembre 1911, de :

1° En portefeuille, 886fr de rente 3 pour 100 sur l'État et 3 obligations des chemins de fer de l'Ouest à 3 pour 100, ayant coûté ensemble	fr 24947,46
2° En espèces	350,33
Dans le cours de l'exercice 1911-1912 il a été encaissé pour droits d'entrée de nouveaux membres, ou versements sur une cotisation perpétuelle	fr 210,00
ce qui constituait, au 31 octobre 1912, un total en espèces de	560,33

A titre de renseignement, je mentionnerai l'achat, sur l'excédent d'actif disponible, de deux obligations des Chemins de fer du Sud, achat effectué postérieurement au 1er novembre 1912 et qui, par suite, ne devait pas être mentionné dans le bilan précédemment établi.

Dans ce bilan j'ai donné, comme on l'avait fait dans les rapports antérieurs, le prix d'achat des valeurs appartenant à la Société mathématique de France; par suite de la dépréciation des valeurs, les titres figurant au portefeuille disponible se trouvent représenter un capital inférieur au prix d'achat. Ce prix d'achat se montait à 16313^{fr},09 et la valeur de l'ensemble de nos titres, au 23 décembre 1912, n'était que de 14807^{fr},20. Mais heureusement la situation financière de la Société est loin de nécessiter une vente des titres actuellement en portefeuille.

En effet, les dépenses courantes pour l'exercice 1911-1912, sont un peu inférieures aux recettes, même en faisant abstraction du reliquat en espèces existant au 1er novembre 1911. Cela tient surtout, d'une part à une légère diminution du prix de revient du *Bulletin*, d'autre part à une augmentation de la subvention donnée par le Ministère de l'Instruction publique. Celui-ci ayant supprimé la subvention attribuée à la Commission du Répertoire bibliographique, une part de cette subvention a été reportée sur la subvention à la Société mathématique de France, qui a passé ainsi de 400^{fr} à 1000^{fr}.

Nous pouvons donc continuer, sans inconvénient pour nos finances, à distribuer, comme on l'a fait l'an dernier, les fascicules mensuels donnant l'indication des Communications à l'ordre du jour, avec un résumé des Communications faites dans les séances antérieures et les différents renseignements qu'il peut être utile de porter à la connaissance des membres de la Société. Ces fascicules semblent d'ailleurs intéresser beaucoup de nos collègues, et être utiles pour la propagande.

Le recouvrement des cotisations s'est effectué de façon assez satisfaisante; le total des cotisations perçues qui avait un peu fléchi l'an dernier, est remonté au-dessus de ce qu'il était en 1910. Il y avait, en 1910, 4005^{fr} de cotisations, en 1911, 3918^{fr},50, et il y a 4085^{f} en 1912.

Notre trésorier, M. Servant, vous prie de vouloir bien l'autoriser à remettre une gratification de 100^{fr} à la personne qui a été chargée par lui de mettre en ordre la comptabilité.

Nous vous prions de voter des remercîments à notre trésorier, ainsi qu'aux secrétaires MM. Cartan et Montel qui donnent leurs soins à l'administration de la Société et à la publication du *Bulletin*, et d'approuver, avec les comptes qui vous sont présentés, les conclusions du présent rapport.

Ch. Bioche.

SÉANCE DU 22 JANVIER 1913.

PRÉSIDENCE DE M. F. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Bouligand, présenté par MM. Borel et Montel, et M. Delville, présenté par MM. Baire et Montel.

Communications :

M. R. Bricard : *Sur les mouvements plans à deux paramètres doublement décomposables.*

Soient A_0 une figure fixe, A_1 une figure de grandeur invariable dont la position par rapport à A_0 dépend d'un paramètre, A_2 une seconde figure de grandeur invariable dont la position par rapport à A_1 dépend d'un nouveau paramètre indépendant du premier. Si l'on fait varier les deux paramètres de toutes les manières possibles, A_2 se trouve animée par rapport à A_0 d'un mouvement à deux degrés de liberté (ou à deux paramètres), d'une nature particulière, et que j'appellerai avec M. Kœnigs *mouvement décomposable* (on peut de même définir des mouvements décomposables, dont le degré de liberté dépasse le second).

M. Kœnigs m'a signalé qu'il serait intéressant de rechercher s'il existe des mouvements à deux paramètres décomposables de plus d'une manière, c'est-à-dire tels que la figure intermédiaire A_1, dont il est question plus haut, puisse être au moins d'une manière remplacée par une autre, le mouvement à deux paramètres de A_2 restant le même.

Le problème conduit à une équation fonctionnelle compliquée, même dans le cas des mouvements plans auxquels j'ai, jusqu'ici, borné mes recherches (*voir* cependant, plus loin, le n° 4). J'ai obtenu diverses solutions, parmi lesquelles je citerai les suivantes :

1. Soit ABCD un parallélogramme. Construisons huit roues dentées α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2; deux roues désignées par la même lettre grecque affectée d'indices différents étant solidaires l'une de l'autre et ayant pour centre commun le sommet du parallélogramme désigné par la lettre latine correspondante. Les roues α_1 et β_2, β_1 et γ_2, γ_1 et δ_2, δ_1 et α_2 engrènent en des points qui appartiennent natu-

rellement aux côtés du parallélogramme et qu'il faut supposer en ligne droite.

Cela posé, si le parallélogramme ABCD, dont les côtés ont des longueurs invariables, est susceptible de déformation, on constate que le mécanisme que je viens de définir possède une liberté *du second degré*. Autrement dit, les angles du parallélogramme et l'orientation de l'une des roues par rapport à l'un des côtés qui se coupent en son centre, peuvent varier indépendamment. Si donc on fixe le système A_0 des roues α_1 et α_2, la figure A_2 constituée par le système des roues γ_1 et γ_2 se trouve posséder un mouvement à deux paramètres doublement décomposable. Le rôle de la figure A_1 peut être joué, soit par le système (β_1, β_2), soit par le système (δ_1, δ_2). Dans l'un et l'autre cas, A_1 est animée d'un mouvement épicycloïdal par rapport à A_0, et A_2 est animée d'un mouvement épicycloïdal par rapport à A_1.

On peut donner au mouvement à deux paramètres que je viens de définir le nom de *mouvement doublement épicycloïdal.* A la condition près que le cercle, base du second des mouvements épicycloïdaux ordinaires en lesquels il se décompose, soit concentrique au cercle roulant du premier mouvement, il est aussi général que possible. Le fait qu'un tel mouvement est doublement décomposable est à rapprocher du théorème bien connu sur la double génération des épicycloïdes.

2. On peut constituer un mécanisme analogue au précédent et jouissant des mêmes propriétés, en remplaçant le parallélogramme ABCD par un contre-parallélogramme, les points de contact des roues dentées étant cette fois assujettis à se trouver sur une parallèle aux diagonales AC et BD du contre-parallélogramme. Les huit roues sont alors égales deux à deux. Ce mécanisme peut être combiné avec le précédent et l'on trouve un mouvement doublement épicycloïdal particulier décomposable de *quatre* manières différentes.

3. On peut généraliser les mécanismes qui précèdent en remplaçant les roues dentées par des cames en spirale logarithmique. Pour l'indication précise de la construction, je renvoie au travail plus développé que je ferai paraître sur le sujet.

4. Considérons enfin deux quadrilatères articulés ABCD et A'B'C'D', les sommets désignés par une même lettre accentuée ou non étant réunis par une tige rigide, articulée en ces deux sommets. Le mécanisme ainsi constitué est, en général, déformable avec un seul paramètre. Il devient déformable avec deux paramètres quand

tous les quadrilatères de la figure sont des parallélogrammes (cas banal) et, ce qui est plus remarquable, quand ce sont tous des contre-parallélogrammes. On voit alors qu'en fixant AB, la tige C'D' possède un mouvement à deux paramètres décomposable de deux manières différentes, suivant qu'on prend comme figure intermédiaire A'B' ou bien CD ([1]).

Il est intéressant de constater que ce dernier mécanisme peut être construit sur la sphère, ce qui conduit à un mouvement autour d'un point fixe, à deux paramètres et doublement décomposable.

M. Zoàrd de Gëocze: *Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale à zéro et qui remplit un cube.*

Les variables réelles et indépendantes u et v variant entre les limites o et 1, soient $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ des fonctions uniformes, bornées et continues de ces variables. En désignant par x, y, z des coordonnées rectangulaires,

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v)$$

seront donc les équations d'une surface S.

Nous adoptons pour la définition de l'aire de S la définition donnée par M. Lebesgue dans sa *Thèse*, et nous allons montrer que S peut être telle que son aire est égale à zéro et qu'elle remplit un cube.

