

BULLETIN DE LA S. M. F.

N. PODTIAGUINE

Les conditions de convergence de l'intégrale

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 97-113

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__97_0

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES CONDITIONS DE CONVERGENCE DE L'INTÉGRALE

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + \dots + t^{\lambda_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + \dots + t^{\lambda_2})^{a_3}};$$

PAR M. N. PODTIAGUINE.

M. Borel, dans son Livre *Leçons sur la théorie de la croissance* (1), en étudiant l'ordre de grandeur de certaines intégrales

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \mathcal{F}(x, y, \alpha, \beta, \dots, \lambda) dx dy,$$

relativement aux paramètres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, a donné une méthode pour la recherche des conditions de leur convergence. Cette méthode consiste à déterminer tout d'abord le champ des variables, dans lequel l'intégrale peut devenir infinie. Puis on divise ce champ en plusieurs zones de manière à pouvoir, dans chacune de ces zones, réduire l'élément différentiel à une partie principale de forme simple. En ne retenant que ce terme prépondérant de l'élément différentiel, on cherche les conditions de convergence de l'intégrale dans chacune des zones.

M. Borel a ainsi trouvé les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})}.$$

Ici, dans ce petit travail, je me suis proposé de généraliser ces recherches et d'étudier, par une méthode basée sur le même principe, les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + \dots + t^{\lambda_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + \dots + t^{\lambda_2})^{a_3}}.$$

Dans ce qui suit nous désignerons toujours par les lettres

$$a_1, a_2, a_3$$

(1) Pages 61-73.

des nombres quelconques fixes ; par les lettres

A, B, C, D, ...

les nombres arbitrairement grands ; enfin, par les lettres

$a, b, c, \dots, k, l,$
 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, x, x_1, x_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$

des nombres fixes positifs.

Nous allons commencer par l'étude de l'intégrale

$$I = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1}}.$$

Si nous supposons que

$$\alpha_1 \alpha > 1, \quad \alpha_1 \beta > 1,$$

l'intégrale I ne peut diverger que dans un champ où x et y sont tous les deux très grands. Donc, il suffit d'étudier l'intégrale

$$I' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1}}.$$

Dans ce champ des variables x, y , traçons la courbe

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Cette courbe divise le champ en deux zones, et nous avons

$$I' = I_1 + I_2,$$

I_1 étant l'intégrale I' prise dans la première zone, I_2 la même intégrale prise dans la deuxième zone.

On a, dans la première zone,

$$y > x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

et, dans la seconde,

$$y < x^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

de sorte que

$$\varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1} = y^{\alpha_1 \beta} \cdot h_1 \quad (1 < h_1 < 2^{\alpha_1})$$

dans le premier cas, et

$$\varphi(x, y) = x^{\alpha \alpha_1} \cdot h_2 \quad (1 < h_2 < 2^{\alpha_1})$$

dans le second cas. Nous avons donc

$$I_1 = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1 \beta}} \int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1 \beta}} \left[y^{\frac{\beta}{\alpha} - A} \right] \quad (1).$$

Mais le nombre B est arbitrairement grand. Donc, nous pouvons le prendre assez grand pour que l'on ait

$$y^{\frac{\beta}{\alpha} - A} = y^{\frac{\beta}{\alpha} (1 - \eta)},$$

η étant inférieur à 1. En appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$I_1 = h'_2 \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1 \beta - \beta}}.$$

Cette intégrale converge si

$$a_1 \beta - \frac{\beta}{\alpha} > 1$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Quant à l'intégrale I_2 , on a

$$I_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{a_1 \alpha}} \int_B^{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} dy = \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{a_1 \alpha}} \left[x^{\frac{\alpha}{\beta} - B} \right].$$

Ici, nous intéressent seulement les valeurs de x qui sont très grandes.

Donc, nous pouvons remplacer ici A par une nouvelle limite A', de sorte que

$$x^{\frac{\alpha}{\beta} - B} = x^{\frac{\alpha}{\beta} (1 - \eta)},$$

η étant inférieur à 1. La condition de convergence de l'intégrale I_2 est donc

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Nous voyons ainsi que la condition de convergence de l'inté-

(1) Pour simplifier nos calculs nous supposons que $A^{\frac{\alpha}{\beta}} > B$, de sorte que $B' > B$.

grale I est seulement

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\Pi = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1}}.$$

En supposant

$$a_1 \alpha > 1, \quad a_1 \beta > 1, \quad a_1 \gamma > 1,$$

nous pouvons nous borner à l'étude de l'intégrale

$$\Pi' = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1}}.$$

Imaginons dans le champ des variables x, y, z la surface

$$z^\gamma = x^\alpha + y^\beta.$$

Cette surface divise le champ en deux domaines, de sorte que

$$\Pi' = \Pi_1 + \Pi_2,$$

où Π_1 est l'intégrale Π' prise dans le premier domaine et Π_2 l'intégrale prise dans le second domaine. Mais dans le premier domaine on a

$$z^\gamma > x^\alpha + y^\beta,$$

d'où

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} = z^{a_1 \gamma} \cdot h_1 \quad (1 < h_1 < 2^{a_1}),$$

et dans le second

$$z^\gamma < x^\alpha + y^\beta,$$

d'où

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} \cdot h_2 \quad (1 < h_2 < 2^{a_1}).$$

Donc

$$\Pi_1 = \frac{1}{h_1} \int_C^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma}} \int_B^{w_1} dy \int_A^{w_1} dx \quad (1).$$

La limite supérieure w_1 est définie par les équations

$$z^\gamma = x^\alpha + w_1^\beta \quad \text{et} \quad x = A,$$

d'où

$$w_1 = z^{\frac{\gamma}{\beta}} (1 - \eta).$$

(1) Pour simplifier nos calculs nous supposons que $A^\alpha + B^\beta > C^\gamma$, de sorte que $C' > C$.

C' étant arbitrairement grand, nous pouvons le supposer assez grand pour que η soit inférieur à 1.

De même pour ω_2 on a

$$\omega_2 = z^{\frac{\gamma}{\alpha}(1-\eta_1)},$$

η_1 étant inférieur à 1. Donc

$$\Pi_1 = h'_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{\alpha_1 \gamma}} z^{\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} [1 - \eta_2]}.$$

Ici encore nous pouvons prendre C' assez grand pour que η_2 soit inférieur à 1. On a finalement

$$\Pi_1 = h'_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{\alpha_1 \gamma - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta}}}.$$

La condition de convergence de cette intégrale est

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < \alpha_1.$$

Envisageons maintenant l'intégrale Π_2 . On a

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1}} \int_C^{(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} dz \\ &= \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1}} \left[(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} - C \right]. \end{aligned}$$

Mais la question de la convergence se pose seulement pour x, y très grands. Nous pouvons donc remplacer ici A et B par deux nouvelles limites de telle sorte que

$$(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} - C = (x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}(1-\eta_3)},$$

η_3 étant inférieur à 1. Mais l'intégrale

$$\int_A^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1 - \frac{1}{\gamma}}}$$

a la forme de l'intégrale I, dont la condition de convergence,

comme nous avons déjà vu, est

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1 - \frac{1}{\gamma},$$

c'est-à-dire la même que celle de l'intégrale II.

Les mêmes raisonnements sont applicables aux intégrales de la forme

$$\delta_1 = \int_a^\infty \int_b^\infty \dots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1}}.$$

On trouvera pour elles la condition de convergence

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} < a_1.$$

Si l'on suppose

$$a_1 = 1,$$

on obtiendra pour l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \dots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda}$$

la condition de convergence

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} < 1$$

qui a déjà été donnée par M. Borel (1).