Nous montrons d'abord que, lorsque les fonctions φ, ψ, χ *ne dépendent que de* v, *l'aire de* S *est égale à zéro.*

En considérant u et v comme des coordonnées rectangulaires, partageons le carré P

$$0 \leqq u \leqq 1, \qquad 0 \leqq v \leqq 1$$

en g^2 carrés, par des droites parallèles respectivement à l'axe des u et à l'axe des v. Partagons chacun de ces deux carrés en deux triangles par la diagonale qui est parallèle à la droite

$$u + v = 0.$$

Le carré P sera donc divisé en $2g^2$ triangles. Soient A, B, C les sommets de l'un de ces triangles. M étant un point de P, désignons par M_0 le point dont les coordonnées x, y, z sont égales à $\varphi(u, v)$,

([1]) La figure constituée par ce mécanisme peut être considérée comme la position de l'hexaèdre déformable, ayant pour faces des contre-parallélogrammes, qui a fait l'objet d'un article paru récemment dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (numéro de janvier 1913, p. 24).

$\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ respectivement, u, v étant, bien entendu, les coordonnées de M. Construisons le triangle rectiligne dont les sommets sont A_0, B_0, C_0. La réunion des $2g^2$ triangles $A_0B_0C_0$ sera une surface polyédrale Δ_g. On prouve facilement que (même dans le cas où φ, ψ, χ dépendent aussi de u) Δ_g est une surface

$$x = \varphi_g(u, v), \qquad y = \psi_g(u, v), \qquad z = \chi_g(u, v)$$

telle que, pour $g = \infty$, φ_g, ψ_g, χ_g tendent uniformément vers φ, ψ, χ respectivement.

Mais, dans le cas que nous considérons, φ, ψ, χ ne dépendent que de v, chacun des $2g^2$ triangles qui forment Δ_g sera une distance rectiligne ou un point. Car, d'après le choix des A, B, C, deux de ces points ont la même coordonnée u, et ainsi, au moins deux des points A_0, B_0, C_0 coïncident.

Ainsi, l'aire de chacun des $2g^2$ triangles qui forment Δ_g est égale à zéro, *donc l'aire de Δ_g est égale à zéro.*

Ainsi l'aire de S, qui est par définition la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent uniformément vers S, est égale à zéro. On sait qu'on peut trouver des fonctions $\bar{\varphi}(v)$, $\bar{\psi}(v)$, $\bar{\chi}(v)$ de v, qui sont uniformes, bornées et continues lorsque v varie entre o et 1 et telles que la ligne courbe

$$x = \bar{\varphi}(v), \qquad y = \bar{\psi}(v), \qquad z = \bar{\chi}(v)$$

remplisse un cube (courbe de M. Peano).

La surface S_1 *qui est définie par les équations*

$$x = \varphi(u, v) = \bar{\varphi}(v), \qquad y = \psi(u, v) = \bar{\psi}(v), \qquad z = \chi(u, v) = \bar{\chi}(v)$$

est donc telle que son aire est égale à zéro et qu'elle remplit un cube.

L'exemple est assez banal. Mais on peut en tirer plusieurs conséquences curieuses. Je ne cite qu'une de ces conséquences. En considérant que S_1 remplit un cube, que son aire est égale à zéro et que l'aire de la projection orthogonale d'une surface polyédrale sur un plan est au plus égale à l'aire de la surface polyédrale, on voit que :

La projection orthogonale d'une surface sur un plan quelconque peut avoir une mesure intérieure et plane α (dans le sens de M. Jordan) *positive, tandis que la projection orthogonale d'une surface polyédrale qui tend vers la surface, sur le même plan, est plus petite que* $\frac{\alpha}{2}$.

Mais il convient de remarquer que la surface S_1 étant, comme il est facile de le voir, telle qu'elle n'est pas une image biunivoque de P, il est très probable que ce fait curieux ne se présente pas pour une surface qui est une image biunivoque de P.

M. Lebesgue : *Observations sur la Communication précédente.*

Le fait, d'énoncé si paradoxal, signalé par M. Zoàrd de Gëocze, est cependant d'accord avec l'intuition la plus immédiate, puisque M. Zoàrd de Gëocze prouve en somme seulement que l'aire d'une courbe est nulle, quelque compliquée que soit cette courbe. Quant à la question de savoir si toute surface d'aire nulle est en réalité une courbe, pour la préciser il faudrait pouvoir dire ce que c'est qu'une vraie surface qui n'est pas une courbe. Il est évident que toute surface d'aire nulle définie à l'aide de deux paramètres u, v n'est pas nécessairement susceptible d'être considérée comme une courbe définie à l'aide du paramètre v_1, u_1 et v_1 étant deux fonctions de u et v telles que les courbes $u_1 = \text{const.}$, $v_1 = \text{const.}$ partagent le plan des u, v en quadrilatères curvilignes comme cela arriverait s'il s'agissait d'un changement de variables analytique. Mais il paraît probable à M. Lebesgue qu'on doit toujours pouvoir tracer dans le plan des u, v une courbe c ne remplissant pas tout le domaine δ considéré du plan des u, v, ne remplissant même aucun domaine partiel pris dans δ, et telle cependant que la courbe c correspondante tracée sur la surface d'aire nulle passe par tous les points de cette surface.

M. Zoàrd de Gëocze a d'ailleurs prouvé antérieurement qu'une surface sans points multiples, c'est-à-dire une surface image biunivoque d'un domaine du plan des u, v, a une aire supérieure à zéro.

Quant au fait signalé par M. Zoàrd de Gëocze, qu'une surface peut être d'aire nulle sans que soit nulle la mesure superficielle de la projection de ses points sur le plan des xy, il découle de suite des définitions et se présente dès la considération des aires des surfaces planes.

Soit D un domaine plan limité par une courbe fermée sans point multiple C ; l'aire de D, considéré comme surface, étant par définition la plus petite limite des aires de surfaces polyédrales qui tendent vers D, est la plus petite limite des aires des polygones du plan de D dont les contours tendent vers C ; c'est ce qu'on appelle l'*étendue intérieure,* au sens de M. Jordan, du domaine D, ou la mesure du domaine ouvert D. Mais cette étendue intérieure peut être inférieure à la mesure de l'ensemble des points du domaine fermé D, laquelle mesure est l'étendue extérieure, au sens de M. Jordan, de ce domaine. (*Voir* la Thèse de M. Lebesgue, Chap. I et IV.)

Soient A et B deux points de C qui divisent C en deux arcs C_1 et C_2. Laissant C_1 fixe, faisons varier C_2 de façon que C_2 tende vers C_1 en diminuant continuellement D. A la limite D se réduira à C_1, mais pourra toujours être considéré comme une surface; son aire, l'étendue intérieure de D, sera nulle mais l'ensemble des points de D ou de C_1 a une mesure superficielle qui n'est pas nécessairement nulle (Thèse, p. 17 en note).

Si nous avions considéré une surface S, $z = f(x, y)$, dont la projection sur le plan des xy est le domaine D, quand D se réduit à C_1 la surface S, qui se réduit elle aussi à une courbe, a alors une *aire* nulle et la *mesure* des points de sa projection n'est pas nécessairement nulle; mais l'*aire* de cette projection est nulle. La surface S_1 de M. Zoàrd de Gëocze est analogue à la précédente : si l'on va du point o, o du plan des u, v au point 1, 1 suivant deux côtés du carré ou les deux autres, on décrit sur S_1 deux arcs Γ_1 et Γ_2 qui constituent les frontières de S_1 et qui sont confondus; leur commune projection est une courbe γ à laquelle se réduit la projection de S_1. Seulement, dans le cas de M. Zoàrd de Gëocze, cette courbe γ est fort compliquée, tandis que dans ce qui précède la courbe analogue C_1 avait été choisie sans points multiples.

Nous ne nous étonnerions pas d'énoncés de la nature de ceux de M. Zoàrd de Gëocze, s'il ne nous arrivait pas d'oublier qu'une courbe ou une surface n'est pas définie par la seule connaissance de l'ensemble de ses points, mais qu'il faut de plus savoir comment ces points sont ordonnés. Nous ne serions pas surpris alors qu'une surface passant par tous les points d'un cube ou d'un carré puisse avoir une aire nulle ou une aire aussi petite qu'on le veut, quelle que soit la mesure superficielle ou volumétrique de l'ensemble de ses points. Fait qu'on peut expliquer, un peu trop succinctement à la vérité, en disant que, dans l'évaluation de l'aire, les points du contour n'interviennent pas alors qu'ils interviennent dans l'estimation de la mesure.

Comme nous ne confondrions jamais l'aire d'une surface portée par un plan avec la mesure superficielle des points de cette surface, du fait que l'aire d'une surface est toujours au moins égale à l'aire d'une quelconque de ses surfaces projections, nous ne serions pas tentés de conclure que l'aire d'une surface ne peut être moindre que la mesure superficielle de l'ensemble des points d'une surface projection.

La Note de M. Zoàrd de Gëocze met bien en évidence la nécessité de ces distinctions.

SÉANCE DU 12 FÉVRIER 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

SÉANCE DU 26 FÉVRIER 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Podtiaguine, présenté par MM. Appell et Borel, et M. Giraud, présenté par MM. Lebesgue et Picard.

Communications :

M. Giraud : *Sur une classe de transcendantes admettant un théorème de multiplication.*

L'auteur rappelle les résultats obtenus par M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890) et M. Picard (*Comptes rendus*, 4 juillet 1904) dans la recherche des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ satisfaisant à des relations comme :

$$f_i(a_1 u_1, a_2 u_2, \ldots, a_p u_p) = R_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_p),\\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_p), \ldots, f_m(u_1, u_2, \ldots, u_p)] \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les R_i sont des fonctions rationnelles données, et les a_i des constantes de module supérieur à 1 ; on dit que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ admettent un théorème de multiplication ; on a des exemples de telles relations pour les fonctions elliptiques et abéliennes. Les fonctions obtenues sont méromorphes pour toute valeur de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, dès qu'elles le sont quand ces variables sont assez petites. Si l'on suppose que

$$f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$$

quel que soit i, le point $(0, 0, \ldots, 0)$ est point double de la transformation

$$\text{(C)} \qquad x_i = R_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Alors $a_1, a_2, \ldots, a_p$ doivent être racines de l'équation en s obtenue en égalant à 0 le déterminant fonctionnel $\frac{D(R_1, R_2, \ldots, R_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ pris à l'origine et où l'on a remplacé $\frac{\partial R_i}{\partial x_i}$ par $\frac{\partial R_i}{\partial x_i} - s$. Sous quelques restrictions peu importantes, on a alors des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$ méromorphes dans tout le plan. Si la transformation C est birationnelle, et si l'on prend $p = m$, les relations

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

définissent des fonctions u_i des x_i dont le domaine d'existence est constitué par les points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dont les transformés par $C^{-\alpha}$ tendent vers o quand α augmente indéfiniment, et qui sont uniformes dans ce domaine.

Ceci rappelé, on peut démontrer que ce domaine d'existence ne comprend certainement pas tous les points de l'espace. Pour cela on établit d'abord que, sauf pour certaines courbes exceptionnelles, la transformée d'une courbe algébrique Γ par $C^{-\alpha}$ est, quel que soit α, une courbe algébrique, et non un point ou une variété à plus d'une dimension. Si ρ est un nombre tel que l'inégalité

$$(1) \qquad |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_m|^2 \leqq \rho^2.$$

entraîne l'inégalité analogue pour le transformé de $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ C^{-1}, nous pourrons prendre une variété algébrique à $m - 1$ dimensions, Σ, dont aucun point ne satisfasse à cette inégalité. Alors, la transformée de Γ par $C^{-\alpha}$ ayant au moins un point commun avec Σ, il y a sur Γ un point M_α au moins tel que le point $M_\alpha C^{-\alpha}$ soit extérieur au domaine (1). Si M est un point d'accumulation des M_α, le transformé de M par $C^{-\alpha}$ sera, quel que soit α, extérieur à (1) : M ne fait pas partie du domaine d'existence des fonctions u_i.

Il peut arriver toutefois que les fonctions u_i n'aient pas d'espace lacunaire, mais seulement des points singuliers limites de points réguliers. M. Poincaré en donne un exemple. Le cas de l'espace lacunaire est aussi possible, comme le montre la transformation

$$(C^{-1}) \qquad x = \frac{axy + bx + cy}{a''xy + b''x + c''y}, \qquad y = \frac{a'xy + b'x + c'y}{a''xy + b''x + c''y},$$

où l'on donne à b, c, b', c' les valeurs b'', o, o, c'' (ou des valeurs voisines), et où l'on s'arrange de façon que

$$\left|\frac{a' + c''}{b''}\right| < 1, \qquad \left|\frac{a + b''}{c''}\right| < 1.$$

Cette transformation admet en effet les points doubles limite (1, o) et (o, 1), ou des points voisins. Si I est une inversion transformant ces deux points l'un dans l'autre, $C^{-1}I$ et IC^{-1} auront ces deux points comme points limites oscillants.

Enfin, si l'on fait tendre $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vers un point de la frontière du domaine, le plus petit entier α tel que le transformé du point mobile soit intérieur à (1) augmente indéfiniment; on en conclut facilement que $|u_1|^2 + |u_2|^2 + \ldots + |u_m|^2$ augmente indéfiniment. (Ceci suppose que le point frontière n'est point d'indétermination pour aucune transformation $C^{-\alpha}$.) C'est un renseignement sur le comportement des u_i au voisinage des points singuliers de ces fonctions.

M. R. Garnier : *Sur la rationalisation des coefficients des équations différentielles algébriques.*

Soit $y''' = R(y'', y', y, x)$ une équation différentielle algébrique du troisième ordre dont l'intégrale générale $y(x)$ a ses points critiques fixes; la fonction R, analytique en x, est *rationnelle* en y'', y' et *algébrique* en y.

M. Garnier montre qu'on peut toujours trouver une irrationnelle $z(y; x)$ liée à y par une relation algébrique

$$f(y, z; x) = 0 \tag{1}$$

(dépendant de x analytiquement), et cela de telle sorte que la *fonction $z(x)$ définie par* (1) (où l'on a remplacé y par l'intégrale générale de l'équation proposée) *ait aussi ses points critiques fixes.* La démonstration de M. R. Garnier s'appuie sur des théorèmes classiques de M. H. Poincaré relatifs à la continuité des intégrales d'une équation différentielle par rapport à un paramètre; elle *s'étend d'ailleurs à des équations différentielles d'ordre quelconque* (algébriques en y, rationnelles par rapport aux dérivées successives de y).

La proposition précédente trouve une application immédiate dans le problème de l'énumération des équations différentielles algébriques dont les intégrales ont leurs points critiques fixes.

M. Podtiaguine : *Sur la convergence de certaines intégrales multiples.*

On considère l'intégrale

$$I = \int_a^{\infty} \int_b^{\infty} \cdots \int_c^{\infty} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Si $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^{\alpha} + x_2^{\beta} + \ldots + x_n^{\lambda})^{a_1}$, on trouve pour convergence de l'intégrale I la condition

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\gamma} < a_1.$$

Si

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ = (x_1^\alpha + x_2^\beta + \ldots + x_{n-1}^\varkappa + x_n^\lambda)^{a_1}(x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + \ldots + x_{n-1}^{\varkappa_1} + x_n^{\lambda_1})^{a_2}, \end{aligned}$$

on obtient, pour la convergence de l'intégrale I, n conditions

$$\begin{gathered} a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\ \left(a_2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\frac{\varkappa_1}{\varkappa} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\varkappa} - a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \ldots + \frac{1}{\varkappa_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2. \end{gathered}$$

Enfin, dans le cas où

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^\alpha + x_2^\beta + \ldots + x_{n-1}^\varkappa + x_n^\lambda)^{a_1} \\ \times (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + \ldots + x_n^{\lambda_1})^{a_2}(x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + \ldots + x_n^{\lambda_2})^{a_3}, \end{aligned}$$

l'intégrale I converge, si ses paramètres satisfont à $3(n-1)$ conditions dont les extrêmes sont

$$\begin{gathered} a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_1} - a_3. \end{gathered}$$

SÉANCE DU 12 MARS 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Communication :

M. Barré : *Sur les surfaces engendrées par des hélices circulaires.*

SÉANCE DU 19 MARS 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Communication :

M. P. Fatou : *Sur les conditions d'aplanétisme pour un système optique quelconque.*

Il s'agit de démontrer d'une manière élémentaire les extensions données par divers auteurs (H. Bruns, M. Thiesen) de la condition d'aplanétisme bien connue en optique géométrique sous le nom de *condition des sinus* ou *condition d'Abbe.*

Étant donnés deux points O et O' qui sont l'image l'un de l'autre sans aberration pour des faisceaux d'ouverture finie, il s'agit de trouver les conditions pour que les points d'un élément de plan π entourant le point O, aient pour images les points d'un élément de plan π' entourant le point O', aux infiniment petits du 2[e] ordre près.

On suppose simplement le système optique formé de milieux isotropes, sans faire aucune autre hypothèse sur sa structure.

En s'appuyant sur la notion de *chemin optique*, c'est-à-dire en somme sur le principe de Fermat, et imitant la démonstration de Hockin pour la condition d'Abbe, on arrive presque sans calcul au résultat cherché, qui peut s'énoncer ainsi : Soient OS un rayon passant par O dans le milieu objet, O'S son image; Ox une direction quelconque du plan π, $O'x'$ la direction correspondante du plan π'; il existe une relation de la forme

$$a\cos(\mathrm{OS}, \mathrm{O}x) + b\cos(\mathrm{O'S'}, \mathrm{O'}x') = c.$$

Contrairement à l'assertion de certains auteurs, la constante c n'est pas nulle en général.