Nous allons maintenant considérer l'intégrale

$$\text{III} = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}}.$$

Nous supposons que

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

En considérant y comme constant, nous voyons qu'il faut tout d'abord avoir

$$a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 > 1$$

pour que l'intégrale III ait un sens. De même il faut que

$$a_1 \beta + a_2 \beta_1 > 1.$$

En supposant ces conditions remplies, l'intégrale III ne peut

(1) *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 70.

diverger que pour x et y tous deux très grands. Donc, nous pouvons nous borner à l'étude de l'intégrale

$$III' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\alpha_2}}.$$

Dans le champ des variables x, y traçons deux courbes

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{et} \quad y = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}.$$

A cause de la condition $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, la première courbe sera au-dessus de la seconde. Ces courbes divisent le champ considéré en trois zones. On a, dans la première zone,

dans la deuxième, $y^\beta > x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1};$

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1},$$

et dans la troisième,

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1},$$

de sorte que nous avons, dans les trois cas indiqués,

$$\varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\alpha_2} = y^{\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta_1} \cdot h_1,$$

$$\varphi(x, y) = x^{\alpha_1 \alpha} y^{\alpha_2 \beta_1} \cdot h_2,$$

$$\varphi(x, y) = x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1} \cdot h_3,$$

h_1, h_2, h_3 étant compris entre 1 et $2^{\alpha_1 + \alpha_2}$.

En désignant par III_1, III_2, III_3 l'intégrale III' prise respectivement dans les première, deuxième et troisième zones, on a

$$III' = III_1 + III_2 + III_3.$$

Envisageons séparément les trois intégrales ci-dessus. On a

$$III_1 = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^\infty \frac{dy}{y^{\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta_1}} \int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = h_1' \int_{B'}^\infty \frac{dy}{y^{\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta_1 - \frac{\beta}{\alpha}}} \quad (1),$$

$$III_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha}} \int_{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}^{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \frac{dy}{y^{\alpha_2 \beta_1}} = h_2' \int_A^\infty \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha}} \left[x^{\frac{\alpha}{\beta} (1 - \alpha_2 \beta_1)} - x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - \alpha_2 \beta_1)} \right].$$

(1) Nous supposons que $A^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} > B$, de sorte que $B' > B$.

Mais à cause de la condition $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, on a

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)} - x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}(1-a_2\beta_1)} = x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)} [1 - \eta],$$

η étant inférieur à 1 (¹). Il en résulte que

$$III_2 = h'_2 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a-a_1\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)}}.$$

La condition de convergence des intégrales III₁ et III₂ est donc la même

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1.$$

Quant à l'intégrale III₃, elle donne la nouvelle condition de convergence. En effet, on a

$$III_3 = \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1}} \int_B^{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} dy = h'_3 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}$$

si nous supposons A assez grand. La condition de convergence de l'intégrale III₃ est donc

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2.$$

Ainsi, pour que l'intégrale III soit convergente, il faut et il suffit que ses paramètres satisfassent à deux conditions :

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

En supposant ici

$$a_1 = a_2 = 1,$$

on a

$$\frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1,$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - 1.$$

(¹) Nous supposons donc que $1 - a_2\beta_1 > 0$. Si $1 - a_2\beta_1 < 0$, il est aisé de démon-

Ce sont les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})}$$

qui ont été données par M. Borel (1).

Nous allons maintenant chercher les conditions de convergence de l'intégrale

$$IV = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2}}.$$

Si nous supposons

$$a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 > 1,$$

$$a_1 \beta + a_2 \beta_1 > 1,$$

$$a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 > 1,$$

l'étude de cette intégrale se ramène à l'étude de l'intégrale

$$IV' = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2}}.$$

Divisons le champ des variables x, y, z en trois domaines par deux surfaces

$$z^\gamma = x^\alpha + y^\beta,$$

$$z^{\gamma_1} = x^{\alpha_1} + y^{\beta_1}.$$

Supposons

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1},$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\alpha_1}{\gamma_1}.$$

de sorte que

$$(1) \quad (x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} > (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}} \quad (2).$$

Dans le premier domaine nous avons

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} = z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1} \cdot h_1,$$

dans le second

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} z^{a_2 \gamma_1} \cdot h_2$$

trer que la condition de convergence de l'intégrale III, est la même que celle de l'intégrale III.