On déduit facilement de là une démonstration de l'importante formule que Clausius et Helmholtz ont déduite de considérations d'énergétique :

$$n^2 \cos\theta\, d\omega\, dq = n'^2 \cos\theta'\, d\omega'\, dq',$$

dans laquelle n et n' désignent les indices des milieux extrêmes, $d\omega$ et $d\omega'$ les angles solides de deux pinceaux de rayons correspondants de sommets O et O', dq et dq' les aires des deux éléments plans correspondants π et π', θ et θ' les angles des axes des pinceaux avec les normales aux éléments.

SÉANCE DU 9 AVRIL 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Ovidius Tino, présenté par MM. Goursat et Lebesgue.

SÉANCE DU 23 AVRIL 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Godeaux, présenté par MM. Appell et Picard.

Communications :

M. Garnier : *Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline.*

Soit f le potentiel élastique d'un système élastique homogène : toute symétrie dans la molécule du système entraîne une simplification dans la forme de f : c'est ainsi que, aux différents groupements cristallins correspondent 11 formes possibles pour f. M. Somigliana a montré que, inversement, si l'on se propose de rechercher les différents types de symétrie moléculaire susceptible de produire des simplifications dans la forme de f, on retrouve précisément les types de symétrie cristalline. Cette réciproque a été établie par une méthode analytique, M. Garnier le démontre par des considérations géométriques.

M. Denjoy : *Sur les formules de M. Jensen et leurs applications à l'étude des valeurs rares des fonctions entières.*

M. Jensen a donné plusieurs formules reliant le module d'une fonction $F(z)$ holomorphe dans un cercle de rayon r aux valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des zéros de $F(z)$ contenus dans ce domaine.

La plus connue d'entre elles

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(z)|\,d\theta = \log|F(o)| + \log\frac{r^n}{|a_1 a_2 \ldots a_n|},$$
$$[z = re^{i\theta},\ F(o) \neq o],$$

entraîne la curieuse conséquence suivante : $F(z)$ *étant une fonction entière, a et b deux constantes,* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots,$ *respectivement les zéros de* $F(z) - a$ *et de* $F(z) - b$, *rangés par modules non décroissants, si le quotient* $\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}$ *tend vers l'infini avec* n, *le module minimum de* $F(z) - a$ *sur le cercle de rayon* r *tend vers zéro avec* $\frac{1}{r}$.

Les autres formules de M. Jensen, contenues dans le même Mémoire (*Acta mathematica*), conduisent aisément aux conséquences suivantes : p étant un entier quelconque, soit μ_p le module de l'expression $A_p B'_p$ avec

$$r^p \left[\frac{1}{p} \sum_1^n \frac{1}{a_n^p} + \frac{1}{p!} \frac{d^p}{dz^p} \log F(0) \right] = A_p,$$

$$\frac{1}{p r^p} \sum_1^n a_n^p = B_p,$$

et

$$B'_p = \text{conj. } B_p;$$

on a alors, en désignant par $M(r)$ et $m(r)$ le minimum et le maximum' de $|F(z)|$ sur le cercle $|z| = r$, et par U le second membre de la relation (1) :

$$\log M(r) > U + \frac{1}{r} \frac{\mu_p}{r}, \qquad \log m(r) < U - \frac{1}{r} \mu_p$$

et

$$\log M(r) - \log m(r) > \frac{\pi}{r} \mu_p.$$

Ces relations, vraies quel que soit p, suffisent parfois à montrer que le minimum $m(r)$ est infiniment petit.

Elle permettent d'établir le théorème suivant :

Si la somme $\sum_1^n \frac{1}{a_n^p}$ *croît indéfiniment avec* n, $\log M(r)$ *est infiniment grand relativement à* r^p.

Ce résultat est intéressant si l'on remarque que la croissance de U épouse assez exactement les variations de celles de $|a_n|$, peut donc descendre bien au-dessous du type r^p et d'ailleurs diffère peu de celle de $M(r)$ quand les arguments des zéros sont très dispersés.

SÉANCE DU 14 MAI 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. E. Bortolotti, présenté par MM. Picard et Montel, et M. Valiron, présenté par MM. Denjoy et Montel.

SÉANCE DU 28 MAI 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société : MM. Coblyn, présenté par MM. Jordan et Carvallo; Lusin présenté par MM. Vessiot et Montel; Kiveliovitch présenté par MM. Vessiot et Montel.

Communications :

M. Lindelöf : *Sur une démonstration nouvelle d'un théorème fondamenlal sur les suites de fonctions monogènes.*

Il s'agit du théorème suivant : considérons une suite infinie de fonctions monogènes

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots, \tag{1}$$

holomorphes et bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine connexe T; si la suite (1) converge pour une infinité de points de T ayant au moins un point limite intérieur à T, elle converge uniformément dans l'intérieur de T vers une fonction holomorphe. L'auteur démontre directement ce théorème et en déduit que, de toute suite infinie de fonctions holomorphes et bornées dans T, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de T. Jusqu'à présent, on avait toujours commencé par démontrer cette seconde proposition de laquelle on déduisait la première.

M. Vessiot : *Sur la mise en équations des problèmes de calcul des variations.*

1. La recherche du maximum ou du minimum d'une intégrale double est, comme le problème analogue relatif à une intégrale simple, liée à la théorie de la propagation par ondes. On a, en effet, de l'intégrale

$$J = \int\int V(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

étendue à une portion (S) d'une surface $z = f(x, y)$ quelconque, l'interprétation suivante : Dans le mode de propagation défini par le système des surfaces d'onde qui ont pour plan tangent courant [1]

$$pX + qY - Z - V(x, y, z, p, q) = 0,$$

la surface (S), considérée comme l'état initial d'une onde, balaie le volume $J\,\delta t$, à partir de sa position initiale, dans le temps infiniment petit δt. On pourrait appeler J la *vitesse* de balayage de la surface (S) dans le mode de propagation considéré.

La variation de cette vitesse, dans le même mouvement de propagation, est donnée par la formule

$$\delta J = \delta t \int\int V \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{d}{dy}\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx\, dy.$$

Il suffit donc d'écrire que cette variation particulière est nulle, pour toute portion de la surface (S), pour obtenir l'équation de Lagrange qui exprime que la variation de J, dans le cas général de variations infinitésimales quelconques, est nulle.

Pour obtenir l'équation de Lagrange on suppose, en général, que le contour qui limite (S) est fixe. Mais la variation reste nulle, s'il se déplace sur la surface qu'il décrit, lorsque (S) est entraînée par le mouvement de propagation considéré.

2. La méthode indiquée par l'auteur pour exprimer que la variation d'une intégrale simple est nulle [1], s'étend au cas d'une intégrale double, de la manière suivante.

---

(1) E. Vessiot, *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIV, 1906).

(1) *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France.* Année 1912, p. 48.

Soit, sous sa forme paramétrique, l'intégrale

$$J = \iint G(x_1, x_2, x_3 \mid y_1, y_2, y_3)\, du_1\, du_2,$$

où G est homogène, de degré un, par rapport aux quantités

$$y_\alpha = \frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = \text{permut. circul. de } 1, 2, 3).$$

Posons

$$G(x \mid y) = \omega; \qquad y_i = \omega p_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les p_i satisfont à l'équation

$$(1) \qquad G(x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 1,$$

qui est l'équation tangentielle de la surface d'onde, le plan tangent de celle-ci étant écrit sous la forme

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{3} p_i X_i - 1 = 0.$$

Remplaçons l'équation (1) par sa forme paramétrique

$$(3) \qquad p_i = A_i(x_1, x_2, x_3 \mid \lambda_1, \lambda_2) \qquad (i = 1, 2, 3);$$

et il reste à considérer l'intégrale

$$(4) \qquad J = \iint \omega\, du_1\, du_2,$$

où ω est une fonction de u_1, u_2 liée aux fonctions auxiliaires x_i et λ_k par les trois équations

$$(5) \qquad \frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} = \omega A_\alpha(x \mid \lambda).$$

Cela posé, la variation de J prend la forme

$$(6) \qquad \delta J = \iint \sum_{i=1}^{3} z_i w_i\, du_1\, du_2,$$

les z_i étant définis par les équations

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{3} z_i A_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{3} z_i \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_k} = 0 \qquad (k = 1, 2);$$

et les w_i ayant pour expressions

$$(8) \qquad w_\alpha = \frac{\partial(\delta x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \frac{\partial(x_\beta, \delta x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} - \sum_{j=1}^{3} \omega \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_j} \delta x_j.$$

Ces formules (8) peuvent se remplacer par la condition suivante : les w_i doivent annuler chaque intégrale

$$(9) \qquad \iint \sum_{i=1}^{3} \zeta_i w_i \, du_1 \, du_2,$$

où les ζ_i satisfont au système

$$(10) \qquad \frac{\partial(x_\beta, \zeta_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \frac{\partial(\zeta_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \sum_{j=1} \omega \frac{\partial A_j}{\partial x_\alpha} \zeta_j = 0.$$

3. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des intégrales simples, on ne peut conclure de là que les z_i sont eux-mêmes une solution de ce système (10) en ζ_1, ζ_2, ζ_3, qu'en faisant intervenir l'hypothèse que les z_i ont des dérivées partielles en u_1, u_2.

L'objection de Du Bois Reymond, à laquelle la méthode échappait dans le cas des intégrales simples, ne peut donc ici être éludée [1]; elle tient à ce fait que des fonctions, qui sont des limites de solutions du système (10), annulent les intégrales (9) aussi bien que ces solutions elles-mêmes; et ne sont pas forcément des solutions du système (10), car elles n'ont pas nécessairement des dérivées. La nature particulière du système auquel conduit la mise en équations, pour chaque propagation considérée, interviendra, par suite, nécessairement, pour savoir si le problème admet des solutions autres que celles qui sont pourvues de dérivées.

Ce système est, d'après ce qui précède, formé des équations (5) et des équations (10), où les ζ_i doivent être remplacés par les valeurs z_i tirées des équations (7).

---

[1] On sait que M. Hadamard a montré, par l'exemple de l'intégrale

$$\iint (p^2 - q^2) \, dx \, dy,$$

que la méthode de mise en équations classique, qui fait intervenir l'hypothèse que z a des dérivées secondes, ne peut échapper à l'objection de Du Bois Reymond, dans le cas des intégrales doubles (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. CXLIV, 1907, p. 1092).

4. On peut, en particulier, prendre, pour les formules (3), les équations

$$(11) \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en introduisant l'équation ponctuelle des surfaces d'onde

$$(12) \qquad F(x_1, x_2, x_3 \mid z_1, z_2, z_3) = 1,$$

où F est homogène, de degré un, par rapport aux coordonnées courantes z_i; les formules (7) expriment que z_1, z_2, z_3 sont précisément les coordonnées du point de contact du plan (2). On obtient ainsi le système définitif formé de l'équation (12) et des équations

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} = \omega \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}, \\ &\frac{\partial(x_\beta, z_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \frac{\partial(z_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} = -\omega \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \right.$$

dont la forme généralise celle des systèmes canoniques. Ce système (13) entraîne, du reste, la condition $dF = 0$.

M. Boutroux : *Le problème de l'intégration des équations différentielles.*

Dans une Communication faite au Congrès international de Heidelberg, en 1904, M. Painlevé a indiqué comment se pose aujourd'hui le problème de l'intégration des équations différentielles. Il est vrai que, lorsqu'on a affaire à des intégrales $f(x)$ qui sont des fonctions à une infinité de branches, la définition générale de l'intégration donnée par M. Painlevé paraîtra peut-être insuffisante. Si, cependant, je fournis un moyen de calculer une valeur approchée d'une branche quelconque de $f(x)$ pour une valeur quelconque de x et de déterminer, en outre, toutes les branches qui appartiennent à une même intégrale, si les formes de représentation analytique que j'emploie mettent en évidence et situent approximativement tous les points singuliers de $f(x)$, découvrent le mécanisme de l'échange des branches entre elles, indiquent enfin, suivant l'expression de M. Painlevé, *le rôle des conditions initiales*, il semble que je serai bien en droit de regarder les intégrales $f(x)$ comme *connues*.

Le problème se décompose en deux :

I. *Étude des branches d'intégrales;*

II. *Reconnaître quelles sont les branches qui appartiennent à une même intégrale.*

Problème I. — Convenons, pour fixer les idées, de définir une branche de fonction $f(x)$ comme l'ensemble des valeurs de $f(x)$ qu'on obtient en suivant les rayons issus d'un même point x_0 à partir d'une même valeur initiale : nous désignerons une telle branche de fonction par le symbole $\widehat{f(x)}$.

J'ai indiqué déjà les divers types de *branches de fonctions* que définissent les équations différentielles les plus simples : branches asymptotes à des fonctions rationnelles, à des fonctions entières ou à des fonctions méromorphes.

Il existe un type particulièrement remarquable (*type* A) d'équations rationnelles du premier ordre dont *toutes* les intégrales sont asymptotes à des fonctions rationnelles. Considérons l'équation

$$(1) \qquad z' = \frac{A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p}{B_0 + B_1 z + \ldots + B_q z^q},$$

où $A_0, \ldots, B_q$ sont des polynomes en x ayant respectivement pour degrés $m_0, \ldots, n_q$. L'équation (1) sera du type A si l'on a $p < q + 2$ et, en posant $\sigma = \dfrac{m_0 - n_q + 1}{q + 1}$,

$$\begin{array}{lll} m_1 + \sigma < m_0, & \ldots, & m_p + p\sigma < m_0, \\ n_0 + \sigma - 1 < m_0, & \ldots, & n_{q-1} + q\sigma - 1 < m_0. \end{array}$$

J'ai pu faire une étude asymptotique détaillée des branches d'intégrales des équations du *type* A, déterminer la situation de leurs points critiques, les représenter par des développements qui mettent en évidence leur allure et leurs propriétés.

Problème II. — Posons-nous maintenant le problème II pour une équation particulière, par exemple l'équation du type A

$$(2) \qquad zz' + 3z - 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - 2) = 0$$

qui contient deux paramètres α et β (les coefficients numériques sont choisis de manière à simplifier les calculs).

Les branches d'intégrales $\widehat{z(x)}$ sont asymptotes à $\pm\sqrt{x^4 - x_1^4}$ où x_1 est une constante arbitraire. Les branches asymptotes à $+\sqrt{x^4 - x_1^4}$

en particulier sont, au voisinage de $x = \infty$, de la forme

$$z = x^2 - \frac{7 + 2(\alpha + \beta)}{3} x$$

$$+ \textit{développements en puissances de } x^{-1} \text{ et de } (C_1 + \eta_1 \log x) x^{-2},$$

C_1 étant un paramètre variable et η_1 un polynome en α, β. A une branche d'intégrale correspond une valeur de C_1, et réciproquement. Notre problème II revient donc à la question suivante : *Quel est l'ensemble des valeurs de* C_1 *qui appartiennent à une même intégrale ?*

J'ai obtenu de ce problème, du moins pour α et β intérieurs à certaines régions de leurs plans respectifs, la solution suivante :

On peut définir trois *branches de fonctions* $\widehat{\psi_1(C_1)}$, $\widehat{\psi_2(C_1)}$, $\widehat{\psi_3(C_1)}$ qui présentent chacune deux points critiques seulement, qui peuvent être étudiées par les mêmes méthodes que les branches de fonctions du *problème I* et qui nous fournissent trois substitutions fondamentales donnant, par leur combinaison, l'ensemble des valeurs C_1 cherchées. Appelons, en d'autres termes, (S_1), (S_2), (S_3) les substitutions

$$\left[C_1, \widehat{\psi_1(C_1)}\right], \quad \left[C_1, \widehat{\psi_2(C_1)}\right], \quad \left[C_1, \widehat{\psi_3(C_1)}\right],$$

définies d'une manière univoque pour tout C_1 puisque les branches $\widehat{\psi_1}$, $\widehat{\psi_2}$, $\widehat{\psi_3}$ sont, par définition, uniformes. Opérant sur une valeur initiale de C_1 toutes les substitutions obtenues en combinant (S_1), (S_2), (S_3), nous aurons toutes les valeurs de C_1 qui appartiennent à une même intégrale.

SÉANCE DU 11 JUIN 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

M. Barré donne quelques indications sur un travail relatif aux surfaces hélicées.

SÉANCE DU 25 JUIN 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Election :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Tamarkine, présenté par MM. Kryloff et Montel.

Communications :

M. Got : *Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsiens.*

Parmi les groupes fuchsiens arithmétiques de Poincaré [1] ceux qui se rapportent aux formes du type

$$f = x^2 - \varphi(y, z),$$

où φ est une forme quadratique définie positive, sont des plus intéressants : ces formes et leurs groupes jouent, en effet, un rôle important dans la théorie des fonctions abéliennes doublement singulières de M. Humbert. A côté des méthodes de réduction continuelle (Hermite-M. Selling) et d'extension du groupe par symétries (M. Klein), la méthode de *rayonnement* de M. Fricke permet de déterminer aisément leur domaine fondamental *normal* et par suite leurs substitutions génératrices.