(1) *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 72.

(2) Cela veut dire que la première surface est au-dessus de la seconde.

et dans le troisième

où $\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} h_3,$
 $1 < h_1 < 2^{a_1+a_2}, \quad 1 < h_2 < 2^{a_1+a_2}, \quad 1 < h_3 < 2^{a_1+a_2}.$

L'intégrale IV', dans le premier de ces domaines, a pour valeur

$$IV_1 = h'_1 \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1\gamma + a_2\gamma_1}} \int_B^{z^{\frac{\gamma}{\beta}}} dy \int_A^{z^{\frac{\gamma}{\alpha}}} dx = h'_1 \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1\gamma + a_2\gamma_1 - \frac{\gamma}{\alpha}}} \quad (1),$$

et dans le deuxième, elle est égale à

$$IV_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}} \int_{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}^{(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{dz}{z^{a_2\gamma_1}} \\ = h'_2 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1 - \frac{1}{\gamma}(1 - a_2\gamma_1)}}$$

à cause de l'inégalité (1) (2).

Les intégrales IV₁ et IV₂ convergent si

$$a_2 \frac{\gamma}{\gamma_1} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1.$$

Quant à l'intégrale IV', prise dans le troisième domaine, elle nous donne encore deux conditions de convergence. En effet, cette intégrale a pour valeur

$$IV_3 = \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}} \int_C^{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}} dz \\ = h'_3 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2 - \frac{1}{\gamma_1}}}.$$

Cette dernière intégrale a la forme de l'intégrale III. Nous avons déjà vu que les conditions de sa convergence sont

$$\left(a_2 - \frac{1}{\gamma_1}\right) \frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2.$$

Donc, pour que l'intégrale IV soit convergente, il faut et il

(1) Nous supposons toujours $C' > C$.

(2) Nous supposons que $1 - a_2\gamma_1 > 0$. Si $1 - a_2\gamma_1 < 0$, on obtiendra pour la convergence de l'intégrale IV₂ deux conditions : celles de l'intégrale IV₃.

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \dots, \quad \frac{x}{\lambda} > \frac{x_1}{\lambda_1}.$$

Nous avons vu que l'intégrale

$$\mathfrak{S}_1 = \int_a^\infty \int_b^\infty \dots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{\alpha_1}},$$

dont l'élément différentiel a, dans son dénominateur, un facteur de la forme

$$(2) \quad (x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{\alpha_1}$$

converge, si ses paramètres satisfont à une seule condition. Nous venons de voir aussi que le nombre de conditions de convergence de l'intégrale \mathfrak{S}_2 dont l'élément différentiel a, dans son dénominateur, deux facteurs de la même forme, est égal à l'ordre de sa multiplicité. Le nombre de ces conditions croît encore plus vite si l'élément différentiel de l'intégrale a trois facteurs de la forme (2).

En effet, considérons d'abord l'intégrale

$$V = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}},$$

où a_1 et a_2 sont positifs (1).

Nous supposons ici

$$(3) \quad \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

En supposant, en outre,

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 + a_3 \alpha_2 &> 1, \\ a_1 \beta + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_2 &> 1, \end{aligned}$$

nous pouvons ne considérer que l'intégrale

$$V' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}},$$

Traçons dans le champ des variables x, y les courbes

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad y = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}, \quad y = x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}.$$

En vertu des conditions (3), la première courbe sera au-dessus de la seconde et la seconde au-dessus de la troisième. Ainsi nous

(1) Dans ce qui suit, nous supposons maintenant toujours $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.

avons quatre zones à considérer. Dans la première, on a

$$\begin{aligned} & y^\beta > x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) &= (x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\alpha_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{\alpha_3} = y^{\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2} \cdot h_1; \end{aligned}$$

dans la seconde,

$$\begin{aligned} & y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) &= x^{\alpha_1 \alpha} y^{\alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2} \cdot h_2; \end{aligned}$$

dans la troisième,

$$\begin{aligned} & y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) &= x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1} y^{\alpha_3 \beta_2} \cdot h_3, \end{aligned}$$

et dans la quatrième,

$$\begin{aligned} & y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} < x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) &= x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_2} \cdot h_4, \end{aligned}$$

où h_1, h_2, h_3 et h_4 sont tous compris entre 1 et $2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$.