Considérons en effet tous les points O_i équivalents à l'origine $O(1, 0, 0)$, par les opérations du groupe reproductif de la forme : leurs coordonnées sont trois entiers α_i, β_i, γ_i vérifiant l'équation

$$\alpha_i^2 - \varphi(\beta_i, \gamma_i) = 1. \tag{1}$$

L'ellipse $x^2 - \varphi(y, z) = 0$ étant prise pour *absolu* (Cayley), la pseudo-distance non euclidienne OO_i, telle que la définit M. Klein [2], est alors

$$\mathfrak{L}OO_i = \log\left(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1}\right).$$

En langage pseudo-géométrique, les *perpendiculaires* en leur *milieu* à un certain nombre de segments OO_i de $\mathfrak{L}$ minima limitent

---

(1) *Journal de Liouville*, 4e série, t. III.

(2) C'est le logarithme du rapport anharmonique de OO_i et des points d'intersection de OO_i avec la conique.

un polygone normal, ou plutôt le *double* d'un domaine normal, parce que le point O est point fixe de substitution elliptique de période *deux*. Or la $\mathcal{L}$ varie dans le même sens que x_i. Il suffit donc de calculer les premières solutions de l'équation (1) par ordre de grandeur croissante des x_i en conservant seulement les points équivalents à O. On s'arrête lorsqu'on a obtenu un polygone convexe qui n'est plus traversé par aucune perpendiculaire ultérieure : un nombre fini d'opérations suffit pour s'en assurer.

Pour distinguer les solutions α_i, β_i, γ_i de l'équation (1) qui répondent à des points équivalents à O, on peut employer l'un des procédés suivants :

1° Réduire par la méthode de M. Selling la forme définie

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(xf'_{\alpha_i} + yf'_{\beta_i} + zf'_{\gamma_i})^2 - f(x, y, z),$$

associée à f pour la réduction continuelle. Pour que O_i soit équivalent à O, il faut et il suffit que la réduite correspondante obtenue pour la forme indéfinie soit identique à f (qu'on suppose bien entendu réduite en O).

2° Utiliser les formules d'Hermite pour les substitutions semblables S d'une forme f, en fonction de quatre indéterminées p, q, q', q'', vérifiant une équation

$$p^2 + F(q, q', q'') = P \tag{2}$$

(F adjointe de f, P diviseur du quadruple du discriminant). En exprimant que $O_i = OS$, on a trois équations permettant avec (2) de calculer les quatre indéterminées : pour que O_i soit équivalent à O, il faut et il suffit que leurs valeurs soient entières et donnent une S entière.

En traitant par cette dernière méthode la forme de discriminant 29,

$$x^2 - 3y^2 + 2yz - 10z^2,$$

on trouve, pour le groupe fuchsien correspondant, la ***signature*** (0, 6; 2, 2, 2, 2, 3). Le polygone normal est obtenu dès qu'on atteint $\alpha_i = 30$, mais pour en être assuré, il faut pousser le calcul jusqu'à $\alpha_i = 48$.

M. Lebesgue : ***Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann.***

Au problème de Dirichlet qui consiste, comme on sait, à trouver une fonction harmonique dans un domaine borné D et prenant des valeurs données continues sur la frontière F de D, Riemann substitue la recherche d'une fonction continue dans D et sur F, dérivable dans D, prenant les valeurs données sur F et rendant minimum une intégrale qui, dans le cas de deux variables, s'écrit

$$\int\int_{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}\right]dx\,dy=\mathrm{I}(f).$$

M. Hadamard a signalé un cas où les deux problèmes ne sont pas équivalents : c'est celui où l'intégrale de Riemann n'a de sens pour aucune des fonctions du champ fonctionnel considéré. Pour les autres cas les deux problèmes sont bien équivalents, mais la démonstration classique n'est pas entièrement suffisante ; elle utilise, en effet, la formule de Green appliquée au domaine D et cela suppose que F ait une normale et que les fonctions dont on s'occupe aient certaines dérivées sur F. M. Lebesgue a déjà signalé cette difficulté dans les *Rendiconti del Circolo di Palermo*, il montre ici comment on peut la lever.

Il suffit de prouver que toute fonction f harmonique dans D et telle que $\mathrm{I}(f)$ soit finie est solution du problème de Riemann. Le raisonnement classique suffit quand F a une dérivée normale et quand f a des dérivées partielles même aux points de F. Soit maintenant une fonction f harmonique dans un domaine D quelconque et soit φ une fonction prenant les mêmes valeurs continues sur la frontière F de D. Il faut prouver qu'on a $\mathrm{I}(\varphi)>\mathrm{I}(f)$; il suffira d'ailleurs d'obtenir l'inégalité $\mathrm{I}(\varphi)\geqq\mathrm{I}(f)$ pour toute fonction φ pour qu'on puisse conclure que l'égalité est impossible. Cette égalité, en effet, si elle était réalisée pour une fonction φ, entraînerait cette conséquence que φ est une solution du problème de Riemann, donc est harmonique ; par suite, φ ne pourrait différer de f.

Soit ψ la fonction définie par la condition d'être égale à $\varphi+\varepsilon$, quand $\varphi+\varepsilon$ est inférieur à f, d'être égale à $\varphi-\varepsilon$ quand $\varphi-\varepsilon$ est supérieur à f, enfin d'être égale à f aux autres points. Si $\mathrm{I}(f)$ n'est pas infini, $\mathrm{I}(\psi)$ tend, quand ε tend vers zéro, vers $\mathrm{I}(\varphi)$. Or, ψ étant identique à f en tous les points suffisamment voisins de F, en utilisant le raisonnement classique appliqué à un domaine D_1 intérieur à D et dont la frontière F_1 est tout entière dans la partie de D où $\psi=f$, on voit que $\mathrm{I}(\psi)$, étendue à D_1, est inférieure à $\mathrm{I}(f)$. Donc, étendue à D, $\mathrm{I}(\psi)$ est aussi inférieure à $\mathrm{I}(f)$ et la proposition est établie.

Une légère modification au raisonnement qui vient d'être esquissé permet de se débarrasser de l'hypothèse que $\mathrm{I}(f)$ est finie.

M. Lebesgue a signalé récemment (1) qu'il existe des domaines très simples de l'espace à trois dimensions pour lesquels le problème de Dirichlet n'a pas de solution ; pour ces domaines, le problème de Riemann n'a pas non plus de solution.

M. G. Bouligand : *Sur la fonction de Green du cylindre indéfini.*

Soit $G(M, P)$ la fonction de Green d'un cylindre indéfini à section droite fermée.

L'axe Oz a été pris parallèle aux génératrices. La fonction $G(M, P)$ est ainsi définie :

1° La différence $G - \frac{1}{MP}$ est une fonction harmonique du point M dans tout le cylindre; de plus, elle est *régulière à l'infini.*

2° G s'annule sur le cylindre.

La fonction G, symétrique par rapport aux deux points M et P, ne fait intervenir leurs cotes que par leur différence z. Soient m la projection de M sur la section droite de P et $\mathcal{G}_\lambda(m, P)$ la fonction de Green de la section pour l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \lambda^2 U;$$

on a la relation

$$G(M, P) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathcal{G}_\lambda(m, P)\cos\lambda z\, d\lambda,$$

d'où l'on déduit

$$\mathcal{G}_\lambda(m, P) = \int_0^{+\infty} G(M, P)\cos\lambda z\, dz;$$

pour $\lambda = 0$, $\mathcal{G}_\lambda$ se réduit à la fonction de Green ordinaire g de la section droite et l'on a

$$g(m, P) = \int_0^{+\infty} G(M, P)\, dz,$$

c'est une relation entre la fonction de Green du cylindre et celle de sa section droite : elle est due à M. Paul Lévy.

On peut en trouver une seconde, d'un caractère différent, par le procédé suivant : Soit une section droite et l'un des demi-cylindres qu'elles détermine. Appelons (H) toute fonction harmonique dans ce demi-cylindre, s'annulant sur sa surface et régulière à l'infini. Entre la distribution de ses valeurs U (P) et de celles de sa dérivée

(1) *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, p. 17 (1913).

normale V(P) le long de la section droite, on a les relations

$$(1) \qquad V(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_S V(M)(M, P)\, dS_M,$$

$$(2) \qquad V(P) = \frac{1}{2\pi}\Delta\int\int_S U(M)\, G(M, P\, dS_M,$$

les points M et P étant dans la section droite en question, et Δ représentant le symbole de Laplace à deux dimensions.

Si U est donné l'équation (2) fera connaître V et si V est connu, l'équation (1) donnera U. Dans (2) remplaçons U par sa valeur (1). Nous avons une identité satisfaite quel que soit V, et qui a comme conséquence immédiate

$$\Delta\int\int_S G(M, P)\, G(M, Q)\, dS_M = 0.$$

Ainsi l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int\int G(M, P)\, G(M, Q)\, ds_M$ où M, P, Q sont trois points d'une même section droite, est une fonction harmonique : elle s'annule sur (C) et possède la singularité $\log\frac{1}{PQ}$. C'est donc g (P, Q). D'où une nouvelle relation entre G et g

$$2\pi g(P, Q) = \int\int_S G(M, P)(M, Q)\, dS_M.$$

M. Montel : *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles au point de vue des variables réelles.*

M. Baire a posé la question de savoir s'il existe pour une équation aux dérivées partielles d'autre solution que celles fournies par les méthodes classiques qui supposent la continuité des dérivées que l'on emploie. Prenons par exemple, l'équation

$$F(z) = A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

et cherchons toutes les fonctions z admettant des dérivées partielles du premier ordre et vérifiant cette équation. La fonction z est simplement assujettie à être continue par rapport à chaque variable et à admettre des dérivées du premier ordre finies; les fonctions A et B sont telles qu'on puisse définir un champ régulier de caractéristiques. M. Baire a démontré que, si l'on suppose la fonction continue par rapport à l'*ensemble des deux variables x, y*, il n'y a pas d'autre solution que la solution classique. L'auteur montre que ce résultat est général. Soit $G(u)$ le premier nombre de l'équation adjointe de l'équation donnée

$$G(u) = \frac{\partial(Au)}{\partial x} + \frac{\partial(Bu)}{\partial y}.$$

On a

$$uF(z) + zG(u) = \frac{\partial(Auz)}{\partial x} + \frac{\partial(Buz)}{\partial y}.$$

Soient z une intégrale quelconque de $F(z) = 0$ et u_1 une intégrale quelconque de $G(u) = 0$, on a

$$\frac{\partial(Au_1 z)}{\partial x} + \frac{\partial(Bu_1 z)}{\partial y} = 0.$$

Or, l'auteur a établi précédemment que cette condition exprime, avec les hypothèses du début, que l'expression

$$u_1 z(B dx - A dy)$$

est une différentielle exacte; on en déduit aisément que $Bu_1 z$ est constante sur chaque caractéristique et en remplaçant l'intégrale u_1 par une seconde intégrale u_2 de l'équation adjointe, on voit que toute intégrale z de l'équation proposée est constante sur chaque caractéristique.

SÉANCE DU 9 JUILLET 1913.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

SÉANCE DU 22 OCTOBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

M. d'Ocagne offre à la Société mathématique une Notice qu'il a rédigée sur Albert Ribaucour et rappelle à grands traits les découvertes importantes de Ribaucour en Géométrie.

SÉANCE DU 12 NOVEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Communication :

M. Bioche : *Sur certains ombilics.*

Il peut arriver qu'en un point simple m d'une surface le plan tangent coupe celle-ci suivant une section ayant un point triple en M. Ce point est alors une sorte d'ombilic par lequel passent trois lignes de courbure et trois lignes asymptotiques; ces dernières étant tangentes aux branches de la section faite par le plan tangent.

Si les tangentes aux trois lignes asymptotiques sont réelles, les tangentes aux lignes de courbure le sont aussi, et il y a une tangente de chaque espèce entre deux de l'autre. En particulier, si deux tangentes de même espèce se confondent, elles se confondent avec une tangente d'espèce différente.

Si l'une des tangentes considérées est bissectrice des deux autres tangentes de même espèce, elle est bissectrice de deux des tangentes d'espèce différente et perpendiculaire à la troisième. En particulier, si deux tangentes de même espèce sont isotropes, deux des tangentes de l'autre espèce sont isotropes, et les tangentes réelles des deux espèces sont rectangulaires.

SÉANCE DU 26 NOVEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société : M. Oswald Veblen, présenté par MM. Eisenhardt et P. Boutroux; M. Edward Kasner, présenté par MM. Eisenhardt et P. Boutroux; M. V. Kostitzin, présenté par MM. Lusin et Kivéliovitch.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur les mouvements à deux paramètres doublement décomposables et les surfaces engendrées de deux manières par le mouvement d'une courbe invariable.*

Soient A et C deux corps dont le mouvement relatif dépend de deux paramètres ; ce mouvement est dit *décomposable*, s'il existe un corps B intermédiaire tel que le mouvement relatif de B par rapport à A et celui de C par rapport à B dépendent chacun d'un seul paramètre. Le mouvement est dit *doublement décomposable*, s'il existe un autre corps D possédant la même propriété que le corps B. Si l'on désigne par M un point quelconque du corps C, ce point M possède dans B et D deux courbes trajectoires γ^M_B, γ^M_D et dans A une surface trajectoire Φ^M_A. Il est clair que Φ^M_A est le lieu des courbes γ^M_B, γ^M_D au cours du mouvement de B par rapport à A et de D par rapport à A.

M. Kœnigs donne un exemple d'un tel mouvement fondé sur la considération d'un quadrilatère gauche articulé ABCD dans lequel les côtés opposés sont égaux. Il existe une déformation de ce quadrilatère dans laquelle les angles des plans menés par un côté quelconque et les six côtés adjacents demeurent constants ; si l'on élève alors en A, B, C, D les perpendiculaires a, b, c, d aux plans DAB, ABC, BCD, CDA, deux perpendiculaires a et b forment avec la tige AB un système invariable Σ_B, et l'on a de même les systèmes invariables Σ_{BC}, Σ_C , Σ_{DA}, articulés suivant les axes a, b, c, d.

Si l'on imagine alors quatre corps Σ_A, Σ_B, Σ_C, Σ_D pouvant tourner librement autour de a, b, c, d respectivement et réunis par des engrenages hyperboloïdiques à la Bélanger, de sorte que les vitesses de A par rapport à Σ_{AB} étant Ω^A_{AB} et de même pour les sept autres Ω analogues, les rapports des vitesses angulaires

$$\Omega^A_{AB} : \Omega^B_{AB} = \rho_{AB}, \qquad \Omega^B_{BC} : \Omega^C_{BC} = \rho_{BC},$$
$$\Omega^C_{CD} : \Omega^D_{CD} = \rho_{CD}, \qquad \Omega^D_{DA} : \Omega^A_{DA} = \rho_{DA}$$

soient constants.

Si l'on choisit convenablement ces rapports, l'établissement des engrenages n'empêche pas la déformation du système articulé et le mouvement du corps Σ_C par rapport au corps Σ_A est à deux paramètres et doublement décomposable comme le manifeste l'existence des corps intermédiaires Σ_B, Σ_D. La courbe γ^M_B est une sorte d'épicycloïde gauche engendrée par un point d'un hyperboloïde de révolution virant sur un autre hyperboloïde de révolution. De même γ^M_D. La surface Φ^M_A résulte de la courbe γ^M_B (ou de la courbe γ^M_D) solidaire elle-même d'un hyperboloïde de révolution qui vire sur un autre. Ces surfaces nouvelles offrent, comme on voit, la particularité de contenir deux familles de courbes égales.

Pour ce qui est des valeurs des rapports

$$\rho_{AB}, \quad \rho_{BC}, \quad \rho_{CD}, \quad \rho_{DA},$$

on a

$$\rho_{AB} = \rho_{CD} = -\frac{1}{\rho_{BC}} = -\frac{1}{\rho_{DA}} = n$$

où n est une constante quelconque.

Lorsque n est commensurable, la surface Φ_A^M est algébrique ainsi que les courbes γ_B^M, γ_D^M.

M. Coblyn : *Sur les couples de nombres premiers.*

La présente Note a pour objet d'examiner les ressources qu'offre l'Arithmétique élémentaire pour rechercher s'il y a une limite à la série des nombres premiers dont la différence est le nombre 2.

Tout d'abord, de tels nombres sont de la forme

$$6P \pm 1; \tag{1}$$

P sera l'*ordre* du couple de nombres, premiers ou non, représenté par l'expression (1); on peut construire un crible donnant par exhaustion les ordres des couples de nombres premiers.

Si la série des nombres premiers est limitée, à partir d'un certain rang, l'expression

$$6\alpha\beta + \varepsilon\alpha + \varepsilon'\beta,$$

dans laquelle on donne à α et β toutes les valeurs entières possibles et où ε et ε' représentent l'unité affectée du signe + ou du signe —, doit représenter tous les nombres entiers.

D'autre part, l'auteur démontre ce corollaire du théorème de Wilson :

Pour que le nombre p soit premier, il faut et il suffit que le nombre

$$(r-1)!\,(p-r)! + (-1)^{r-1}$$

soit multiple de p, r étant un entier quelconque, premier ou non, inférieur à p.