En désignant par V_1, V_2, V_3 et V_4 l'intégrale V' respectivement dans les première, deuxième, troisième et quatrième zones, nous avons

$$V' = V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

On trouve, pour chacune de ces intégrales,

$$V_1 = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2}} \int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = h_1' \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 - \frac{\beta}{\alpha}}} \quad (1).$$

$$V_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha}} \int_{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}^{x^{\frac{\alpha_1}{\beta}}} \frac{dy}{y^{\alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2}} = h_2' \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha - \frac{\alpha}{\beta} (1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_3 \beta_2)}},$$

$$V_3 = \frac{1}{h_3} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1}} \int_{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}^{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_2}}} \frac{dy}{y^{\alpha_3 \beta_2}} = h_3' \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - \alpha_3 \beta_2)}},$$

$$V_4 = \frac{1}{h_4} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_2}} \int_B^{x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}} dy = h_4' \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3 \alpha_2 - \frac{\alpha_2}{\beta_2}}},$$

car A et B sont arbitrairement grands (2).

(1) Nous supposons toujours que $A^{\frac{\alpha_1}{\beta_2}} > B$. Donc $B' > B$.

(2) Nous n'avons considéré ici que le cas, dans lequel $1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_3 \beta_2 > 0$, d'où $1 - \alpha_3 \beta_2 > 0$. Si $1 - \alpha_3 \beta_2 < 0$ ou seulement $1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_3 \beta_2 < 0$, il est facile de démontrer que les conditions de convergence de l'intégrale V sont les mêmes.

Nous voyons ainsi que l'intégrale V est convergente si ses paramètres satisfont à trois conditions :

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\beta_1}{\beta} + a_3 \frac{\beta_2}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + a_3 \frac{\beta_2}{\beta_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &> \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} - a_3. \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Considérons maintenant l'intégrale triple

$$VI = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + z^{\gamma_2})^{a_3}},$$

où

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} > \frac{\beta_2}{\gamma_2}.$$

En supposant

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 + a_3 \alpha_2 &> 1, \\ a_1 \beta + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_2 &> 1, \\ a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2 &> 1, \end{aligned}$$

nous pouvons ramener l'étude de cette intégrale à l'étude de l'intégrale

$$VI = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + z^{\gamma_2})^{a_3}}.$$

Imaginons dans le champ des variables x, y, z trois surfaces :

$$\begin{aligned} z\gamma &= x^\alpha + y^\beta, \\ z\gamma_1 &= x^{\alpha_1} + y^{\beta_1}, \\ z\gamma_2 &= x^{\alpha_2} + y^{\beta_2}. \end{aligned}$$

Ces surfaces divisent le champ en quatre domaines, de sorte que nous avons, dans le premier domaine,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= (x^\alpha + y^\beta + z\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z\gamma_1)^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + z\gamma_2)^{a_3} \\ &= z^{a_1\gamma + a_2\gamma_1 + a_3\gamma_2} \cdot h_1; \end{aligned}$$

dans le deuxième

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} z^{a_2\gamma_1 + a_3\gamma_2} \cdot h;$$

dans le troisième,

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} z^{\alpha_3 \gamma_2} \cdot h_3,$$

et dans le quatrième,

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3} \cdot h_4,$$

h_1, h_2, h_3 et h_4 étant compris entre 1 et $2^{a_1+a_2+a_3}$.