On en déduit que

$$\frac{4(6p-2)!}{36p^2-1}$$

aura comme reste

$$\begin{array}{llll}
-(6p+3) & \text{si } 6p-1 & \text{et } 6p+1 & \text{sont tous deux premiers,} \\
0 & \text{si } 6p-1 & \text{et } 6p+1 & \text{sont tous deux composés,} \\
-2(6p+1) & \text{si } 6p-1 & & \text{seul est premier,} \\
6p-1 & \text{si} & 6p+1 & \text{seul est premier.}
\end{array}$$

Enfin, si l'un des nombres $6p - 1$ ou $6p + 1$ est composé, le produit $36p^2 - 1$ peut être décomposable de plusieurs manières en produit de deux facteurs; on peut trouver alors un nombre premier $6\alpha + \varepsilon$, α étant plus petit que p, qui divisera

$$6p + \varepsilon' \quad \text{et} \quad p - \varepsilon\varepsilon'\alpha.$$

SÉANCE DU 10 DÉCEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société, M. A. Bilimovitch, présenté par MM. Appell et Borel, et M. de Hoorn, présenté par MM. Borel et Montel.

Communications :

M. G. Bouligand : *Le problème de Dirichlet, relatif à l'équation $\Delta u = \mu u$ pour un cylindre indéfini.*

Ce problème s'énonce ainsi : trouver une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \mu u \tag{1}$$

continue ainsi que ses dérivées premières et secondes à l'intérieur du cylindre, régulière à l'infini, et prenant sur le cylindre des valeurs données $H(s, z)$ (Oz est une parallèle aux génératrices; s, l'arc de section droite). Nous supposerons l'intégrale $\int |H(s, z)| dz$ uniformément convergente.

Le problème ainsi posé n'est jamais indéterminé, car aucune solution de (1), régulière à l'infini, ne s'annule sur le cylindre sans s'annuler à l'intérieur. Par contre, il existe des solutions, non régulières à l'infini et s'annulant sur le cylindre : telles sont les fonctions

$$\varphi_h(x, y)e^{\pm\sqrt{\mu+\alpha_h^2}\,z} \qquad \text{pour} \quad \mu+\alpha_h^2>0$$

et

$$\varphi_h(x, y)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\sqrt{-\mu-\alpha_h^2}\,z) \qquad \text{pour} \quad \mu+\alpha_h^2<0,$$

où φ_h désigne une fonction fondamentale de la section droite (il s'agit naturellement de fonctions fondamentales s'annulant au contour) et $-\alpha_h^2$ la constante caractéristique correspondante.

Théorème. — *Si l'on a* $\mu+\alpha_h^2<0$, *les valeurs* $\mathrm{H}(s, z)$ *prises sur le cylindre par une solution* $\mathrm{F}(x, y, z)$ *de l'équation* (1), *régulière à l'infini, satisfont aux deux relations*

$$(2) \qquad \int_{\mathrm{C}}\frac{d\varphi_h}{dn}\,ds\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}(s, z)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\sqrt{-\mu-\alpha_h^2}\,z)\,dz=0.$$

C'est ce qu'on voit en appliquant la formule de Green

$$\iint\left(\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dn}-\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right)d\mathrm{S}=0$$

aux deux fonctions

$$\mathrm{U}=\mathrm{F}(x, y, z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}=\varphi_h\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\sqrt{-\mu-\alpha_h^2}\,z)$$

(le domaine d'intégration sera un cylindre droit dont on éloignera indéfiniment les bases de part et d'autre.

Conséquence. — Supposons qu'on ait

$$-\alpha_{p+1}^2<\mu\leqq-\alpha_p^2,$$

le théorème précédent nous donne $2p$ conditions de possibilité : savoir les conditions (2) pour $h=1, 2, \ldots, p$ (si l'on suppose $\mu+\alpha_p^2=0$, le nombre de ces conditions s'abaisse d'un nombre égal à l'ordre de multiplicité de $-\alpha_p^2$).

Nous nous trouvons ainsi en présence de *conditions nécessaires* à remplir par $\mathrm{H}(s, z)$ toutes les fois qu'il existe au moins une constante caractéristique de la section droite supérieure à μ.

Conditions suffisantes. — Nous supposerons que $H(s, z)$ puisse se mettre sous la forme

$$H(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(s, \lambda) \cos\lambda z \, d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} B(s, \lambda) \sin\lambda z \, d\lambda,$$

et que les intégrales $\int |A(s, \lambda)| \, d\lambda$ et $\int |B(s, \lambda)| \, d\lambda$ soient uniformément convergentes.

Si $H(s, z)$ est ainsi choisi, on démontre que les conditions (2) suffisent à assurer l'existence d'une solution de notre problème : celle-ci sera donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, \lambda) \cos\lambda z \, d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, \lambda) \sin\lambda z \, d\lambda,$$

où $F(x, y, \lambda)$ et $G(x, y, \lambda)$ sont les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (\lambda^2 + \mu) V,$$

qui prennent respectivement les valeurs $A(s, \lambda)$ et $B(s, \lambda)$ sur le contour de la section droite.

M. Fouché : *Sur l'axiome d'Archimède et la continuité géométrique.*

M. E. Cartan : *Remarques sur la composition des forces.*

Le problème de la composition des forces en Statique peut être énoncé mathématiquement de la manière suivante (*voir* par exemple une Note de M. Darboux, dans la *Mécanique* de Despeyrous) :

Déterminer une loi de composition de vecteurs d'origine donnée O *satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

1° *La résultante d'un nombre quelconque de vecteurs ne dépend pas de l'ordre suivant lequel se fait la composition;*

2° *La loi de composition est invariante par le groupe de rotations autour du point* O.

En partant de cet énoncé, et en admettant que la loi de composition respecte la continuité, M. Darboux a trouvé la loi la plus générale qui se déduit facilement de la loi classique; il se sert à cet effet de constructions dans l'espace.

Le problème pourrait être traité *dans le plan*, les conclusions seraient alors à modifier si l'on ne tient compte que des rotations proprement dites (sans retournement) autour du point O.

Le problème peut aussi être généralisé en substituant à la considération des *vecteurs* celle de figures absolument quelconques. Pour restreindre un peu l'indétermination de ce nouveau problème, on devra convenir que deux systèmes (S) et (Σ) de figures sont *équivalents* s'il existe entre les figures des deux systèmes une correspondance univoque telle qu'à la résultante des deux figures F_1 et F_2 de (S) corresponde la résultante des deux figures correspondantes Φ_1 et Φ_2 de (Σ).

Avec cette convention de langage, on arrive à des résultats plus précis. Étant donnée une figure quelconque F il sera possible, si la loi de composition est supposée exister, de définir ce qu'il faut entendre par la figure x (F) où x désigne un nombre réel quelconque. Il faudra, pour cela, faire, sur le système (S), certaines hypothèses de la nature de celles qu'on est amené à faire dans la théorie de la mesure des grandeurs. Il existera alors un entier n (ordre du système) tel que toute figure de (S) puisse, d'une manière et d'une seule, se mettre sous la forme

$$x_1 F_1 + x_2 F_2 + \ldots + x_n F_n,$$

où $F_1, F_2, \ldots, F_n$ désignent n figures particulières, formant une *base*. D'après cela, toute figure du système est bien définie par les n nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, qu'on peut appeler ses coordonnées.

Toute rotation autour de O se traduira par une transformation continue sur les coordonnées laissant invariante la loi de composition

$$x''_1 = x_1 + x'_1,\ x''_2 = x_2 + x'_2,\ \ldots,\ x''_n = x_n + x'_n;$$

ce sera donc une substitution linéaire et homogène.

Le problème se ramène alors, comme on le voit, à la recherche des groupes linéaires et homogènes à n variables isomorphes au groupe des rotations autour de O.

Dans l'espace, on trouve facilement que n est au moins égal à 3 et que, si $n = 3$, le système (S) est équivalent au système des vecteurs issus de O, la loi de composition étant l'addition géométrique. On déduit facilement de là que chaque figure F est de révolution autour du vecteur qui lui correspond et que deux figures F correspondant à deux vecteurs de même longueur sont égales. Il est d'ailleurs facile d'indiquer la solution générale du problème pour $n > 3$.

Dans le plan, n est au moins égal à 2. Si n est égal à 2, le système (S) peut être équivalent au système des vecteurs issus de O, la loi de composition étant l'addition géométrique. Mais, *il y a d'autres solutions.* D'une manière générale, *tout système* (S) *d'ordre r est équivalent au système formé des polygones réguliers de p côtés ayant pour centre le point* O, p étant un entier fixe, d'ailleurs arbitraire; la loi de composition de ces polygones serait définie par la formule

$$z''^p = z^p + z'^p,$$

en désignant par z, z', z'' les affixes de l'un des sommets de chacun des polygones composants et du polygone résultant. On retrouve la loi de composition des forces pour $p = 1$.

TABLE DES MATIÈRES.

Réimpression Photomécanique
LES PROCEDES DOREL - PARIS