Donc, l'intégrale VI', dans le premier domaine, est égale à

$$\begin{aligned} VI_1 &= \frac{1}{h_1} \int_C^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2}} \int_B^{z^{\frac{\gamma}{\beta}(1-\eta)}} dy \int_A^{z^{\frac{\gamma}{\alpha}(1-\eta_1)}} dx \\ &= h'_1 \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2 - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta}}} \quad (1); \end{aligned}$$

dans le second elle a pour valeur

$$\begin{aligned} VI_2 &= \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}} \int_{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}^{(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{dz}{z^{a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2}} \\ &= h'_2 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1 - \frac{1}{\gamma}(1 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2)}} \quad (2). \end{aligned}$$

La condition de convergence des intégrales VI₁ et VI₂ est donc seule

$$a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1.$$

L'intégrale VI', dans le troisième domaine, est égale à

$$\begin{aligned} VI_3 &= \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}} \int_{(x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{\frac{1}{\gamma_2}}}^{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}} \frac{dz}{z^{\alpha_3 \gamma_2}} \\ &= h'_3 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2 - \frac{1}{\gamma_1}(1 - a_3 \gamma_2)}} \quad (3). \end{aligned}$$

(1) Toujours $C' > C$.

(2) Nous supposons donc que $1 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2 > 0$. Dans le cas contraire, nous aurons pour la convergence de l'intégrale VI₂ deux conditions : celles de l'intégrale VI₃.

(3) En supposant $1 - a_3 \gamma_2 > 0$. Dans le cas où $1 - a_3 \gamma_2 < 0$, il est aisé de démontrer que l'intégrale VI₃ converge, si ses paramètres satisfont à trois conditions qui sont celles de l'intégrale VI₁. Remarquons qu'il est impossible d'avoir à la fois $1 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2 > 0$ et $1 - a_3 \gamma_2 < 0$ parce que nous avons supposé $a_2 > 0$.

Les conditions de sa convergence sont

$$\left[a_2 - \frac{1}{\gamma_1} (1 - a_3 \gamma_2) \right] \frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2 + \frac{1}{\gamma_1} (1 - a_3 \gamma_2).$$

Enfin, l'intégrale VI', prise dans le quatrième domaine, qui est égale à

$$VI'_4 = h'_4 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{\alpha_3 - \frac{1}{\gamma_2}}},$$

donne encore trois conditions :

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} - a_3.$$

Donc, l'intégrale VI converge, si ses paramètres satisfont à six conditions :

$$a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1,$$

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + a_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$

$$\left(a_1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\beta}{\beta_1} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} - a_3,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} > \frac{\beta_2}{\gamma_2}.$$

En général, pour l'intégrale

$$J_3 = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \dots \int_k^\infty \int_l^\infty \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n}{\left[\begin{array}{l} (x_1^\alpha + x_2^\beta + x_3^\gamma + \dots + x_{n-1}^\kappa + x_n^\lambda)^{a_1} \\ \times (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + x_3^{\gamma_1} + \dots + x_{n-1}^{\kappa_1} + x_n^{\lambda_1})^{a_2} \\ \times (x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + x_3^{\gamma_2} + \dots + x_{n-1}^{\kappa_2} + x_n^{\lambda_2})^{a_3} \end{array} \right]},$$

on a $3(n-1)$ conditions :

$$a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda} - a_1,$$

$$a_2 \frac{x_1}{x} + \left(a_3 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{x_2}{x} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{x} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{x_2}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{x_1} - a_2,$$

$$\left(a_1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\beta_1} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2,$$

$$\left(a_1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma}{\gamma_1} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} + \dots + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{\lambda_2} - a_3,$$

avec

$$\begin{array}{lll} \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, & \frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\gamma_1}, & \dots \quad \frac{x}{\lambda} > \frac{x_1}{\lambda_1}; \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}, & \frac{\beta_1}{\gamma_1} > \frac{\beta_2}{\gamma_2}, & \dots \quad \frac{x_1}{\lambda_1} > \frac{x_2}{\lambda_2}. \end{array}$$

